

Capítulo 3

Vetores no Plano e no Espaço

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado.

Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.

Este fato é análogo ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações repre-

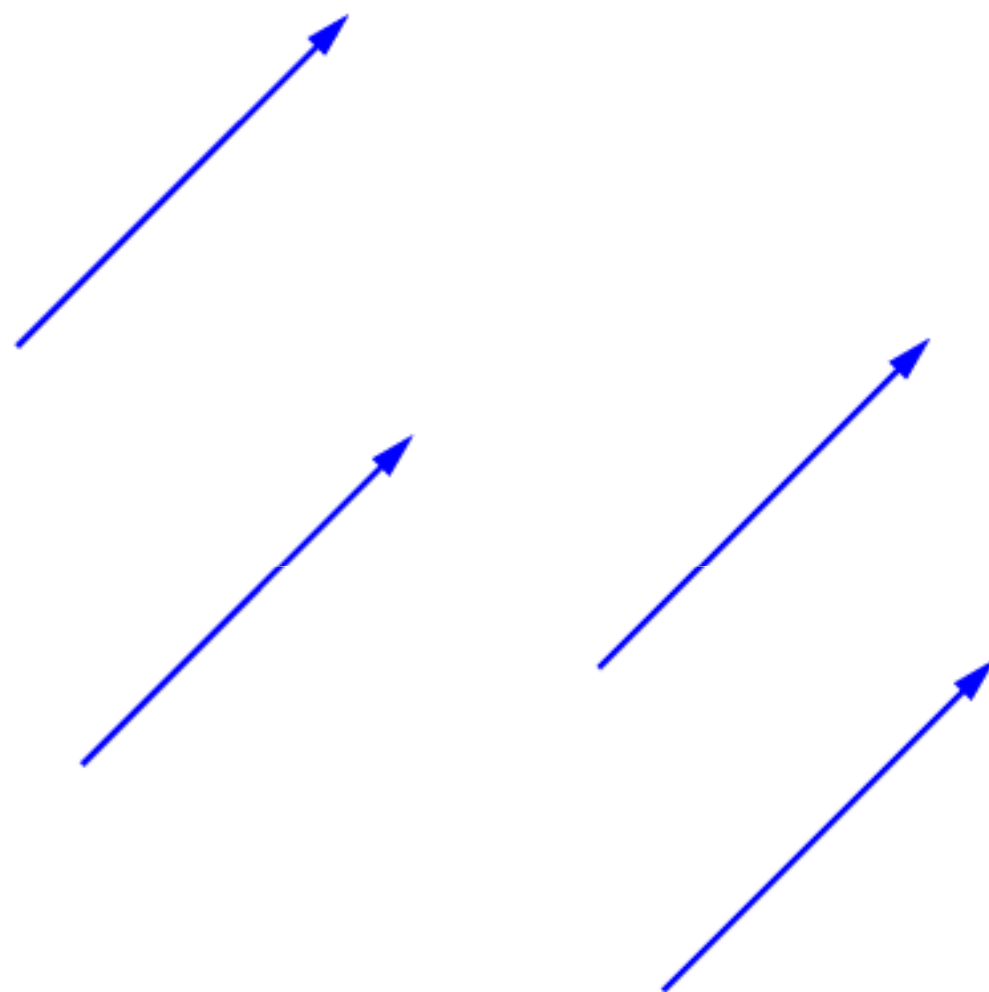
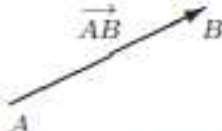


Figura 3.1: Segmentos orientados representando o mesmo vetor

sentam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo, as frações $1/2$, $2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional. A definição de igualdade de vetores também é análoga a igualdade de números racionais. Dois números racionais a/b e c/d são iguais, quando $ad = bc$. Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na [Figura 3.1](#) temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B , então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$


3.1 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

A soma, $V + W$, de dois vetores V e W é determinada da seguinte forma:

- tome um segmento orientado que representa V ;
- tome um segmento orientado que representa W , com origem na extremidade de V ;
- o vetor $V + W$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W .

Da [Figura 3.2](#), deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja,

$$V + W = W + V, \tag{3.1}$$

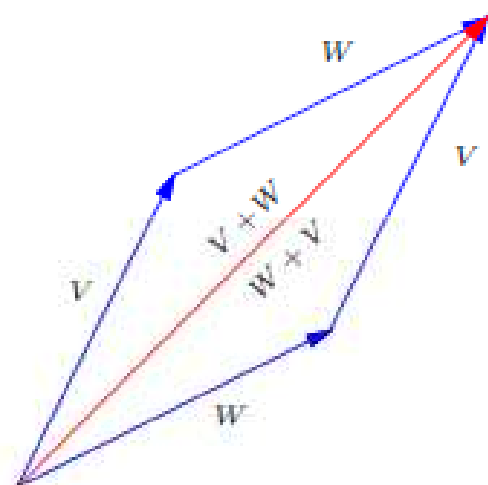


Figura 3.2: $V + W = W + V$

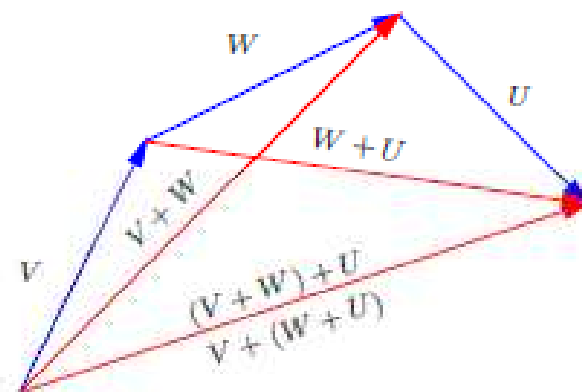


Figura 3.3: $V + (W + U) = (V + W) + U$

para quaisquer vetores V e W . Observamos também que a soma $V + W$ está na diagonal do paralelogramo determinado por V e W , quando estão representados com a mesma origem.

Da **Figura 3.3**, deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja,

$$V + (W + U) = (V + W) + U, \quad (3.2)$$

para quaisquer vetores V , W e U .

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo** e denotado por $\bar{0}$. Segue então, que

$$V + \bar{0} = \bar{0} + V = V, \quad (3.3)$$

para todo vetor V .

Para qualquer vetor V , o **simétrico** de V , denotado por $-V$, é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de V . Segue então, que

$$V + (-V) = \bar{0}. \quad (3.4)$$

Definimos a **diferença W menos V** , por

$$W - V = W + (-V).$$

Segue desta definição, de (3.1), (3.2), (3.4) e de (3.3) que

$$W + (V - W) = (V - W) + W = V + (-W + W) = V + \bar{0} = V.$$

Assim, a diferença $V - W$ é um vetor que somado a W dá V , portanto ele vai da extremidade de W até a extremidade de V , desde que V e W estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

A **multiplicação de um vetor V por um escalar α** , αV , é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

(a) é o vetor nulo, se $\alpha = 0$ ou $V = \vec{0}$,

(b) caso contrário,

- i. tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de V ,
- ii. a direção é a mesma de V (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),
- iii. tem o mesmo sentido de V , se $\alpha > 0$ e
tem o sentido contrário ao de V , se $\alpha < 0$.

As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se $W = \alpha V$, dizemos que W é um **múltiplo escalar** de V . É fácil ver que dois vetores não nulos são paralelos (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas**. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no plano.

Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de V** como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$V = (v_1, v_2).$$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\vec{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P . Em particular, o vetor nulo, $\vec{0} = (0, 0)$. Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

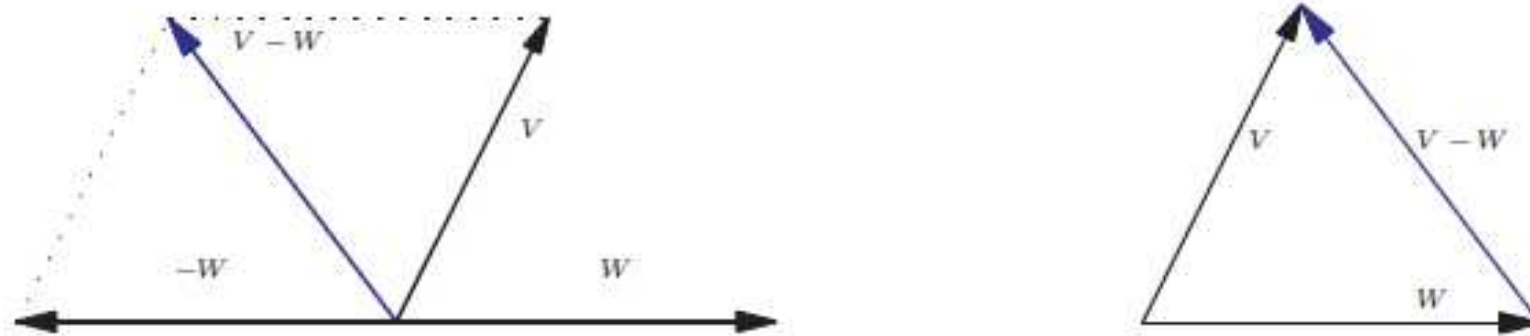


Figura 3.4: A diferença $V - W$

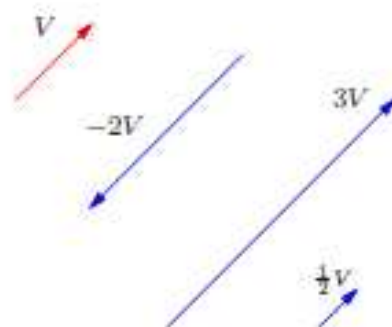


Figura 3.5: Multiplicação de vetor por escalar

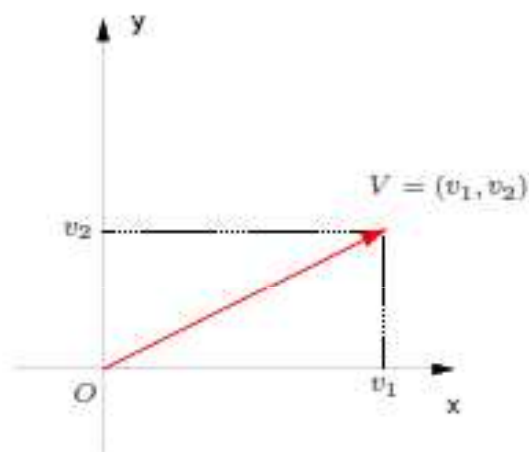


Figura 3.6: As componentes do vetor V no plano

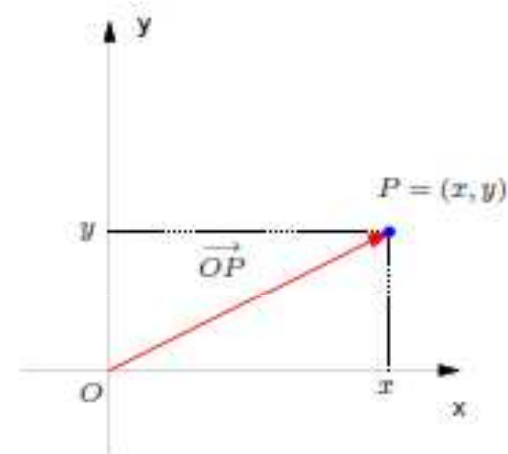


Figura 3.7: As coordenadas de P são iguais as componentes de $\vec{OP}$

- Como ilustrado na **Figura 3.8**, a **soma** de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ é dada por

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);$$

- Como ilustrado na **Figura 3.9**, a **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, v_2)$ por um escalar α é dada por

$$\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um **sistema de coordenadas retangulares no espaço**. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si, sendo uma delas vertical orientada para cima. Estes serão os eixos x, y e z . O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Suponha que giramos o eixo x pelo menor ângulo até que coincida com o eixo y . Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo x positivo de forma que o semi-eixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo z positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto os três planos coordenados são: xy, yz e xz .

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z) , chamado de **coordenadas do ponto P** como segue.

- Trace uma reta paralela ao eixo z , passando por P ;
- A interseção da reta paralela ao eixo z , passando por P , com o plano xy é o ponto P' . As coordenadas de P' , (x, y) , no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P .

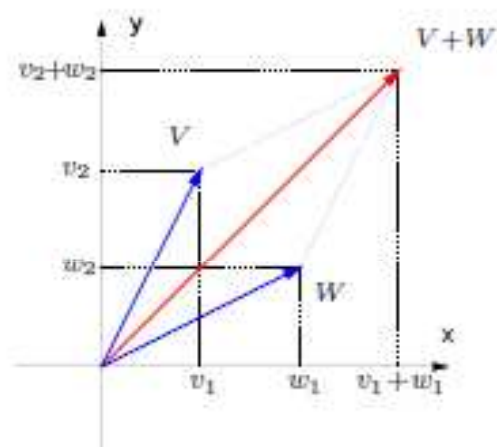


Figura 3.8: A soma de dois vetores no plano

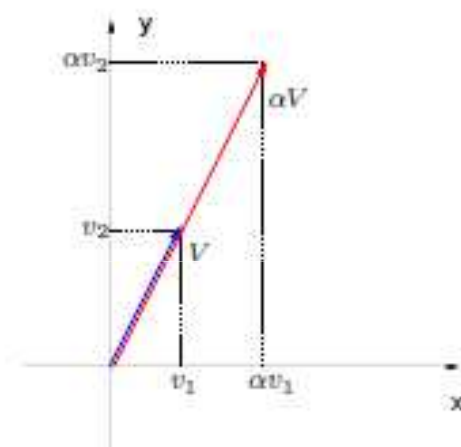


Figura 3.9: A multiplicação de vetor por escalar no plano

-
- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PP' , se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PP' com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy .

As coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy , passando por P , com o eixo z determina a coordenada z .
- A interseção do plano paralelo ao plano xz , passando por P , com o eixo y determina a coordenada y .
- A interseção do plano paralelo ao plano yz , passando por P , com o eixo x determina a coordenada x .

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço. Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de V** como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$V = (v_1, v_2, v_3).$$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\vec{OP}$ que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P . Em particular, o vetor nulo, $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Assim como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

-
- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, então a adição de V com W é dada por

$$\underline{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);}$$

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por

$$\underline{\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).}$$

Exemplo 3.1. Se $V = (1, -2, 3)$, $W = (2, 4, -1)$, então

$$V + W = (1 + 2, -2 + 4, 3 + (-1)) = (3, 2, 2), \quad 3V = (3 \cdot 1, 3 \cdot (-2), 3 \cdot 3) = (3, -6, 9).$$

Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem (**Figura 3.13**), digamos em $P = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então as componentes do vetor V são dadas por

$$\underline{V = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).}$$

Portanto, as componentes de V são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto Q (extremidade) das do ponto P (origem). O mesmo se aplica a vetores no plano.

Exemplo 3.2. As componentes do vetor V que tem um representante com ponto inicial $P = (5/2, 1, 2)$ e ponto final $Q = (0, 5/2, 5/2)$ são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).$$

Observação. O vetor é “livre”, ele não tem posição fixa, ao contrário do ponto e do segmento orientado. Por exemplo, o vetor $V = (-5/2, 3/2, 1/2)$, no exemplo acima, estava representado por um segmento orientado com a origem no ponto $P = (5/2, 1, 2)$. Mas, poderia ser representado por um segmento orientado cujo ponto inicial poderia estar em qualquer outro ponto.

Um vetor no espaço $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = [v_1 \ v_2 \ v_3].$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V + W = [v_1 \ v_2 \ v_3] + [w_1 \ w_2 \ w_3] = [v_1 + w_1 \ v_2 + w_2 \ v_3 + w_3],$$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V + W = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3),$$

$$\alpha V = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Teorema 3.1. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U + V = V + U;$

(b) $(U + V) + W = U + (V + W);$

(c) $U + \vec{0} = U;$

(d) $U + (-U) = \vec{0};$

(e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U;$

(f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V;$

(g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U;$

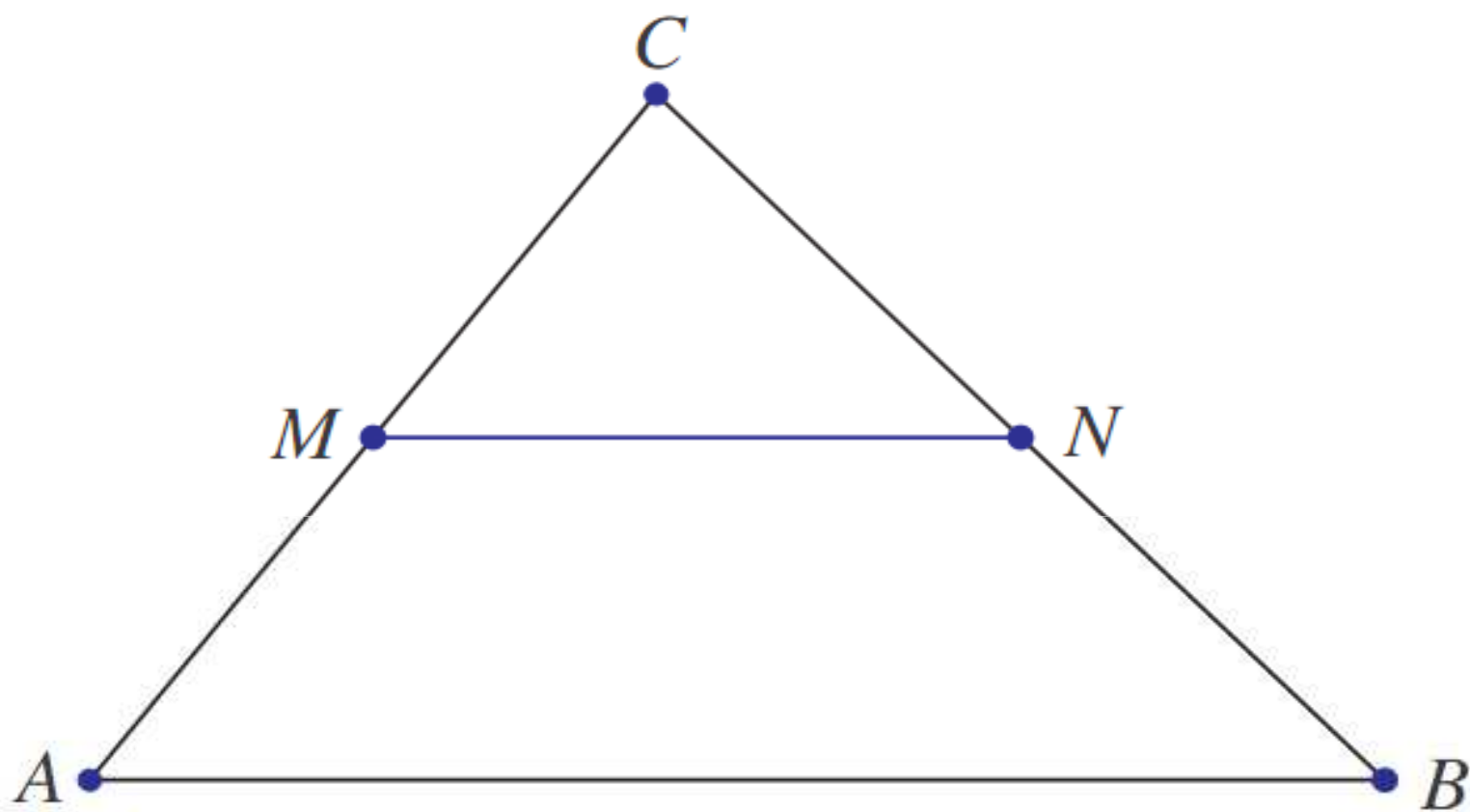
(h) $1U = U.$

Demonstração. Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial

Exemplo 3.3. Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC , respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual a metade do comprimento de AB .

Devemos provar que

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{AB} .$$



Agora, a partir da figura acima temos que

$$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN}.$$

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC , então

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}.$$

Logo,

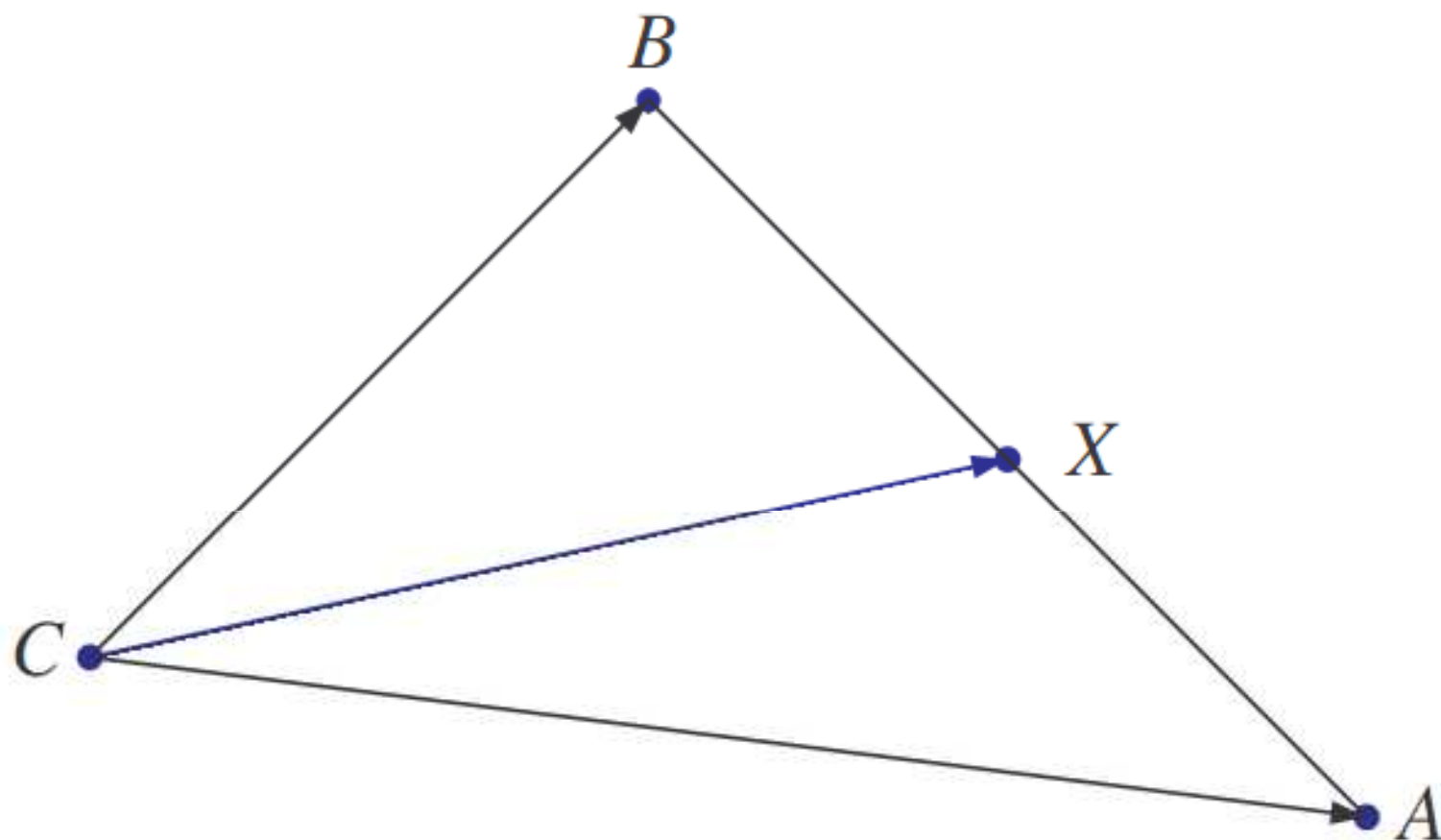
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

Exemplo 3.4. Dados quatro pontos A , B , C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como **combinação linear** de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, isto é, como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Como $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B . Vamos desenhá-lo entre A e B , mas isto não vai representar nenhuma restrição.

O vetor que vai de C para X , pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X ,

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}.$$



Agora, por hipótese $\vec{AX} = \lambda \vec{AB}$, o que implica que $\vec{CX} = \vec{CA} + \lambda \vec{AB}$.
Mas, $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$, portanto $\vec{CX} = \vec{CA} + \lambda(\vec{CB} - \vec{CA})$. Logo,

$$\vec{CX} = (1 - \lambda) \vec{CA} + \lambda \vec{CB}.$$

Observe que:

- Se $\lambda = 0$, então $\vec{CX} = \vec{CA}$.
- Se $\lambda = 1$, então $\vec{CX} = \vec{CB}$.
- Se $\lambda = 1/2$, então $\vec{CX} = \frac{1}{2} \vec{CA} + \frac{1}{2} \vec{CB}$.
- Se $\lambda = 1/3$, então $\vec{CX} = \frac{2}{3} \vec{CA} + \frac{1}{3} \vec{CB}$.

Exemplo 3.5. Vamos mostrar, usando vetores, que o ponto médio de um segmento que une os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

O ponto M é o ponto médio de AB se, e somente se, $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB}$. Então, aplicando o exemplo anterior (com o ponto C sendo a origem O), $\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$. Como as coordenadas de um ponto são iguais às componentes do vetor que vai da origem até aquele ponto, segue-se que $\vec{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2)$ e

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

3.1.2 Norma e Produto Escalar

Já vimos que o **comprimento** de um vetor V é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. O comprimento do vetor V também é chamado de **norma de V** e é denotado(a) por $\|V\|$. Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor é dada por

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

no caso em que $V = (v_1, v_2)$ é um vetor no plano, e por

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

no caso em que $V = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor no espaço

Um vetor de norma igual a 1 é chamado **vetor unitário**.

A **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

então a distância de P a Q é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Analogamente, a **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ no plano é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemplo 3.6. A norma do vetor $V = (1, -2, 3)$ é

$$\|V\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

A distância entre os pontos $P = (2, -3, 1)$ e $Q = (-1, 4, 5)$ é

$$\text{dist}(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \|(-1-2, 4-(-3), 5-1)\| = \|(-3, 7, 4)\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

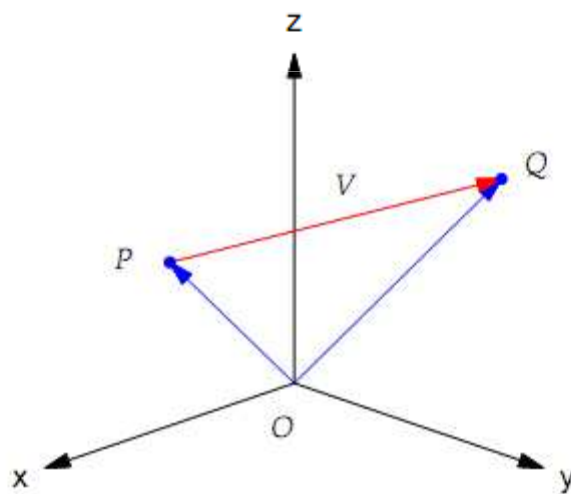


Figura 3.13: $V = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

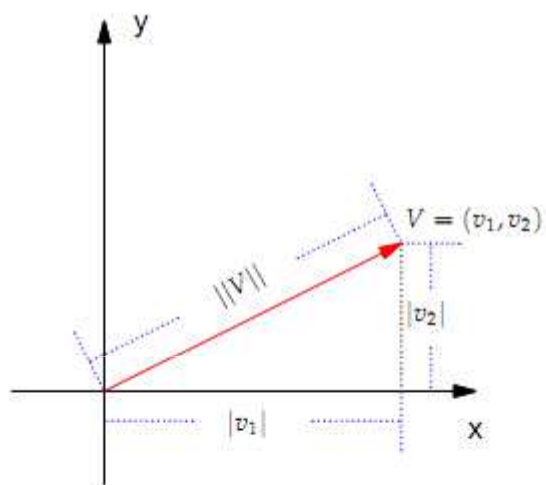


Figura 3.14: A norma de um vetor V no plano

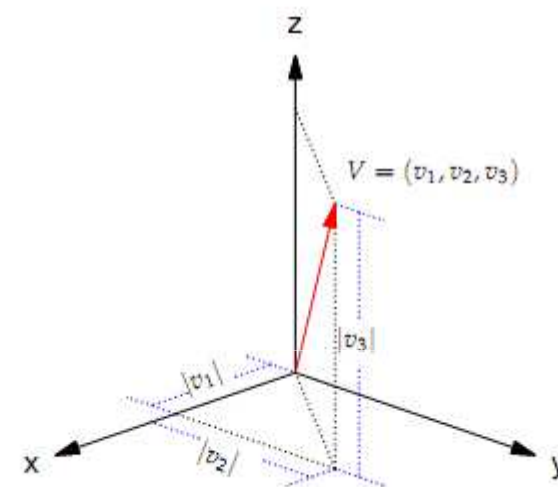


Figura 3.15: A norma de um vetor V no espaço

Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue-se que

$$||\alpha V|| = ||(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)|| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

ou seja,

$$||\alpha V|| = |\alpha| ||V||. \quad (3.5)$$

Dado um vetor V **não nulo**, o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||} \right) V.$$

é um **vetor unitário na direção de V** , pois por (3.5), temos que

$$||U|| = \left| \frac{1}{||V||} \right| ||V|| = 1.$$

Exemplo 3.7. Um vetor unitário na direção do vetor $V = (1, -2, 3)$ é o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||} \right) V = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \right) (1, -2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

O ângulo entre dois vetores não nulos, V e W , é definido pelo ângulo θ determinado por V e W que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem.

Quando o ângulo θ entre dois vetores V e W é reto ($\theta = 90^\circ$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si.

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante.

Definição 3.1. O produto escalar ou interno de dois vetores V e W é definido por

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ ou } W \text{ é o vetor nulo,} \\ ||V|| ||W|| \cos \theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que θ é o ângulo entre eles.

Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles. Por isso, precisamos de uma forma de calcular o produto escalar que não necessite do ângulo entre os vetores.

Se V e W são dois vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos,

$$||V - W||^2 = ||V||^2 + ||W||^2 - 2||V|| ||W|| \cos \theta.$$

Assim,

$$V \cdot W = ||V|| ||W|| \cos \theta = \frac{1}{2} (||V||^2 + ||W||^2 - ||V - W||^2). \quad (3.6)$$

Já temos então uma fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles. Substituindo-se as coordenadas dos vetores em (3.6) obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

Por exemplo, se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço, então substituindo-se $||V||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, $||W||^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$ e $||V - W||^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2$ em (3.6) os termos v_i^2 e w_i^2 são cancelados e obtemos

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$



Figura 3.16: Ângulo entre dois vetores, agudo (à esquerda) e obtuso (à direita)



Figura 3.17: Triângulo formado por representantes de V , W e $V - W$. À esquerda o ângulo entre V e W é agudo e à direita é obtuso.

Teorema 3.2. O produto escalar ou interno, $V \cdot W$, entre dois vetores é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

se $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ são vetores no plano e por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço.

Exemplo 3.8. Sejam $V = (0, 1, 0)$ e $W = (2, 2, 3)$. O produto escalar de V por W é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2.$$

Podemos usar o **Teorema 3.2** para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, V e W . O cosseno do ângulo entre V e W é, então, dado por

$$\cos \theta = \frac{V \cdot W}{||V|| ||W||}.$$

Se V e W são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então

(a) θ é agudo ($0 \leq \theta < 90^\circ$) se, e somente se, $V \cdot W > 0$,

-
- (b) θ é reto ($\theta = 90^\circ$) se, e somente se, $V \cdot W = 0$ e
- (c) θ é obtuso ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) se, e somente se, $V \cdot W < 0$.

Exemplo 3.9. Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas. Sejam $V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (0, 1, 0)$ e $V_3 = (0, 0, 1)$ (Figura 3.18). Uma diagonal do cubo é representada pelo vetor D dado por

$$D = V_1 + V_2 + V_3 = (1, 1, 1).$$

Então o ângulo entre D e V_1 satisfaz

$$\cos \theta = \frac{D \cdot V_1}{\|D\| \|V_1\|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})(\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54^\circ.$$

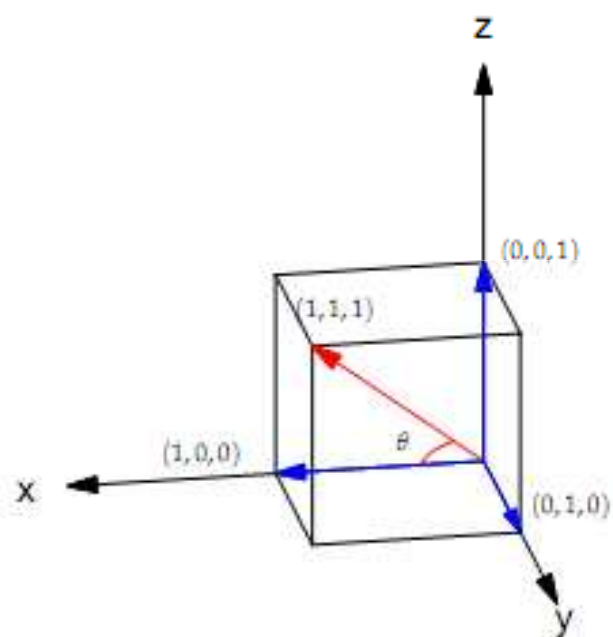


Figura 3.18: Ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas