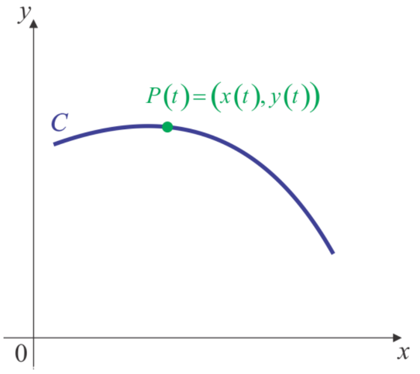
Integral de Linha

As integrais de linha podem ser encontradas em inúmeras aplicações nas Ciências Exatas, como por exemplo, no cálculo do trabalho realizado por uma força variável sobre uma partícula, movendo-a de um ponto **A** a um ponto **B** no plano. Na Termodinâmica, uma integral de linha é utilizada, por exemplo, para calcular o trabalho e o calor desenvolvido numa transformação qualquer.

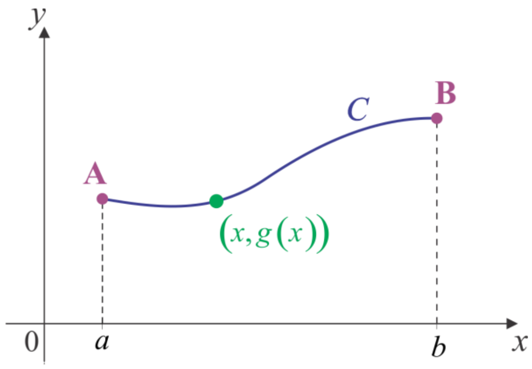
Nesta seção iremos introduzir o conceito de integração ao longo de uma curva *C*. Essa integral é denominada de **integral de linha**, muito embora o nome "**integral de curva**" pudesse ser mais adequado. Vamos aprender a trabalhar com integrais de linha de uma função de duas variáveis e de um campo vetorial no plano. O raciocínio desenvolvido aqui é análogo para funções de três variáveis e campos vetoriais no espaço.

Vamos iniciar nosso estudo com as integrais de linha de uma função de duas variáveis. Denominamos de **integral de linha escalar**, a integral de uma função $f(x,y)$ ao longo de uma curva C e a denotamos por $\int_C f(x,y)\,ds$, onde ds é uma quantidade infinitesimal (muito pequena) da curva C. A curva C é chamada o **caminho da integração**.

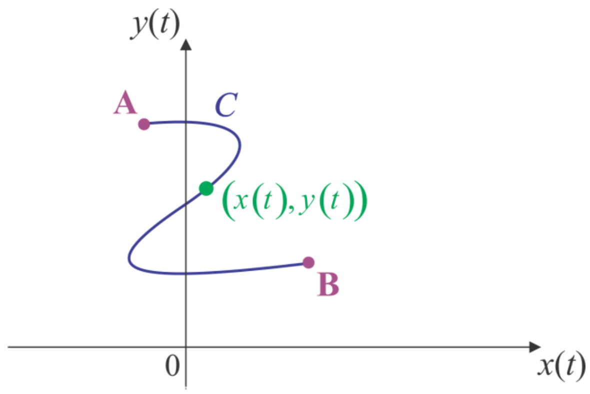
Vamos entender melhor o conceito de integral de linha. Iremos utilizar a notação $P(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, para denotar um caminho (uma curva) no plano cartesiano $\mathbf{R}^2$. Podemos pensar em $P(t)$ como sendo um ponto (em movimento), como função do tempo t, descrevendo uma curva C no plano, para $a \le t \le b$.



Para calcular uma integral de linha, é necessário conhecer a equação da curva C, a qual pode ser dada na forma cartesiana ou paramétrica. A forma cartesiana é mais utilizada, quando a curva C é o gráfico de uma função $y=g(x)$. Já a forma paramétrica, abrange o caso geral, tanto para gráficos de função ou não.



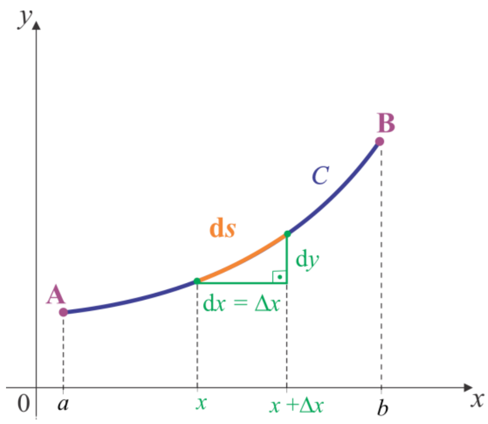
$y = g(x) \quad , \quad a \le x \le b$



$$t_a \le t \le t_b \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \big(x(t_a),y(t_a)\big) = \text{A} \\ \big(x(t_b),y(t_b)\big) = \text{B} \end{cases}$$

Em ambos os casos, uma *integral de linha escalar*, $\int_C f(x,y)\,ds$, pode ser transformada em uma integral simples de uma função de uma variável. Para isso, basta restringirmos os valores de $f(x,y)$ aos pontos da curva *C*, e encontrarmos uma expressão adequada para *ds*.

Para acharmos *ds* devemos observar que, sendo *ds* uma quantidade infinitesimal (muito pequena) do comprimento da curva *C*, podemos supor que ela é a hipotenusa do triângulo retângulo, cujos catetos são *dx* e *dy* (ver figura).



Observe que consideramos o tamanho de ***ds*** bem maior do que seria considerado, na figura, apenas para que possamos visualizá-lo melhor.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, obtemos:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Aqui, temos dois casos a considerar:

<u>1º Caso</u>: A curva *C* é o gráfico de uma função $y = g(x)$.

Nesse caso, temos que:

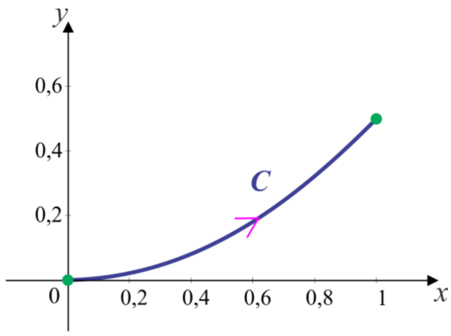
$$\begin{aligned} y = f(x) \;&\Rightarrow\; dy = f\,'(x)\,dx \\ &\Rightarrow\; ds = \sqrt{(dx)^2 + [f\,'(x)]^2\,(dx)^2} = \sqrt{\left\{1 + \left[f\,'(x)\right]^2\right\}(dx)^2} \\ &\Rightarrow\; ds = \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\;dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + \left[g\,'(x)\right]^2}\,dx.$$

EXEMPLO ■ Calcule a integral $\int_C xy\,ds$ sobre a curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Solução



Escreva a função $f(x,y)=xy$ restrita à curva *C:*

$$f(x,y)=xy \quad\Rightarrow\quad f\left(x,\frac{x^2}{2}\right)=x\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{3}$$

Considerando *C* como o gráfico de $g(x)=\frac{x^2}{2}$, encontre $g'(x)$:

$$g(x)=\frac{x^2}{2} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=x$$

Encontre *ds:*

$$ds=\sqrt{1+\left[g'(x)\right]^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx$$

Substitua os itens encontrados na integral $\int_C xy\,ds$:

$$\int_C xy\,ds=\int_0^1\frac{x^3}{2}\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Calcule a integral obtida:

$$\int_C xy\,ds=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,xdx=$$

$$u^2=1+x^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2=u^2-1 \\ 2u\,du=2x\,dx \Rightarrow u\,du=x\,dx \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(u^2-1\right)u\,udu=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(u^4-u^2\right)du=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)=$$

$$=\left[\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{10}-\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2^5}}{10}-\frac{\sqrt{2^3}}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}=\frac{1+\sqrt{2}}{15}.$$

<u>2º Caso</u>: A curva *C* é dada na forma paramétrica.

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} dx=x'(t)\,dt \\ dy=y'(t)\,dt \end{cases};\quad t_a\le t\le t_b$$

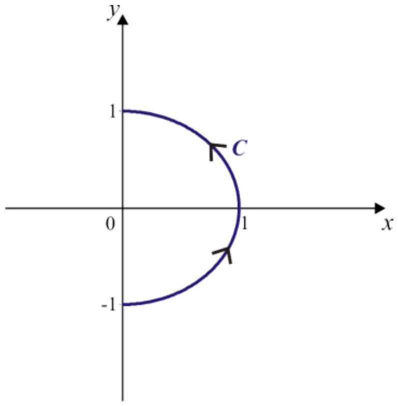
$$\Rightarrow\ ds=\sqrt{[x'(t)]^2(dt)^2+[y'(t)]^2(dt)^2}$$
$$=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\ dt$$

Portanto,

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t_a}^{t_b} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)^2\right]}\,dt$$

EXEMPLO Calcule a integral $\int_C \left(2+x^2y\right)ds$, onde C é a parte da circunferência unitária $x^2+y^2=1\,(x\geq 0)$, percorrida no sentido anti-horário.

Solução



A curva C pode ser representada pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\text{sen}\, t \end{cases} \quad ; \quad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq \frac{\pi}{2}$$

Assim,

$$f\big(x(t),y(t)\big)=2+\cos^2 t\,\text{sen}\, t$$

$$ds=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt=\sqrt{(-\text{sen} t)^2+(\cos t)^2}\,dt=1\,dt.$$

Portanto,

$$\int_C \left(2+x^2y\right)ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\cos^2 t\ sent\right)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ sent$$

$$=2t\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi+\pi-0+0=2\pi.$$

$$\int \cos^2 t\ \text{sen} t\ dt=-\int u^2 du=$$
$$=-\frac{u^3}{3}=-\frac{\cos^3 t}{3}$$

O Cálculo de integrais de funções, sobre curvas no espaço, é feito de modo totalmente análogo às curvas planas, lembrando que as curvas no espaço são mais facilmente descritas por equações paramétricas.

EXEMPLO Calcule $\int_C \left(x^2+y^2-z\right)ds$, onde C é a hélice circular dada através das equações paramétricas por:

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\text{sen}\, t \\ z(t)=t \end{cases}$$

do ponto $P(1,0,0)$ até o ponto $Q(1,0,2\pi)$.

Solução

A função $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$, restrita à curva C, é dada por:

$$F(t)=f\big(x(t),y(t),z(t)\big)=\cos^2 t+sen^2 t-t\text{ , ou seja, } F(t)=1-t.$$

Por outro lado, temos que:

$$ds = \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{(-sent)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{\underbrace{sen^2 t + \cos^2 t}_{1} + 1} = \sqrt{2}$$

Ainda, observe que do ponto P ao ponto Q, t varia de 0 a 2π.

Portanto,

$$\int_C \left(x^2 + y^2 - z\right) ds = \int_0^{2\pi} (1-t)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1-t)\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{2}\left[2\pi - \frac{(2\pi)^2}{2}\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi(1-\pi).$$

A integral de linha escalar pode ser utilizada para calcular a massa de um bastão de comprimento ℓ, por exemplo, desde que a função densidade linear (*massa por unidade de comprimento*) seja conhecida.

Para fazer isso, inicialmente dividimos o bastão em quantidades pequenas e consideramos Δm a quantidade de massa contida no segmento de x até $x + \Delta x$ de maneira que $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ é a massa por unidade de comprimento no segmento.

Se a massa está distribuída uniformemente então, $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ é independente da escolha do segmento e é denominada de ***densidade do corpo*** (ou mais corretamente, ***densidade de massa linear***) e indicada por ρ, ou seja, $\dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \rho$ é constante em todo o comprimento do bastão. A massa total do bastão é então $\boldsymbol{M = \rho\,\ell}$.

Se a massa do bastão não estiver distribuída uniformemente, então $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ é a *densidade média* no segmento de x até $x + \Delta x$, e seu valor depende da posição do segmento e de seu comprimento.

Definimos então,

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

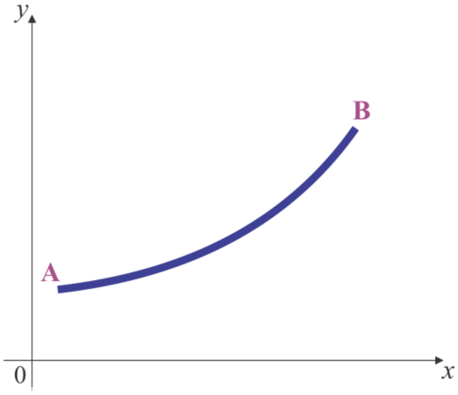
como sendo a densidade em qualquer ponto x do bastão, onde a quantidade diferencial $dm = \rho(x)\,dx$ é a massa de uma porção dx do comprimento do bastão em x.

A massa total do corpo é então, a soma das pequenas porções de massa do bastão, ou seja,

$$M = \int dm = \int_0^{\ell} \rho(x)\,dx\,.$$

Esta integral é interpretada como sendo a área abaixo da curva ρ (x) com x variando de 0 até ℓ. Uma interpretação alternativa é obtida, considerando a função densidade ρ (x) como uma propriedade associada com os pontos x de uma reta (o eixo x).

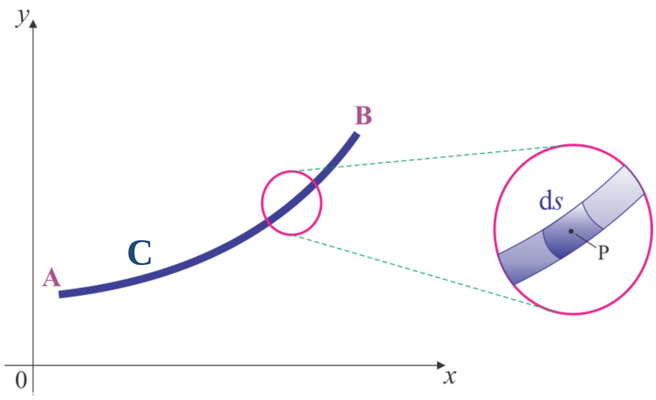
Consideremos agora, um bastão curvado **AB** (por exemplo) de um material qualquer (ver ilustração abaixo).



Nosso objetivo é, uma vez mais, calcular a massa total desse bastão, utilizando uma integral de linha. Para isso, consideremos $f(x,y)$ como sendo a densidade de massa do bastão (dada em unidades de massa por unidade de comprimento) e ds uma quantidade infinitesimal (muito pequena) do bastão. Então,

$$dm = f(x,y)\,ds$$

é a quantidade de massa dessa porção - onde $f(x,y)$ representa a densidade linear em cada ponto P da curva C que representa o bastão no plano cartesiano.



Assim, a massa total do bastão é dada por:

$$M = \int_C dm = \int_C f(x,y)\,ds\,.$$

EXEMPLO Calcule a massa total de um arame no formato de uma parábola $y = x^2$ ao longo de $1 \le x \le 4$. Considere a densidade de massa dada por $\rho(x,y) = \dfrac{y}{x}$ em unidades de grama por centímetro.

Solução

A massa total é definida por: $M = \int_C \rho(x,y)\,ds.$

Passo 1: Escreva a função $\rho(x,y) = \dfrac{y}{x}$ restrita à curva *C*, que é dada pela parábola $y = g(x) = x^2$.

$$\rho(x,y) = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} = x \;(x \neq 0)$$

Passo 2: Encontre d*s*:

$$ds = \sqrt{1+\left[g'(x)\right]^2}\,dx = \sqrt{1+(2x)^2} = \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

Passo 3: Substitua os itens encontrados, na integral $M = \int_C \rho(x,y)\,ds$:

$$M = \int_C \rho(x,y)\,ds = \int_1^4 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_{u=5}^{u=65} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{12}u^{\frac{3}{2}}\Big|_5^{65} = \frac{1}{12}\left[65^{3/2} - 5^{3/2}\right] \approx 42{,}7$$

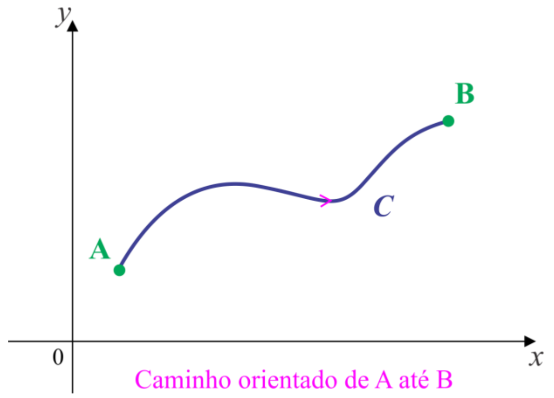
Portanto, a massa total do arame é, aproximadamente, 42,7 g.

Agora, iremos discutir a integral de linha de um campo vetorial $\vec{F}(x,y)$ ao longo de uma curva *C*, denotada por

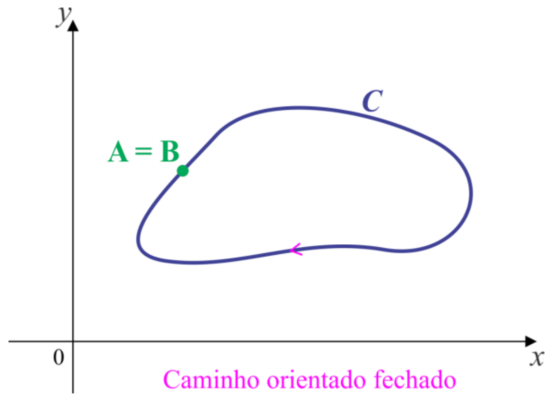
$$\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$$

onde $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ e $d\,\vec{s} = dx\vec{i} + dy\,\vec{j}$.

Antes, porém, é necessário observar que existe uma diferença importante entre uma integral de linha escalar e uma integral de linha vetorial: para determinar uma integral de linha vetorial, devemos primeiramente escolher um sentido de percurso ao longo da curva *C*. Isso é necessário porque as grandezas físicas, obtidas por este procedimento, ficam afetadas de um sinal algébrico.

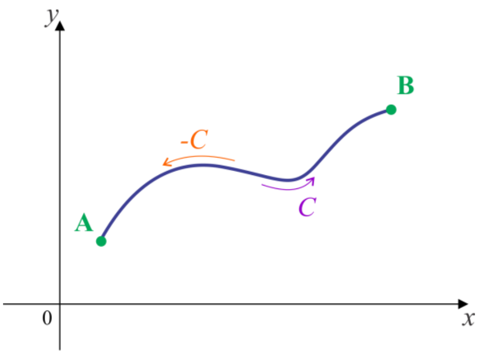


Caminho orientado de A até B



Caminho orientado fechado

Observe que, podemos percorrer uma curva C em um de dois sentidos. Ou seja, em cada curva existem duas orientações possíveis correspondendo aos dois sentidos de percurso. Quando escolhemos um desses sentidos de percurso, dizemos que a curva C está **orientada** e este é considerado o **sentido positivo de percurso** ao longo da curva. Escrevemos então, $-C$ para denotar a curva C com a orientação oposta.



Assim,

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$$

Vejamos então como calcular uma integral de linha vetorial dada por:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_{C} \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy \right]$$

onde C é definida como o gráfico de uma função $y = g(x)$ de $x = a$ até $x = b$.

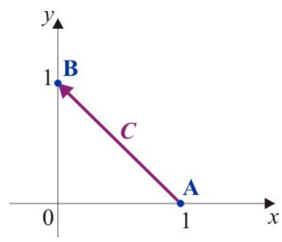
Nesse caso, primeiramente devemos escrever o integrando em função de x. Para isso, substituímos y por $g(x)$ e dy por $g'(x)dx$ na integral $\int_{C} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_{C} \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy \right]$, obtendo assim:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_{C} \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy \right] = \int_{a}^{b} \left[M(x,g(x))dx + N(x,g(x))g'(x)dx \right]$$

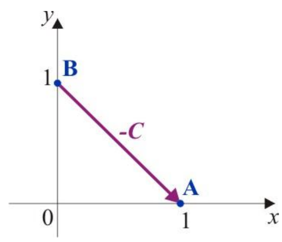
Agora, é só calcular a integral definida obtida, utilizando um método de integração adequado.

EXEMPLO 1

(a) Ache o valor da integral de linha vetorial sobre o caminho C (ver figura) para $M(x,y) = -y$ e $N(x,y) = xy$ quando o caminho C vai de A até B.



(b) Ache o valor da integral sobre o caminho C (ver figura) para $M(x,y) = -y$ e $N(x,y) = xy$, quando o caminho C vai de B até A.



Solução

(a) Considerando $y = 1 - x$ (equação da reta que vai de A até B) a função que define o caminho C, com $1 \le x \le 0$, temos que $dy = -dx$ e, portanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\,\vec{s} = \int_C \left[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\right] = \int_1^0 \left[-(1-x)\,dx + x(1-x)(-dx)\right] =$$
$$= \int_1^0 \left[-1+\cancel{x}-\cancel{x}+x^2\right]dx = \int_1^0 \left[-1+x^2\right]dx = \int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = \frac{2}{3}.$$

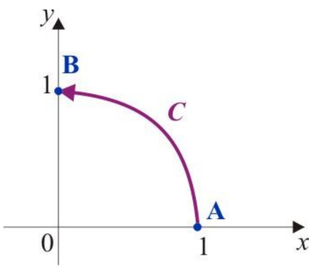
(b) Considerando $y = 1-x$ (equação da reta) com $0 \le x \le 1$, temos que $dy = -dx$ e, portanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\,\vec{s} = \int_C \left[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\right] = \int_0^1 \left[-(1-x)\,dx + x(1-x)(-dx)\right] =$$
$$= \int_0^1 \left[-1+\cancel{x}-\cancel{x}+x^2\right]dx = \int_0^1 \left[x^2-1\right]dx = -\frac{2}{3}.$$

Observe que no exemplo 1, invertendo a orientação da curva *C*, o sinal da integral de linha mudou. Se *C* for uma curva lisa orientada, denotamos por –*C* a curva orientada que consiste dos mesmos pontos de *C*, mas com orientação contrária.

De uma maneira geral, o valor de uma integral de linha depende do caminho de integração, como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 2 ■ Ache o valor da integral de linha vetorial sobre o caminho *C* (ver figura) para $M(x,y) = -y$ e $N(x,y) = xy$ de A até B.



Solução

A equação do arco circular é dada por: $y = +\sqrt{1-x^2}$ com *x* variando de 1 até 0.

$$\Rightarrow\ dy = -\frac{x}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y}}dx \qquad \Rightarrow \qquad dy = -\frac{x}{y}dx$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\,\vec{s} = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_C -y\,dx + xy\,dy =$$
$$= \int_1^0 \left[-\sqrt{1-x^2} - x^2\right]dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.$$

Note que, apesar das funções *M*(*x*,*y*) e *N*(*x*,*y*) serem as mesmas do exemplo 1, o resultado obtido para a integral de linha foi diferente. Isto se deve ao fato de, neste caso, o caminho de integração é diferente do caminho utilizado no exemplo 1.

EXEMPLO 3 ■ Calcule a integral do exemplo 2, agora utilizando equações paramétricas para a curva *C*.

Solução

As equações paramétricas para a curva C são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t\, dt \\ dy = \cos t\, dt \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_C -y\,dx + xy\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\,dt + (\cos t)(\operatorname{sen} t)(\cos t)\,dt \right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen} t \right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.$$

OBS:

Observe que o resultado obtido no exemplo 3 foi o mesmo do exemplo 2, o que já era esperado, pois tomamos a mesma curva e apenas mudamos o modo de representá-la matematicamente. Portanto, lembre-se que:

→ O valor da integral de uma função ou uma forma diferenciável, sobre uma curva C, **<u>será sempre o mesmo</u>**, independentemente da expressão matemática que utilizamos para representá-la (forma cartesiana ou paramétrica).

→ O valor da integral de uma função ou uma forma diferenciável, sobre uma curva C, **<u>poderá ser diferente</u>** sobre caminhos (curvas) diferentes.

Se uma curva C é formada pela união disjunta de n curvas C_1, ... , C_n, ou seja,

$$C = C_1 + C_2 + \ldots C_n$$

então, a integral de linha ao longo de C é igual a uma soma de integrais de linha dada por:

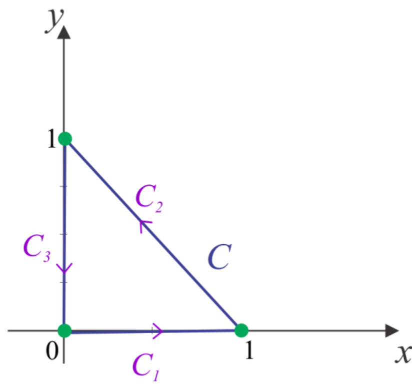
$$\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\,\vec{s} + \ldots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$$

EXEMPLO 4 ■ Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$, onde $\vec{F}(x,y) = x^4\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ e C é o triângulo ligando os pontos (0,0), (1,0) e (0,1) orientado no sentido anti-horário.

Solução

Observe que:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$



e, portanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$C_1 \begin{cases} y = 0 \text{ (} y \text{ constante)} \Rightarrow dy = 0 \\ x \text{ varia}, \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} y = 1 - x \Rightarrow dy = -dx \\ x \text{ variando de 1 até 0} \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} x = 0 \text{ (} x \text{ constante)} \Rightarrow dx = 0 \\ y \text{ variando de 1 até 0} \end{cases}$$

Temos então que:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_C x^4dx + xy\,dy = \int_{C_1} x^4dx + xy\,dy + \int_{C_2} x^4dx + xy\,dy + \int_{C_3} x^4dx + xy\,dy =$$

$$= \int_0^1 x^4dx + \int_1^0 x^4dx + x(1-x)(-dx) = \int_0^1 x^4dx - \underbrace{\int_1^0 \left[x^4 + x - x^2\right]dx}_{-\int_0^1 \left[x^4+x-x^2\right]dx} =$$

$$= \int_0^1 x^4dx + \int_0^1 \left[x^4 + x - x^2\right]dx = \int_0^1 \left[2x^4 + x - x^2\right]dx = \left[\frac{2x^5}{5} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30}.$$

Existem alguns tipos de integrais de linha, ao longo de uma curva C (***caminho de integração***), cujo valor depende apenas dos pontos extremos da curva e não da própria curva. Neste caso, dizemos que a *integral de linha independe do caminho de integração C.*

Dizemos que o valor de uma integral de linha

$$I = \int_C \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy\right]$$

é *independente do caminho*, entre dois pontos fixos, se a quantidade

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

for uma *diferencial exata*, ou seja, se existir uma função $z = f(x,y)$ tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy.$$

Lembre-se que a condição para uma diferencial em duas variáveis ser exata é que as funções M e N satisfaçam a seguinte igualdade:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

(***Relação de reciprocidade de Euler***)

EXEMPLO 5

(a) Verifique se a diferencial $dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$ é exata.

(b) Ache o valor da integral de linha $\int_C dz$ onde C é o segmento de reta que vai de (0,0) a (2,2).

(c) Calcule o valor da integral de linha $\int_C dz$ onde C é o caminho dado pela curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ que vai de (0,0) a (2,2).

Solução

(a) Considerando $M(x,y) = ye^{xy}$ e $N(x,y) = xe^{xy}$, para verificar se a diferencial dz é exata, basta verificar se

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$$

Calculando as derivadas parciais obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_x = 1e^{xy} + ye^{xy}x = e^{xy}(1+xy) \\ \left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_y = 1e^{xy} + xe^{xy}y = e^{xy}(1+xy) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_y$$

e, portanto, a diferencial dz é exata.

(b)

$$\int_C dz = \int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = \int_0^2 xe^{x^2}dx + xe^{x^2}dx =$$

$C: \ y = x \ \Rightarrow \ dy = dx$

$0 \le x \le 2$

$$= 2\int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{2}{2}\int_0^4 e^u du = e^4 - 1.$$

$u = x^2 \ \Rightarrow \ du = 2xdx$

$\Rightarrow \ xdx = \dfrac{du}{2}$

(c)

$$\int_C dz = \int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = \int_0^2 \frac{x^2}{2}e^{\frac{x^3}{2}}dx + x^2e^{\frac{x^3}{2}}dx =$$

$C: \ y = \dfrac{x^2}{2} \ \Rightarrow \ dy = xdx$

$0 \le x \le 2$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x^2e^{\frac{x^3}{2}}dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^4 e^u du = e^4 - 1.$$

$u = \dfrac{x^3}{2} \ \Rightarrow \ du = \dfrac{3}{2}x^2dx$

$\Rightarrow x^2dx = \dfrac{2}{3}du$

OBS:

Observe que no exemplo 3, como a diferencial é exata o valor da integral independe do caminho que vai do ponto (0,0) ao ponto (2,2). Assim, quando for calcular uma integral de linha $\int_C dz$, verifique primeiramente se a diferencial é exata. Se a diferencial for exata, você poderá escolher qualquer "curva" para representar o caminho *C*. Nesse caso, a escolha mais adequada, para o caminho *C*, seria uma reta.

EXERCÍCIOS 6.7

1. Calcule a integral de linha $\int_C \left[xy\,dx + x^2 dy\right]$ se:

a) *C* consiste do segmento de reta que vai de (2,1) a (4,1) mais o segmento de reta que vai de (4,1) a (4,5);

b) *C* é o segmento de reta de (2,1) a (4,5);

c) As equações paramétricas de *C* são:

$$x = 3t - 1 \ ; \ y = 3t^2 - 2t, \ 1 \le t \le \frac{5}{3}.$$

2. Calcule a integral de linha ao longo do caminho C.

a) $\int_C \left[6x^2 y\,dx + xy\,dy\right]$ onde *C* é o gráfico de $y = x^3 + 1$ de $(-1,0)$ a $(1,2)$.

b) $\int_C \left[y\,dx + (x+y)\,dy\right]$ onde *C* é o gráfico de $y = x^2 + 2x$ de (0,0) a (2,8).

c) $\int_C \left[(x-y)\,dx + x\,dy\right]$ onde *C* é o gráfico de $y^2 = x$ de $(4,-2)$ a (4,2).

3. Verifique se as diferenciais dadas são exatas.

a) $dz = (4x+3y)dx + (3x+8y)dy$

b) $dz = y\cos x\,dx + \operatorname{sen} x\,dy$

4. Calcule a integral de linha $\int_C \left[xy\,dx + 2y\,dy\right]$ de $x = 0$ até $x = 2$ sobre a reta $y = 2x$ e, em seguida, avalie a mesma integral de linha ao longo da curva $y = x^2$.

5. Calcule a integral de $f(x,y) = x^2 - y^2$ ao longo da reta $y = 2x$ de $x = 0$ até $x = 1$.

6. Mostre que:

$$dz = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy,$$

para $F(x,y) = 9x^2 + 4y^2 + 4xy$ e $G(x,y) = 8xy + 2x^2 + 3y^2$, é uma diferencial exata. Escolhendo um caminho apropriado, calcule a integral $\int_C \left[F\,dx + G\,dy\right]$ de (0,0) a (1,2).