
Capítulo 2

Inversão de Matrizes e Determinantes

2.1 Matriz Inversa

Todo número real a , não nulo, possui um inverso (multiplicativo), ou seja, existe um número b , tal que $ab = ba = 1$. Este número é único e o denotamos por a^{-1} . Apesar da álgebra matricial ser semelhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes A *não nulas* possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. De início, para que os produtos AB e BA estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes A e B sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, pois todo número não nulo tem inverso. Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa, apesar do conjunto das que não tem inversa ser bem menor do que o conjunto das que tem

Definição 2.1. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que

$$A B = B A = I_n, \quad (2.1)$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de **inversa** de A . Se A não tem inversa, dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo 2.1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é a inversa da matriz A , pois $A B = B A = I_2$.

Teorema 2.1. Se uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ possui inversa, então a inversa é única.

Demonstração. Suponhamos que B e C sejam inversas de A . Então, $AB = BA = I_n = AC = CA$ e assim,

$$B = B I_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$



Denotamos a inversa de A , quando ela existe, por A^{-1} . Devemos chamar atenção para o fato de que o índice superior -1 , aqui, não significa uma potência, tão pouco uma divisão. Assim como no caso da transposta, em que A^t significa a transposta de A , aqui, A^{-1} significa a inversa de A .

2.1.1 Propriedades da Inversa

Teorema 2.2. (a) Se A é invertível, então A^{-1} também o é e

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(b) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times n}$ são matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(c) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é invertível, então A^t também é invertível e

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Demonstração. Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

(a) Uma matriz B é a inversa de A^{-1} se

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n.$$

Mas, como A^{-1} é a inversa de A , então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Como a inversa é única, então $B = A$ é a inversa de A^{-1} , ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Temos que mostrar que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, mostrar que os produtos $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ são iguais à matriz identidade. Mas, pelas propriedades

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.\end{aligned}$$

(c) Queremos mostrar que a inversa de A^t é $(A^{-1})^t$. Pela propriedade (o) do Teorema 1.1

$$\begin{aligned}A^t(A^{-1})^t &= (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n, \\ (A^{-1})^tA^t &= (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n.\end{aligned}$$



O teorema seguinte, cuja demonstração será omitida no momento (Subseção 2.1.2), garante que basta verificarmos uma das duas igualdades em (2.1) para sabermos se uma matriz é a inversa de outra.

Teorema 2.3. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$;

(b) Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$;

Assim, para verificar que uma matriz A é invertível, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A , basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se um deles é igual a I_n . O próximo exemplo ilustra este fato.

Exemplo 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz tal que $A^3 = \vec{0}$ (A pode não ser a matriz nula). Vamos mostrar que a inversa de $I_n - A$ é $I_n + A + A^2$. Para provar isto, devemos multiplicar a matriz $I_n - A$, pela matriz que possivelmente seja a inversa dela, aqui $I + A + A^2$, e verificar se o produto das duas é igual a matriz identidade I_n .

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n.$$

2.1.3 Método para Inversão de Matrizes

O exemplo seguinte mostra, para matrizes 2×2 , não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_2]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_2$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível.

Exemplo 2.4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Devemos procurar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$, ou seja,

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \\ ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

Este sistema pode ser desacoplado em dois sistemas independentes que possuem a mesma matriz, que é a matriz A . Podemos resolvê-los simultaneamente. Para isto, basta escalonarmos a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] = [A \mid I_2].$$

Os dois sistemas têm solução única se, e somente se, a forma escalonada reduzida da matriz $[A \mid I_2]$ for da forma $[I_2 \mid S] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \end{array} \right]$ (verifique, observando o que acontece se a forma escalonada reduzida da matriz A não for igual a I_2). Neste caso, $x = s, z = u$ e $y = t, w = v$, ou seja, a matriz A possuirá inversa, $A^{-1} = B = S = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$.

Para os leitores da [Subseção 2.1.2](#) o próximo teorema é uma simples consequência do [Teorema 2.5](#). Entretanto a demonstração que daremos a seguir fornece um método para encontrar a inversa de uma matriz, se ela existir.

Teorema 2.7. *Uma matriz A , $n \times n$, é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n .*

Demonstração. Pelo [Teorema 2.3](#), para verificarmos se uma matriz A , $n \times n$, é invertível, basta verificarmos se existe uma matriz B , tal que

$$AB = I_n. \quad (2.4)$$

Vamos denotar as colunas de B por $X_1, X_2, \dots, X_n$, ou seja, $B = [X_1 \dots X_n]$, em que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

e as colunas da matriz identidade I_n , por $E_1, E_2, \dots, E_n$, ou seja, $I_n = [E_1 \dots E_n]$, em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim a equação (2.4) pode ser escrita como

$$A[X_1 \dots X_n] = [AX_1 \dots AX_n] = [E_1 \dots E_n],$$

pois a j -ésima coluna do produto AB é igual a A vezes a j -ésima coluna da matriz B

Analisando coluna a coluna a equação anterior vemos que encontrar B é equivalente a resolver n sistemas lineares

$$AX_j = E_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Cada um dos sistemas pode ser resolvido usando o método de Gauss-Jordan. Para isso, formaríamos as matrizes aumentadas $[A \mid E_1], [A \mid E_2], \dots, [A \mid E_n]$. Entretanto, como as matrizes dos sistemas são todas iguais à A , podemos resolver todos os sistemas simultaneamente formando a matriz $n \times 2n$

$$[A \mid E_1 E_2 \dots E_n] = [A \mid I_n].$$

Transformando $[A \mid I_n]$ na sua forma escalonada reduzida, que vamos denotar por $[R \mid S]$, vamos chegar a duas situações possíveis: ou a matriz R é a matriz identidade, ou não é.

- Se $R = I_n$, então a forma escalonada reduzida da matriz $[A \mid I_n]$ é da forma $[I_n \mid S]$. Se escrevemos a matriz S em termos das suas colunas $S = [S_1 S_2 \dots S_n]$, então as soluções dos sistemas $AX_j = E_j$ são $X_j = S_j$ e assim $B = S$ é tal que $AB = I_n$ e pelo Teorema 2.3 A é invertível.
- Se $R \neq I_n$, então a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade I_n . Então, pela Proposição 1.5 a matriz R tem uma linha nula. O que implica que cada um dos sistemas $AX_j = E_j$ ou não tem solução única ou não tem solução. Isto implica que a matriz A não tem inversa, pois as colunas da (única) inversa seriam X_j , para $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. (a) Se a matriz A é invertível, então multiplicando $AX = B$ por A^{-1} à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Aqui foram usadas as propriedades (h) e (i) do Teorema 1.1. Portanto, $X = A^{-1}B$ é a única solução do sistema $AX = B$. Por outro lado, se o sistema $AX = B$ possui solução única, então a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema $[A \mid B]$ é da forma $[R \mid S]$, em que $R = I_n$. Pois a matriz A é quadrada e caso R fosse diferente da identidade possuiria uma linha de zeros (Proposição 1.5) o que levaria a que o sistema $AX = B$ ou não tivesse solução ou tivesse infinitas soluções. Logo, a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade o que pelo Teorema 2.7 implica que A é invertível.

(b) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Pelo item anterior, esta será a única solução se, e somente se, A é invertível. ■