Engenharia Civil

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof. Fabrício Maciel Gomes

Matrizes e Sistemas Lineares

1.1 Matrizes

Uma matriz A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A i-ésima linha de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \ldots, m$ e a j-ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \ldots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada de posição** i, j da matriz A.

Se $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a **diagonal (principal)** de A.

Exemplo 1.1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1. De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são $a_{12} = 2$, $c_{23} = -2$, $e_{21} = 4$, $[A]_{22} = 4$, $[D]_{12} = 3$.

Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha**, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna**, No Exemplo 1.1 a matriz D é uma matriz linha e a matriz E é uma matriz coluna.

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são **iguais** se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Vamos definir operações matriciais análogas às operações com números e provar propriedades que são válidas para essas operações. Veremos, mais tarde, que um sistema de equações lineares pode ser escrito em termos de uma única equação matricial.

Vamos, agora, introduzir as operações matriciais.

1.1.1 Operações com Matrizes

Definição 1.1. A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definição 1.2. A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por um escalar (número) α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um múltiplo escalar da matriz A.

Definição 1.3. O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz $m \times n$

$$C = AB$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} \quad = \quad a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \qquad (1.1)$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

A equação (1.1) está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a notação de somatório.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

e dizemos "somatório de k variando de 1 a p de $a_{ik}b_{kj}$". O símbolo $\sum_{k=1}^{p}$ significa que estamos uma soma em que o índice k está variando de $k = 1$ até $k = p$.