

Matrizes e Sistemas Lineares

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Uma **equação linear** em n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

em que a_1, a_2, \dots, a_n e b são constantes reais;

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Usando o produto de matrizes que definimos na seção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\boxed{AX = B,}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Uma **solução** de um sistema linear é uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são

satisfeitas quando substituirmos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema. A matriz A é chamada **matriz do sistema linear**.

Exemplo 1.10. O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, que não alteram a solução do sistema, sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de **matriz aumentada**, ou seja, a matriz

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Definição 1.5. Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

- (a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;
- (b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
- (c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

Teorema 1.2. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Demonstração. A demonstração deste teorema segue-se de duas observações:

- (a) Se X é solução de um sistema, então X também é solução do sistema obtido aplicando-se uma operação elementar sobre suas equações (verifique!).

- (b) Se o sistema $CX = D$, é obtido de $AX = B$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações (ou equivalentemente às linhas da sua matriz aumentada), então o sistema $AX = B$ também pode ser obtido de $CX = D$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez (verifique!).

Pela observação (b), $AX = B$ e $CX = D$ podem ser obtidos um do outro aplicando-se uma operação elementar sobre as suas equações. E pela observação (a), os dois possuem as mesmas soluções. ■

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados **sistemas equivalentes**. Portanto, segue-se do **Teorema 1.2** que aplicando-se operações elementares às equações de um sistema linear obtemos sistemas equivalentes.

1.2.1 Método de Gauss-Jordan

O método que vamos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado a esta matriz seja de fácil resolução.

Vamos procurar obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo (chamado **pivô**) o número 1. Além disso, se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero. Vamos ver no exemplo seguinte como conseguimos isso. Neste exemplo veremos como a partir do faturamento e do gasto com insumos podemos determinar quanto foi produzido de cada produto manufaturado em uma indústria.

Definição 1.6. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

- (a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;
- (b) O **pivô** (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual a 1;
- (c) O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.
- (d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma **escalonada**.

Em geral, se o sistema linear tiver solução e a forma escalonada reduzida da matriz aumentada possuir colunas sem pivôs, as variáveis que **não** estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres.

Lembramos que o sistema linear não tem solução se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema for da forma $[0 \dots 0 \mid b'_m]$, com $b'_m \neq 0$,

Observação. Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível. Um outro método de resolver sistemas lineares consiste em, através da aplicação de operações elementares à matriz aumentada do sistema, se chegar a uma matriz que é somente **escalonada** (isto é, uma matriz que satisfaz as condições (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d) da **Definição 1.6**). Este método é conhecido como **método de Gauss**.

O próximo resultado mostra que um sistema linear que tenha mais de uma solução não pode ter um número finito de soluções.

Proposição 1.3. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Demonstração. Seja

$$X_\lambda = (1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que X_λ é solução do sistema $AX = B$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Para isto vamos mostrar que $AX_\lambda = B$.

Aplicando as propriedades (i), (j) das operações matriciais (**Teorema 1.1**) obtemos

$$AX_\lambda = A[(1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1] = A(1 - \lambda)X_0 + A\lambda X_1 = (1 - \lambda)AX_0 + \lambda AX_1$$

Como X_0 e X_1 são soluções de $AX = B$, então $AX_0 = B$ e $AX_1 = B$, portanto

$$AX_\lambda = (1 - \lambda)B + \lambda B = [(1 - \lambda) + \lambda]B = B,$$

pela propriedade (f) do **Teorema 1.1**.

Assim o sistema $AX = B$ tem infinitas soluções, pois para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, X_λ é solução e $X_\lambda - X_{\lambda'} = (\lambda - \lambda')(X_1 - X_0)$, ou seja, $X_\lambda \neq X_{\lambda'}$, para $\lambda \neq \lambda'$. Observe que para $\lambda = 0$, $X_\lambda = X_0$, para $\lambda = 1$, $X_\lambda = X_1$, para $\lambda = 1/2$, $X_\lambda = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}X_1$, para $\lambda = 3$, $X_\lambda = -2X_0 + 3X_1$ e para $\lambda = -2$, $X_\lambda = 3X_0 - 2X_1$.

Para resolver sistemas lineares vimos aplicando operações elementares à matriz aumentada do sistema linear. Isto pode ser feito com quaisquer matrizes.