2.2 Determinantes

Vamos inicialmente definir o determinante de matrizes 1×1. Para cada matriz $A = [a]$ definimos o **determinante** de A, indicado por $\det(A)$, por $\det(A) = a$. Vamos, agora, definir o determinante de matrizes 2×2 e a partir daí definir para matrizes de ordem maior. A cada matriz A, 2×2, associamos um número real, denominado **determinante** de A, por:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir o determinante de matrizes quadradas maiores, precisamos definir o que são os menores de uma matriz. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, o **menor** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{A}_{ij}$, é a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, que tem o seguinte aspecto:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Inversão de Matrizes e Determinante

Exemplo 2.8. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos definir os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3\times 3}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{a}_{ij}$, é definido por

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator $\tilde{a}_{ij}$, do elemento a_{ij} é igual a mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.9. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\det(\tilde{A}_{23}) = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}$$

Vamos, agora, definir o determinante de uma matriz 3×3. Se

$$A = \left[\begin{array}{c} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array}\right],$$

então, o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos seus cofatores.

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\ &= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \end{aligned}$$

Da mesma forma que a partir do determinante de matrizes 2×2, definimos o determinante de matrizes 3×3, podemos definir o determinante de matrizes quadradas de ordem maior. Supondo que sabemos como calcular o determinante de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ vamos definir o determinante de matrizes $n \times n$.

Vamos definir, agora, os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{a}_{ij}$, é definido por

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator $\tilde{a}_{ij}$, do elemento a_{ij} é igual a mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Definição 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$. O **determinante** de A, denotado por $\det(A)$, é definido por

$$\det(A) = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + \ldots + a_{1n}\tilde{a}_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{a}_{1j}, \qquad (2.7)$$

em que $\tilde{a}_{1j} = (-1)^{1+j}\det(\tilde{A}_{1j})$ é o cofator do elemento a_{1j}. A expressão (2.8) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de** A em termos da 1ª linha.

2.2.1 Propriedades do Determinante

Vamos provar uma propriedade importante do determinante. Para isso vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ em termos das suas linhas

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ A_k \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a linha i da matriz A, ou seja, $A_i = [\, a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in} \,]$. Se a linha A_k é escrita na forma $A_k = \alpha X + \beta Y$, em que X e Y são matrizes linha $1 \times n$, então o determinante pode ser decomposto como mostra o resultado seguinte.

Teorema 2.10. *Seja* $A = (a_{ij})_{n \times n}$ *escrita em termos das suas linhas, denotadas por* A_i*, ou seja,* $A_i = [\, a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in} \,]$*. Se para algum k, a linha* $A_k = \alpha X + \beta Y$*, em que* $X = [\, x_1 \ldots x_n \,]$*,* $Y = [\, y_1 \ldots y_n \,]$ *e* α *e* β *são escalares, então:*

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Aqui, $A_k = \alpha X + \beta Y = [\, \alpha x_1 + \beta y_1 \; \ldots \; \alpha x_n + \beta y_n \,]$.

2.1.3 Método para Inversão de Matrizes

O exemplo seguinte mostra, para matrizes 2×2, não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_2]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_2$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível.

Exemplo 2.4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Devemos procurar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & bz & & & & & = & 1 \\ cx & + & dz & & & & & = & 0 \\ & & & & ay & + & bw & = & 0 \\ & & & & cy & + & dw & = & 1 \end{array}\right.$$

Este sistema pode ser desacoplado em dois sistemas independentes que possuem a mesma matriz, que é a matriz A. Podemos resolvê-los simultaneamente. Para isto, basta escalonarmos a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc:c:c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] = [\,A \,|\, I_2\,].$$

Os dois sistemas têm solução única se, e somente se, a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A \,|\, I_2\,]$ for da forma $[\,I_2 \,|\, S\,] = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \end{array}\right]$ (verifique, observando o que acontece se a forma escalonada reduzida da matriz A não for igual a I_2). Neste caso, $x = s, z = u$ e $y = t, w = v$, ou seja, a matriz A possuirá inversa, $A^{-1} = B = S = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$.