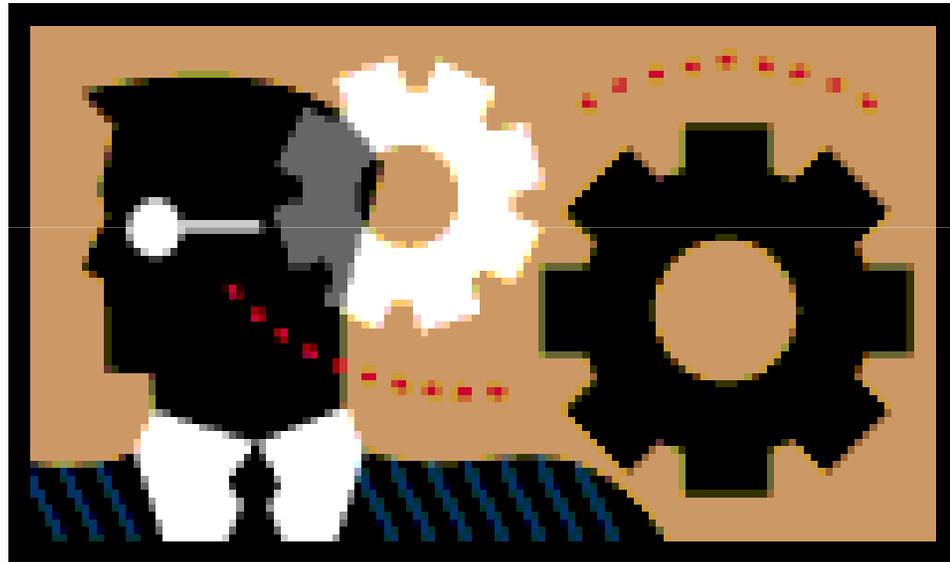


# Desempenho dos Gráficos de Controle



**Prof. MSc. Fabrício Maciel Gomes**

# Desempenho dos Gráficos de Controle

Desempenho dos Gráficos de Controle

Capacidade de detectar per turbações no processo

É importante para:

- Determinação do Plano de Amostragem (tamanho amostral e inter valo entre amostras)
- Estabelecimento dos Limites de Controle

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Teste de Hipótese

Decisão

	Aceitar $H_0$	Rejeitar $H_0$
V	Decisão Correta $1 - \alpha$	Erro Tipo I $\alpha$
F	Erro Tipo II $\beta$	Decisão Correta $1 - \beta$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Teste de Hipóteses do Gráfico de $\bar{X}$

- $H_0 : \mu = \mu_0$  vs.  $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- $H_0$ :
  - Processo em controle
  - Processo ajustado
  - Processo centrado no valor-alvo
  - Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita  $H_0$  toda vez em que  $\bar{X}$  cai dentro dos limites de controle

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Erros de Decisão

- **ALARME FALSO (Erro tipo I):**  
considerar erroneamente o processo fora de controle  
conseqüência: intervir na hora errada
- **NÃO DETECÇÃO (Erro tipo II)**  
considerar erroneamente o processo em controle  
conseqüência: não intervir na hora certa

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Medidas de Desempenho

Supondo-se que as causas especiais não alterem  $\sigma$

- $\alpha$ :  $P\{\text{Erro tipo I}\}$

$$\alpha = P(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0)$$

- $\beta$ :  $P\{\text{Erro tipo II}\}$

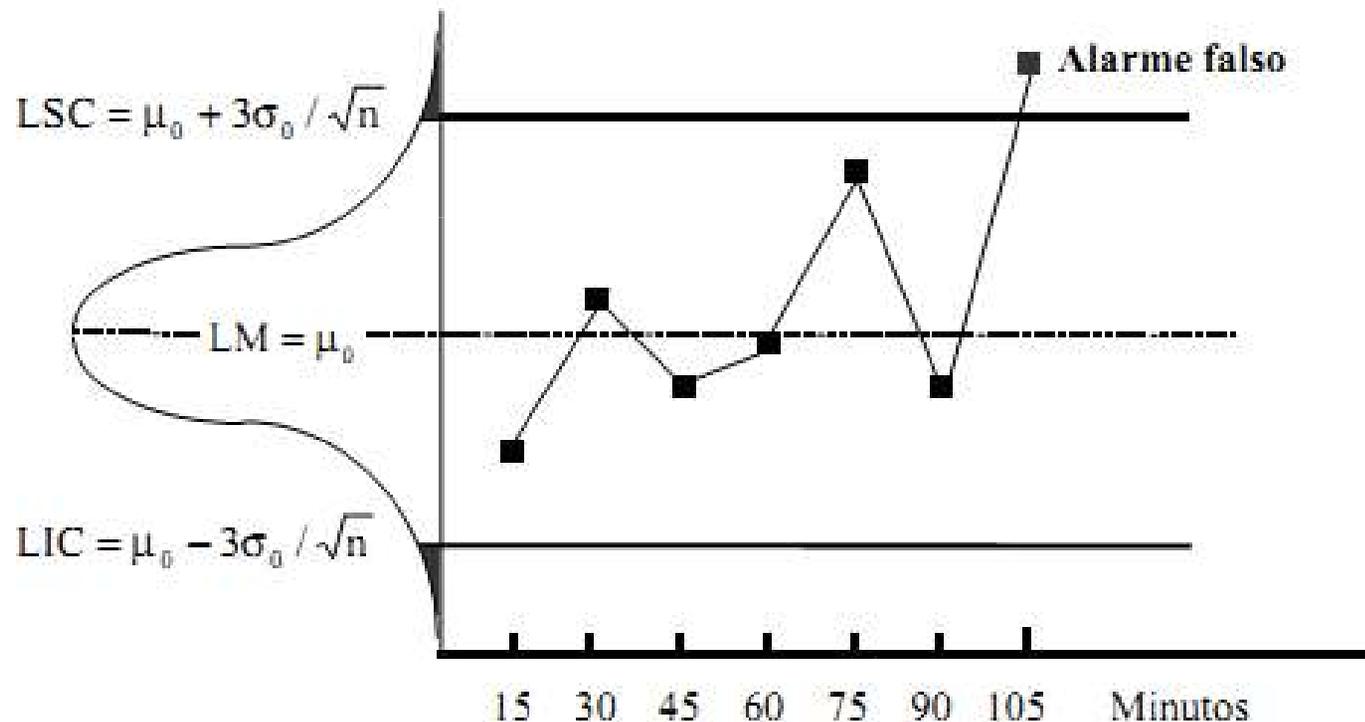
$$\beta = P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\}$$

- *Poder do Gráfico de Controle ( $P_d$ )*

$$P_d = 1 - \beta$$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

$$\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}; \sigma_{\bar{X}}) \sim N(\mu_0; \sigma_0 / \sqrt{n})$$



# Desempenho dos Gráficos de Controle

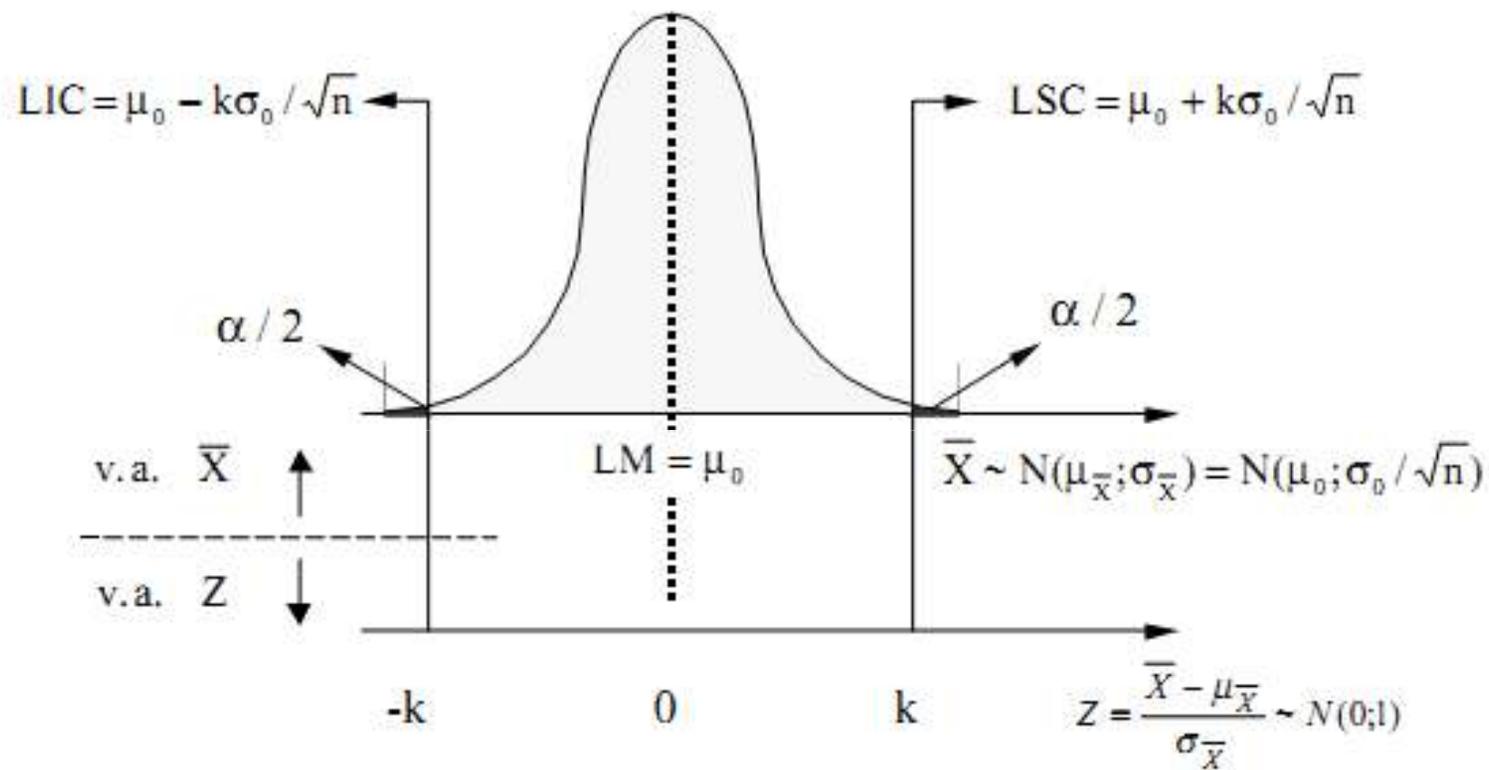
## Alarme Falso no Gráfico de $\bar{X}$

- Para uma grande variedade de distribuições,  $\bar{X}$  tenderá para uma Normal mesmo para  $n$  pequeno
- Se o processo estiver em controle (desempenho  $3\sigma$ ):

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left\{Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + P\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= P\{|Z| > 3\} \\ &= 0,0027\end{aligned}$$

- Ocorrência de alarme falso

# Desempenho dos Gráficos de Controle



Tradicionalmente  $k=3,00$

$$\alpha = Pr[|Z| < k]$$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Alarme Falso no Gráfico de $\bar{X}$ (2)

- $L$ : Qte de amostras antes de um alarme falso
- $L \sim \text{geometrica}(\alpha)$

$$P\{L = d\} = \alpha(1 - \alpha)^{d-1}, \quad d = 1, 2, \dots$$

- $NMAF$ : número médio de amostras antes de alarme falso  
 $NMAF = E(L) = \frac{1}{\alpha}$
- Para limites  $3\sigma$ ,  $E(L) = 370,4$ .

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Alarme Falso no Gráfico de $\bar{X}$ (3)

- Seja a semi-amplitude da região de controle, dada por:

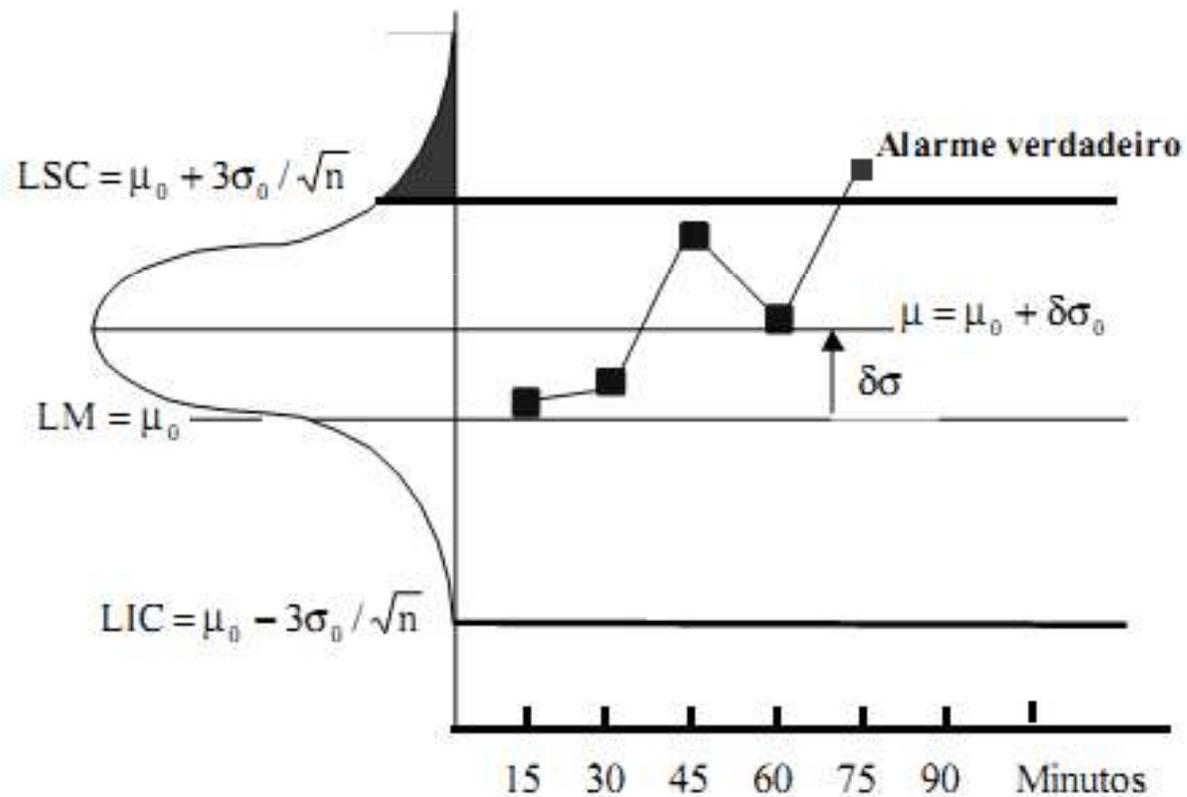
$$k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

- Caso se deseje diminuir a frequência de alarmes falsos, deve-se adotar  $k > 3$
- Exemplo: Para  $k = 3, 10$ 
  - Risco de alarme falso:  $\alpha = 0,0019$
  - Tempo médio entre alarmes:  $516,7 \times h$
- Generalizando,

$$\alpha = P\{|Z| > k\}$$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

$$\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{x}}; \sigma_{\bar{x}}) \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0; \sigma_0 / \sqrt{n})$$



# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Poder do Gráfico de $\bar{X}$

- Quando o processo estiver sob influência da causa especial ( $H_1$  verdadeira) o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico;
- Seja:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_0 + \delta\sigma_0 \\ \delta &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}\end{aligned}$$

- Se  $\delta \geq 1,5$  o valor de  $\bar{X}$  cairá na zona de ação rapidamente
- Se  $\delta < 1,5$  haverá uma certa inércia para o ponto cair na zona de ação.

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Poder do Gráfico de $\bar{X}$ (2)

- $P_d = P\{\text{um valor de } \bar{X} \text{ cair fora dos limites de controle}\};$
- Então:

$$\begin{aligned}P\{\bar{X} > LSC\} &= P\left\{Z > \frac{LSC - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\&= P\left\{Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} - \mu_1}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\&= P\{Z > k - \delta\sqrt{n}\}\end{aligned}$$

- Similarmente:

$$P\{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} = P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Poder do Gráfico de $\bar{X}$ (3)

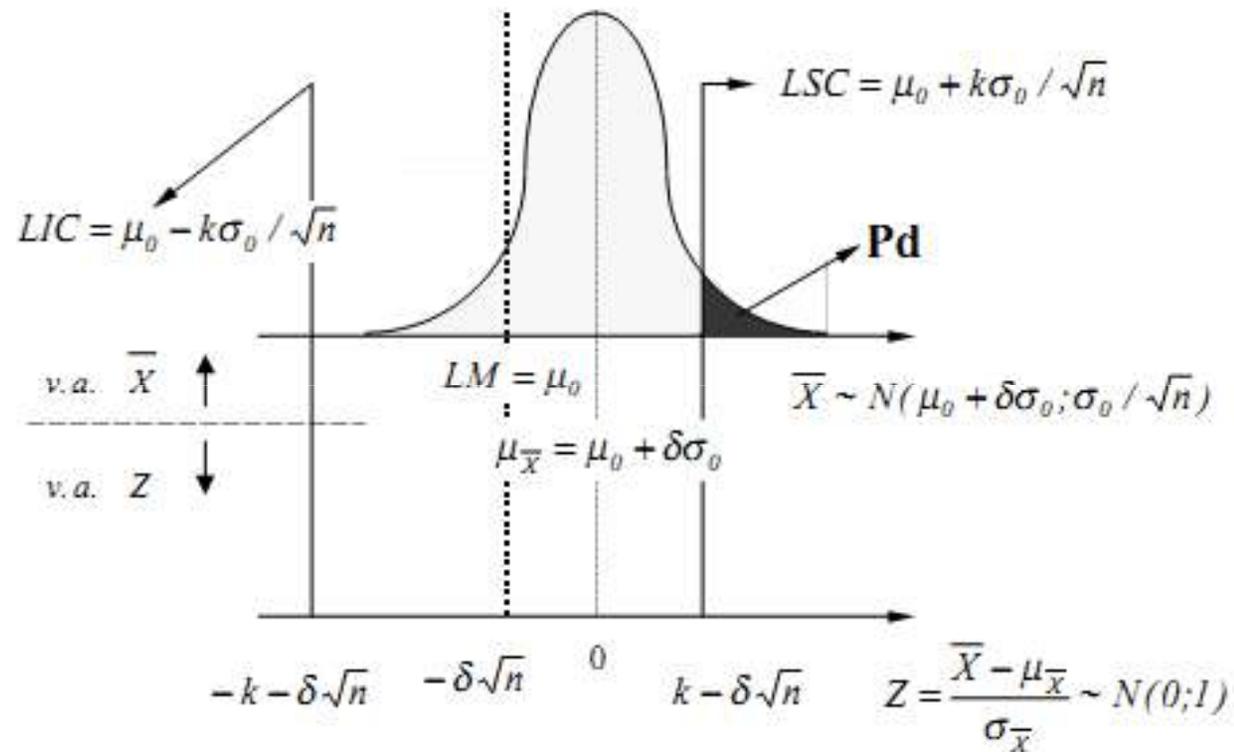
- Simplificando:

$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

- No caso em que  $k = 3$ ,  $\delta = 1$  e  $n = 4$ , temos:

$$\begin{aligned}P_d &= P\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\} + P\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\} \\&= P\{Z < -1\} + P\{Z < -5\} \\&= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587\end{aligned}$$

# Desempenho dos Gráficos de Controle



$$Pd = Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n}] + Pr[Z > k - \delta\sqrt{n}]$$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

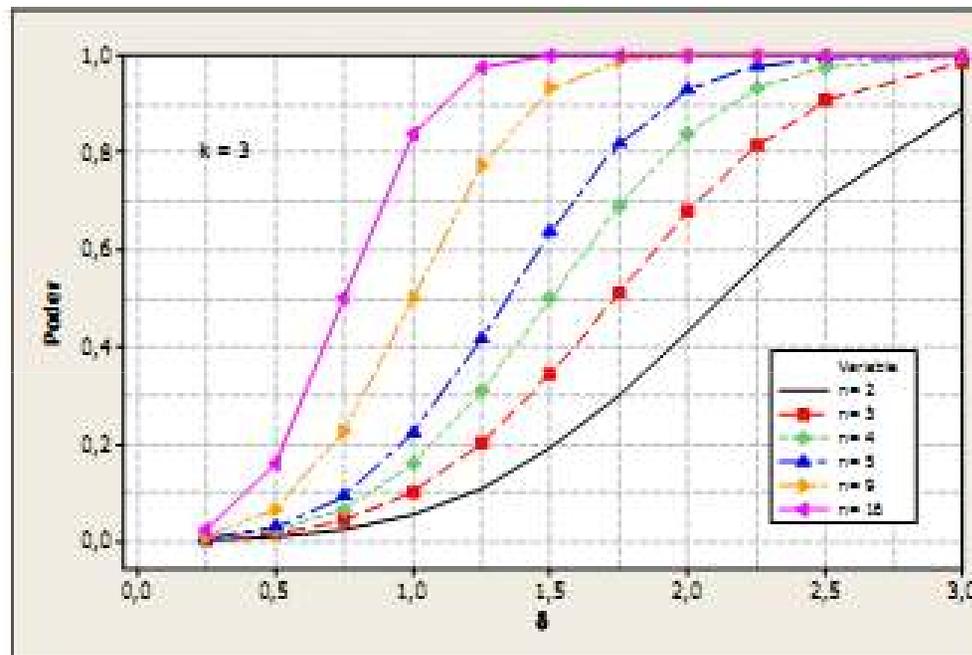
## Alarme Verdadeiro no Gráfico de $\bar{X}$ (2)

- $M$ : Qte de amostras antes de um alarme verdadeiro
- $M \sim \text{geometrica}(P_d)$

$$P\{M = m\} = P_d(1 - P_d)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

- $NMA$ : número médio de amostras antes de alarme  
 $NMA = E(M) = \frac{1}{P_d}$
- São necessárias em média 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar um deslocamento de 1 desvio-padrão da média.
- Se amostra for de tamanho 9, o poder será  $P_d = 0,5$ , necessitando-se, em média, 2 amostras para detectar o mesmo deslocamento.

# Desempenho dos Gráficos de Controle



Poder para se detectar um deslocamento de 1 desvio-padrão do processo ( $\delta = 1$ ):

- Amostra de tamanho 4  $\rightarrow$  0,159
- Amostra de tamanho 9  $\rightarrow$  0,50
- Amostra de tamanho 2  $\rightarrow$  0,06

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Comentários

- Curvas de Poder vs deslocamento

*Figura: 3.12 - Curvas de  $P_d$  vs  $\delta$*

- $n$  não afeta a probabilidade de alarme falso;
- O tamanho amostral tem grande influência no erro tipo II e no poder do gráfico de controle.

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Rapidez de Sinalização

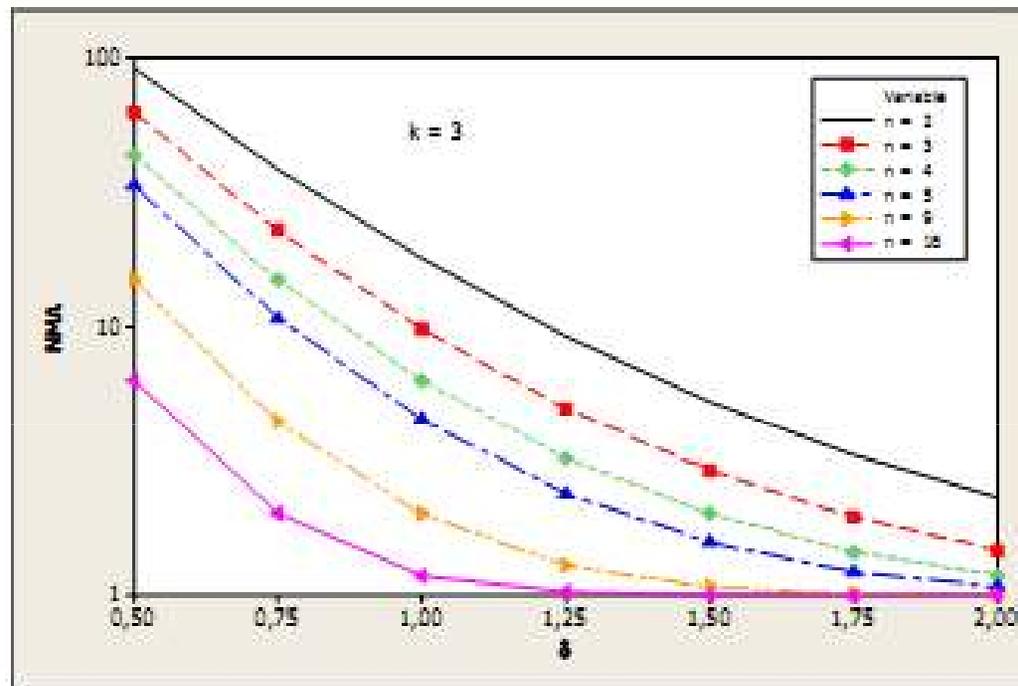
- Seja  $NMA$ : número médio de amostras até o sinal:

$$NMA = \frac{1}{p}$$

- Se  $H_0 : \mu = \mu_0$  for verdadeira,  $p = \alpha$  e  $NMA = \frac{1}{\alpha}$ ;
- Se  $H_0 : \mu \neq \mu_0$  for falsa,  $p = P_d$  e  $NMA = \frac{1}{P_d}$ ;
- Curvas de  $NMA$  vs deslocamento

Figura: 3.13 - Curvas de  $NMA$  vs  $\delta$

# Desempenho dos Gráficos de Controle



Necessitam-se em média 10 amostras de tamanho 3 ou 2 amostras de tamanho 9 para se detectar um deslocamento da média de 1 desvio-padrão do processo ( $\delta = 1$ )

# Desempenho dos Gráficos de Controle

- M: número da amostra que sinaliza desajuste
- Para  $\delta = 1,00$ ,  $n = 4 \rightarrow P\{M=1\} = 0,159$  (Poder)

m	$P\{M=m\}$	$P\{M=m\}$
1	0,16	0,16
2	$0,84 \times 0,16$	0,29
3	$0,84^2 \times 0,16$	0,41
4	$0,84^3 \times 0,16$	0,50
5	$0,84^4 \times 0,16$	0,58
6	$0,84^5 \times 0,16$	0,65
7	$0,84^6 \times 0,16$	0,70

$P\{M>7\}=0,30$ : probabilidade de não perceber deslocamento após a 7ª. inspeção

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Curva de Probabilidade de Não-Detecção

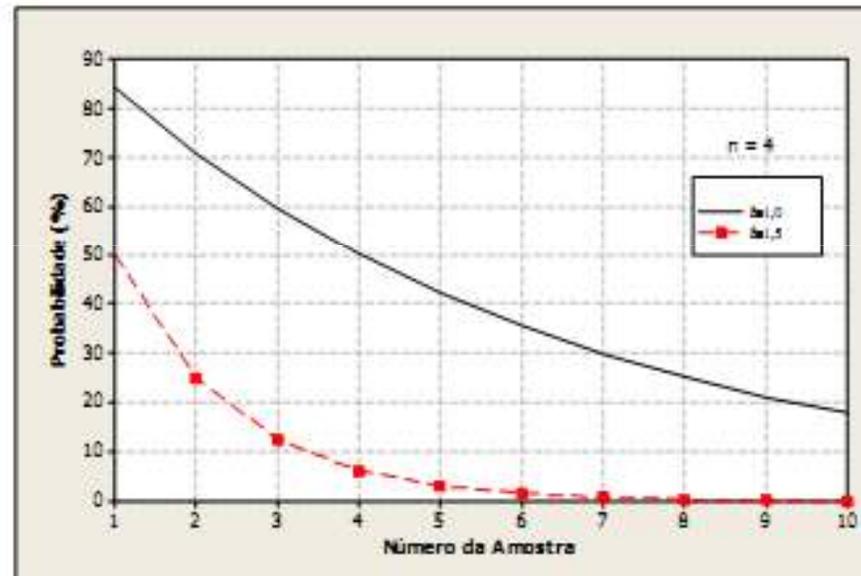
Probabilidade de todos os  $i$  primeiros valores de  $\bar{X}$  após o desajuste caírem dentro dos limites de controle

Figura: 3.14 - Probabilidade de não detecção para  $n = 4$

Figura: 3.15 - Probabilidade de não detecção para  $\delta = 1$

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Curva de probabilidade de Não-deteccção

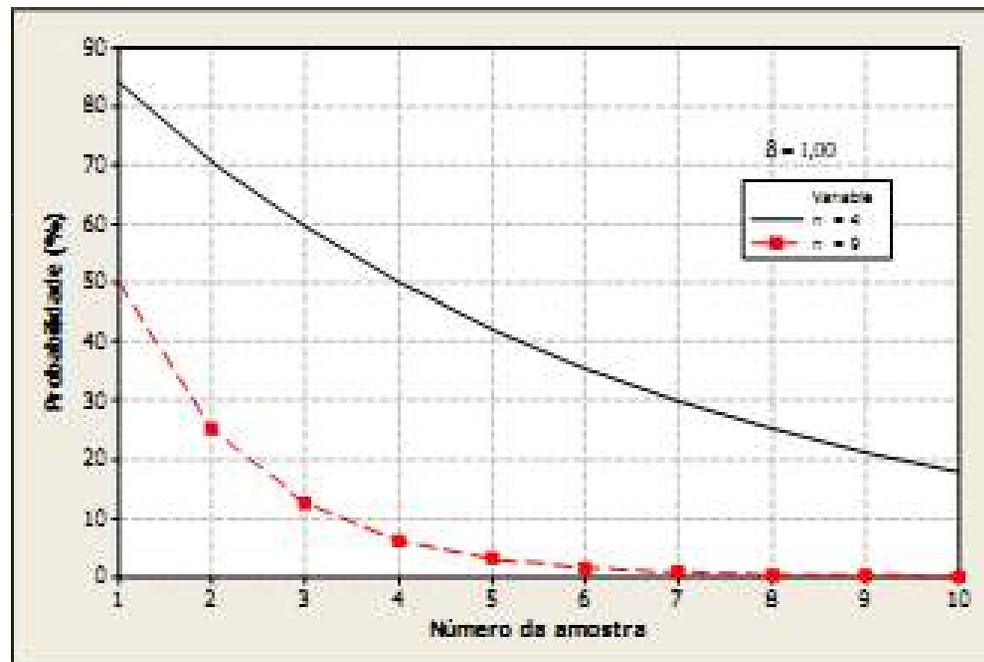


Velocidade de deteccção de deslocamento da média para amostra de tamanho 4

- Para  $\delta = 1,5$ : terá sido detectado com certeza até a 7ª. inspeção
- Para  $\delta = 1,0$ : 30% de chance de não ser percebido até 7ª. inspeção  
(30% de chance de os 7 valores caírem dentro dos limites de controle)

# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Curva de probabilidade de Não-detecção



# Desempenho dos Gráficos de Controle

## Comentários

- Deslocamento da média da ordem de  $1,5\sigma$  será detectado com certeza até a 7ª amostra;
- Deslocamento de  $\delta = 1$  tem cerca de 30% de probabilidade não ser percebido após retirada da 7ª amostra;
- Os gráficos de  $\bar{X}$  são ágeis na detecção de grandes deslocamentos da média ( $\delta > 1,5$ ) e lentos no caso de deslocamentos moderados.
- Com grandes amostras, os gráficos de  $\bar{X}$  são ágeis na detecção de deslocamentos moderados lentos no caso de amostras pequenas;