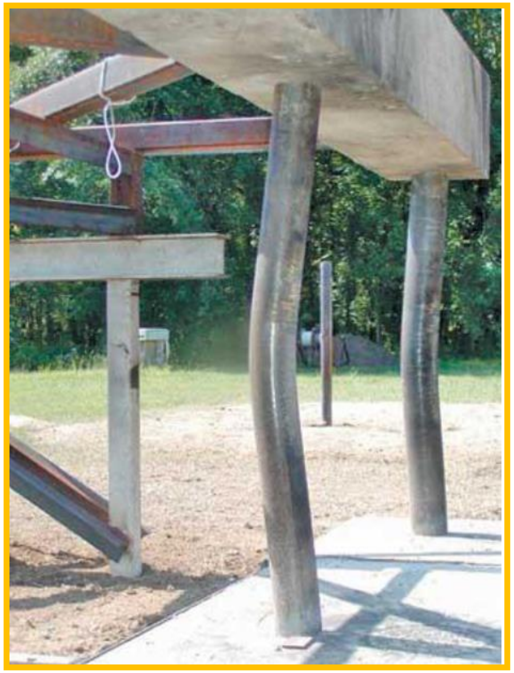
LOM 3101 - Mecânica dos Materiais

DEMAR – EEL – USP

Professor :   Carlos A.R.P. Baptista

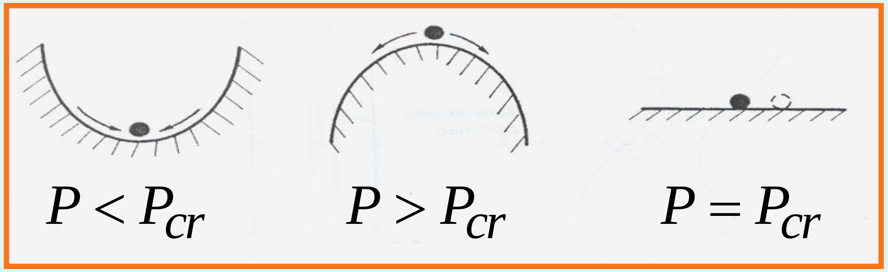
3. ESTABILIDADE DE BARRAS SOB COMPRESSÃO



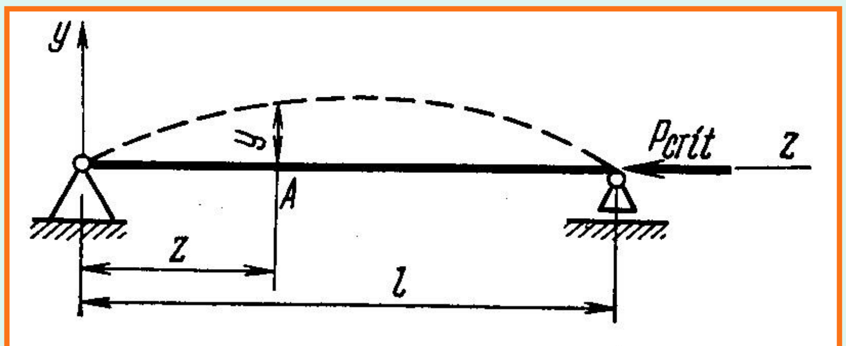
Elementos estruturais esbeltos submetidos à compressão podem apresentar deflexão lateral se a carga aplicada for suficientemente alta.

Introdução à Teoria da Flambagem:

- **Formas de equilíbrio**



- **Barra sujeita à compressão**



Equilíbrio $\rightarrow$ Seccionar num ponto arbitrário:

$$M = -Py$$

Equação da Linha Elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Definimos uma variável α:

$$\frac{P}{EI} = \alpha^2$$

Equação da Elástica fica da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$$

(equação diferencial linear de 2ª ordem coef. constantes)

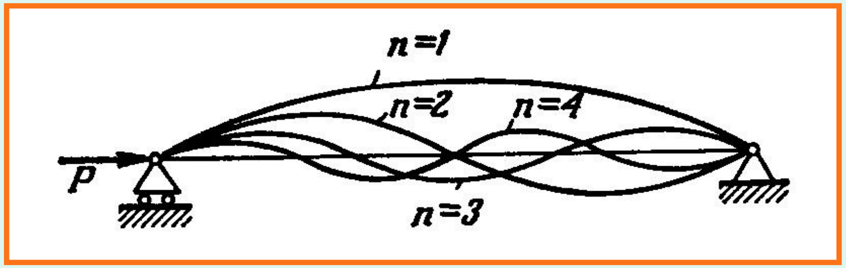
- *Solução Geral da Equação:* $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$
- *Condições de Contorno:*

1) $x = 0 \rightarrow y = 0$
2) $x = L \rightarrow y = 0$

– *Determinação das Constantes:*

1) $A = 0$

2) $B\sin\alpha L = 0 \Rightarrow \quad \sin\alpha L = 0$



✓ *Determinamos α:*

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

✓ *Voltando à definição de α:*

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{L}$$

✓ *Infinidade de valores da carga crítica:*

$$P = \frac{\pi^2 IE}{L^2} n^2$$

✓ *Somente o menor P tem significado:*

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Barra com Seção Qualquer:

- ✓ ***A flambagem ocorre no eixo de menor momento de inércia***

$$\boxed{P = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L^2}}$$

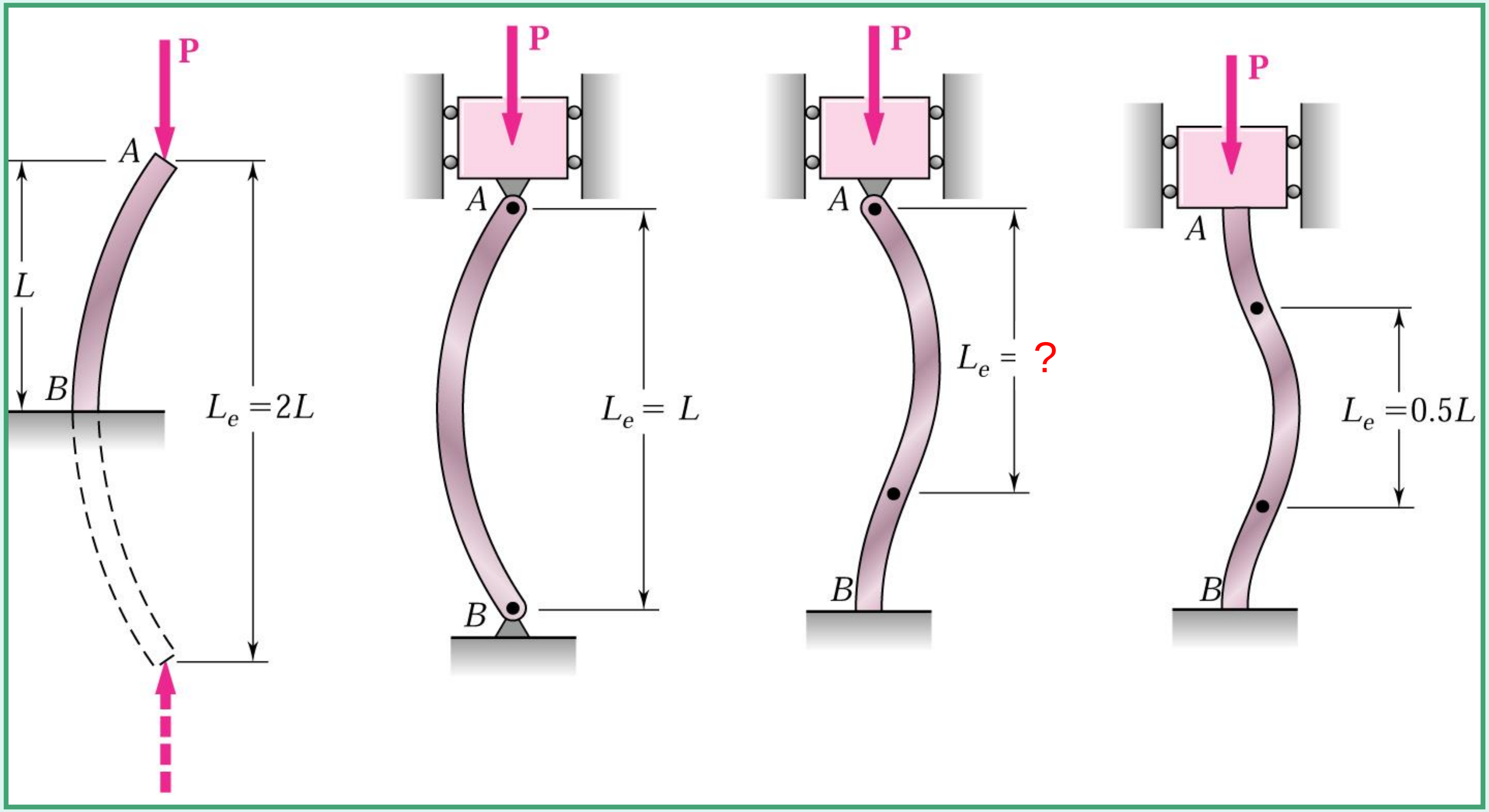
Efeito das Condições de Extremidade:

✓***Definimos o Comprimento Efetivo*** $\boxed{L_e = \mu \cdot L}$

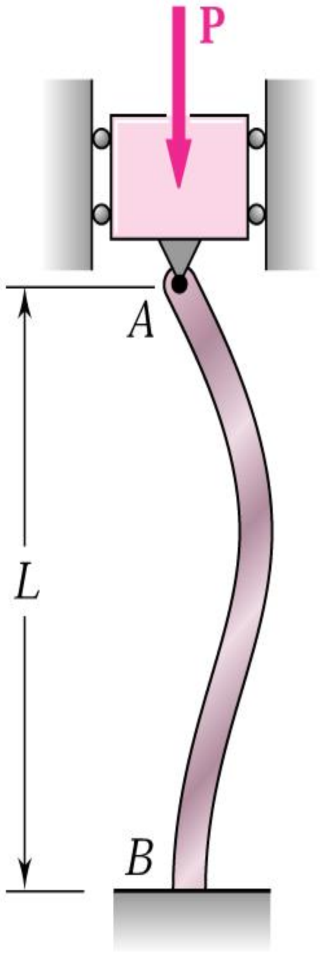
onde μ é o coeficiente de redução de comprimento

Ficamos com: $$\boxed{P = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu L)^2}}$$

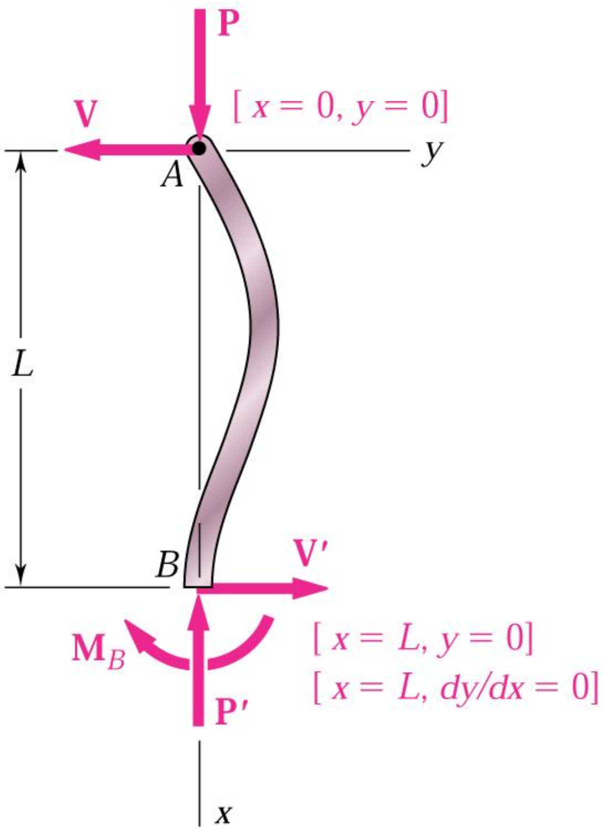
Efeito das Condições de Extremidade:

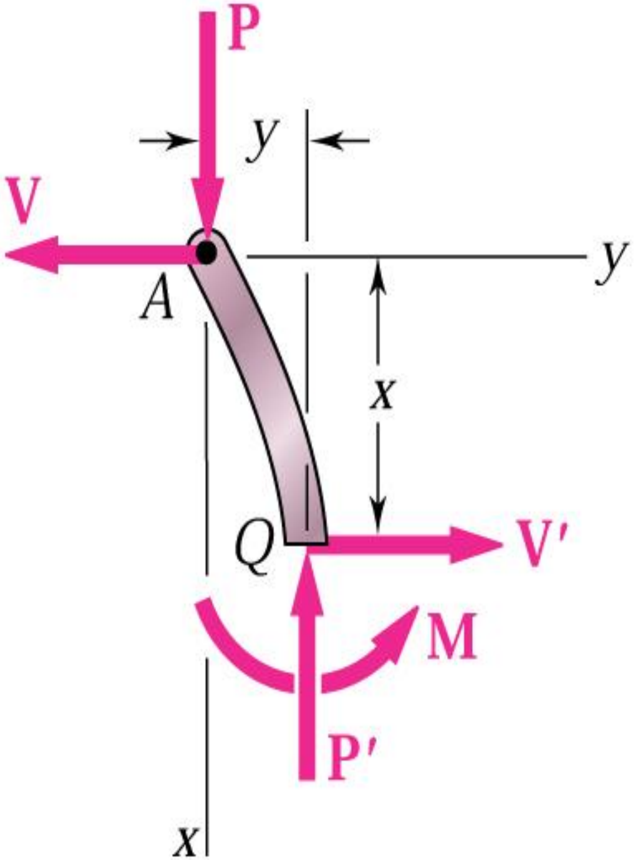


Extremidades Engastada e Articulada:



Condições de Contorno:





$$M = -Py - Vx$$

Equação Diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py + Vx}{EI} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = \frac{-Vx}{EI}$$

Fazendo: $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{-Vx}{EI}$$

Para resolver a equação, combina-se a solução geral com uma solução particular:

$$y_g = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Fazendo: $y_p = Cx + D$

Então: $\dfrac{d^2 y_p}{dx^2} = 0$ $\quad \alpha^2 (Cx + D) = \dfrac{-Vx}{EI}$ $\quad \dfrac{P}{EI}(Cx + D) = \dfrac{-Vx}{EI}$

De onde se obtém: $D = 0$ $\quad C = \dfrac{-V}{P}$ $\quad y_p = \dfrac{-Vx}{P}$

E ficamos com: $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - \dfrac{Vx}{P}$

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - \frac{Vx}{P}$$

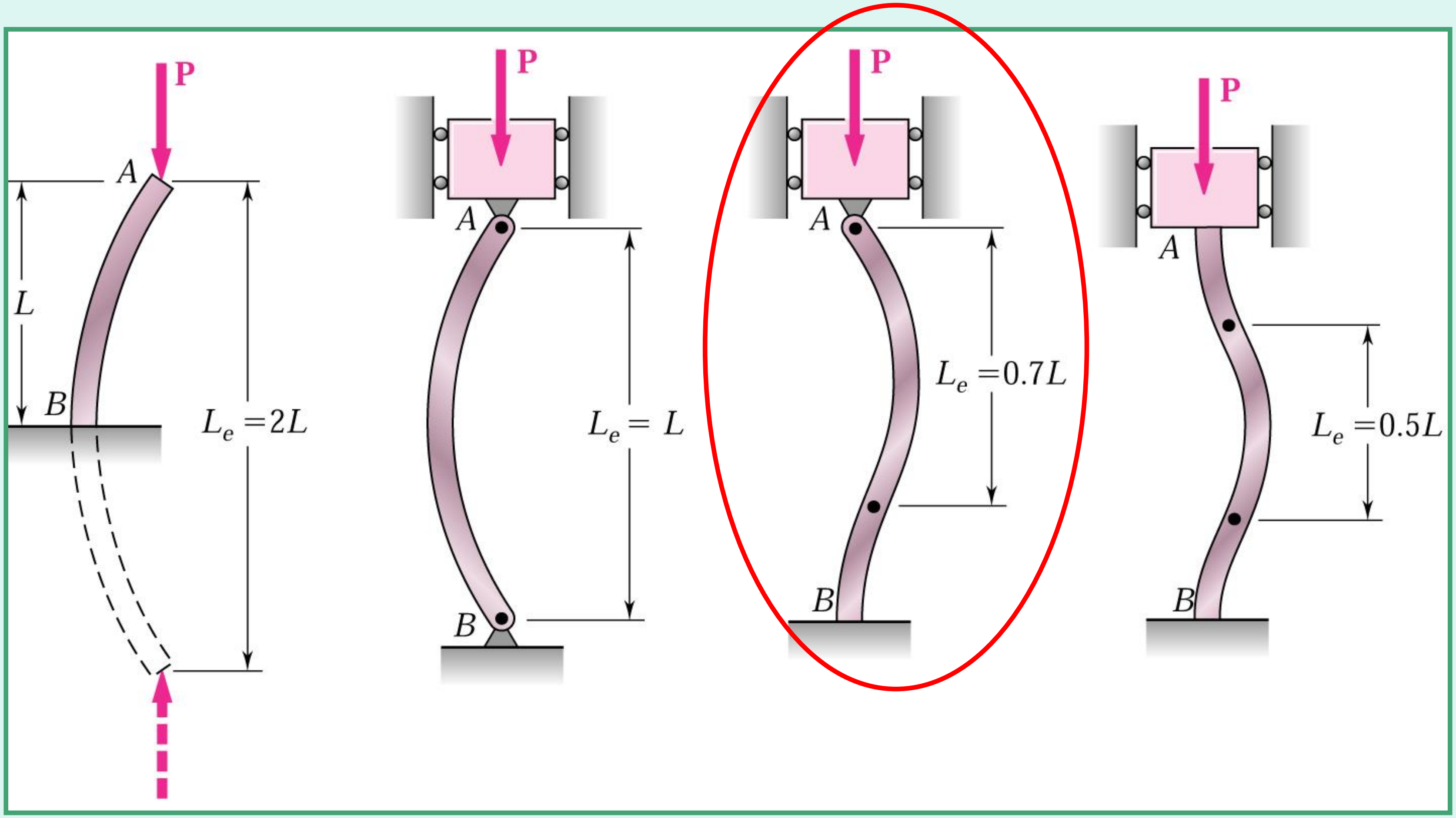
Empregando-se as condições de contorno, chegamos a: $P_{cr} = \dfrac{20{,}19EI}{L^2}$

Lembrando que para a barra biarticulada havíamos obtido: $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

Podemos escrever para a barra em questão: $P_{cr} = \dfrac{20{,}19EI}{L^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{L_e^2}$

De onde finalmente obtemos: $L_e \cong 0{,}7L$

Efeito das Condições de Extremidade:



- ✓ ***Tensão Crítica (fórmula de Euler):***

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu L)^2 A}$$

- ✓ ***Definição do Raio de Giração mínimo:***

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

- ✓ ***Reescrevemos a Tensão Crítica:***

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu L}{r_{\min}}\right)^2}$$

- ✓ ***A influência dos apoios e dimensões da barra será caracterizada pela esbeltez λ:***

$$\boxed{\lambda = \frac{\mu L}{r_{\min}}}$$

- ✓ ***Validade da fórmula de Euler $\rightarrow$ determinada pela equação da elástica (tensões menores que a tensão de escoamento em compressão):***

$$\boxed{\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

válido para:

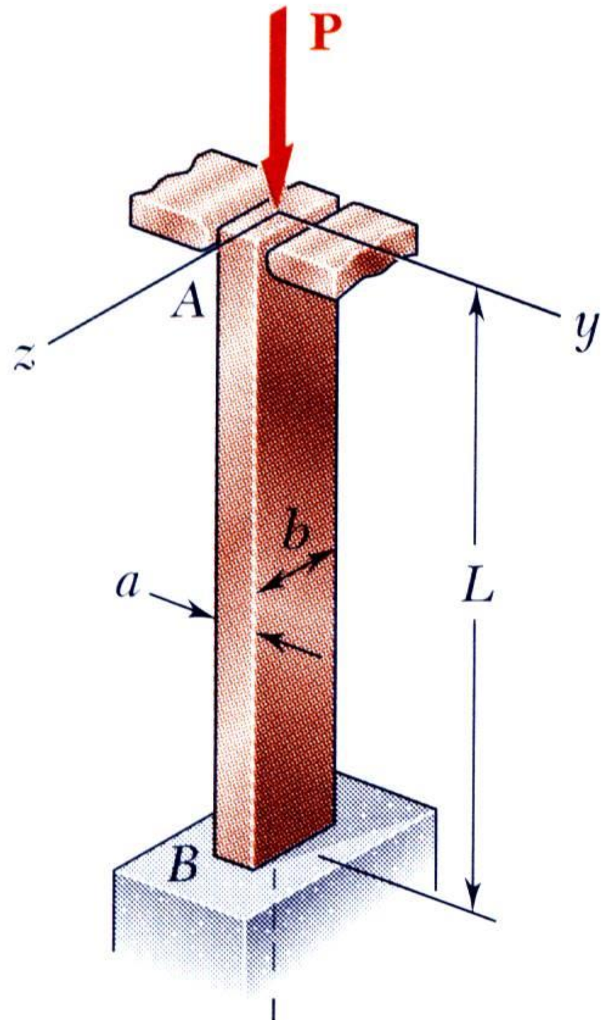
$$\boxed{\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}}}$$

(Obs.: Quando λ é pequeno, a barra sofre escoamento antes de flambar)

Exemplo de Aplicação:

Na extremidade A da coluna existem duas placas lisas de cantos arredondados que impedem essa extremidade de se movimentar em um dos planos verticais de simetria da coluna, mas não impedem movimentos na direção do outro plano.

Pede-se: Determinar a relação a/b entre os lados da seção transversal que corresponde à solução do projeto mais eficiente para a coluna.



Exercício:

Seja uma coluna circular vazada com diâmetro interno de 20 mm e diâmetro externo de 40 mm, com altura de 5 m, com extremidade inferior engastada e extremidade superior fixada por articulação. Sabendo que o material tem módulo de Young E = 200 GPa e limite de escoamento LE = 250 MPa, pede-se:

a) Calcule a tensão crítica de flambagem no regime elástico;

b) Determine a maior altura que esta coluna poderia ter, de modo a não sofrer flambagem elástica.

Solução:

a)

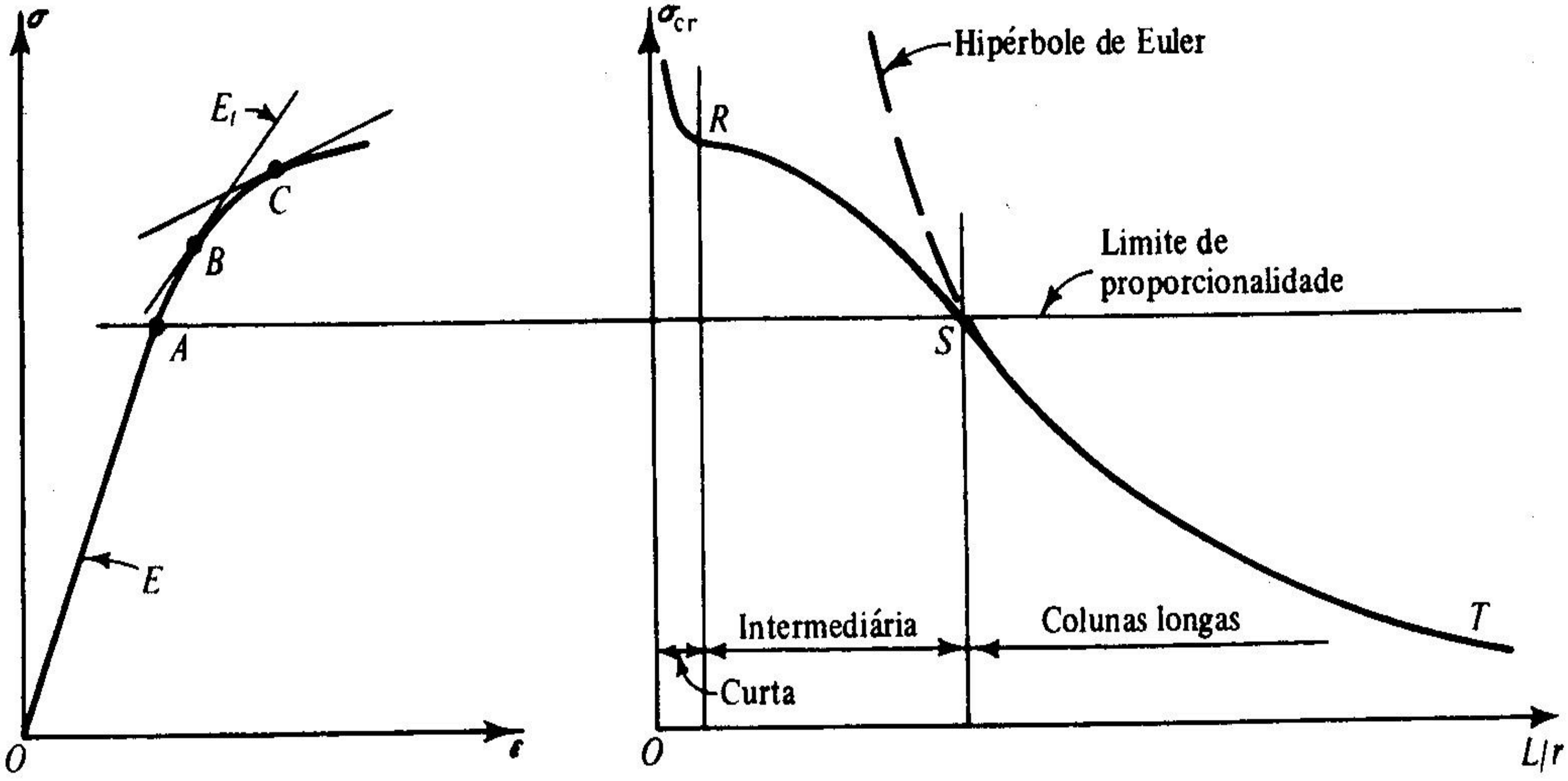
$$\boxed{\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \quad \boxed{\lambda = \frac{\mu L}{r_{\min}}} \quad \boxed{r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}}$$

b)

$$\boxed{\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}}}$$

(validade de fórmula de Euler)

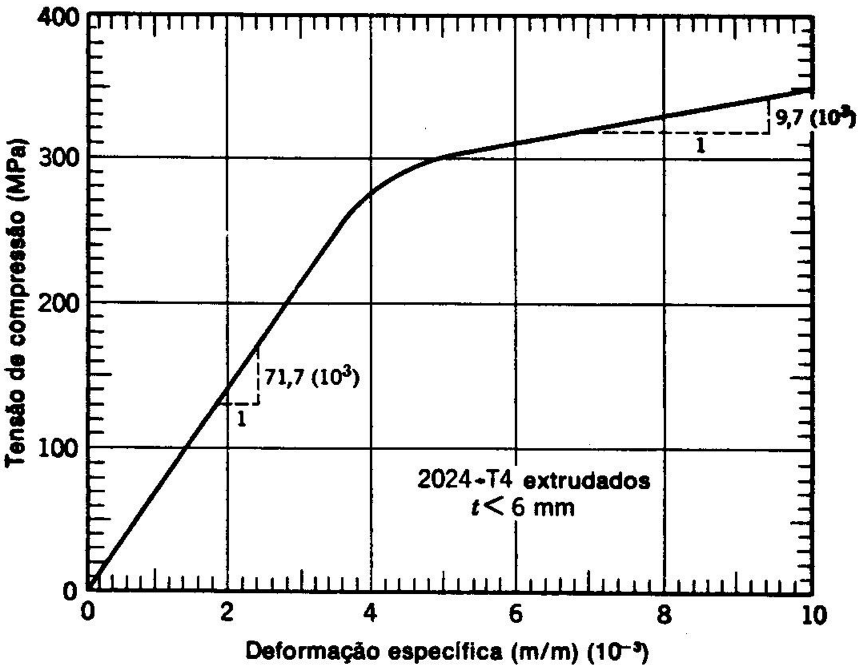
Flambagem no Regime Plástico:



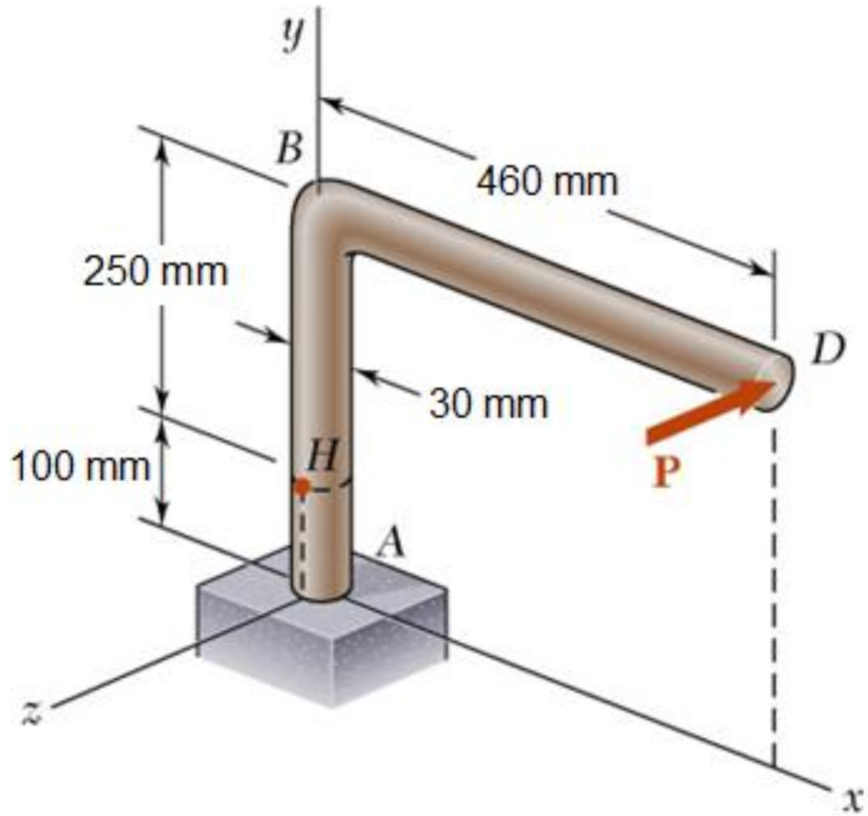
Teoria do módulo tangente para flambagem inelástica

Exercício:

Uma estrutura comprimida é fabricada com um tubo de liga de alumínio 2024, tendo diâmetro externo de 30 mm, espessura de parede 2,0 mm e comprimento de 250 mm. As condições de extremidade reduzem o comprimento efetivo para 170 mm. A área da seção transversal do tubo é de 175,9 mm^2 e o raio de giração vale 9,925 mm. O material tem o diagrama tensão-deformação em compressão mostrado na figura abaixo. Determine a carga axial de flambagem.



4. TENSÕES SOB CARREGAMENTOS COMBINADOS

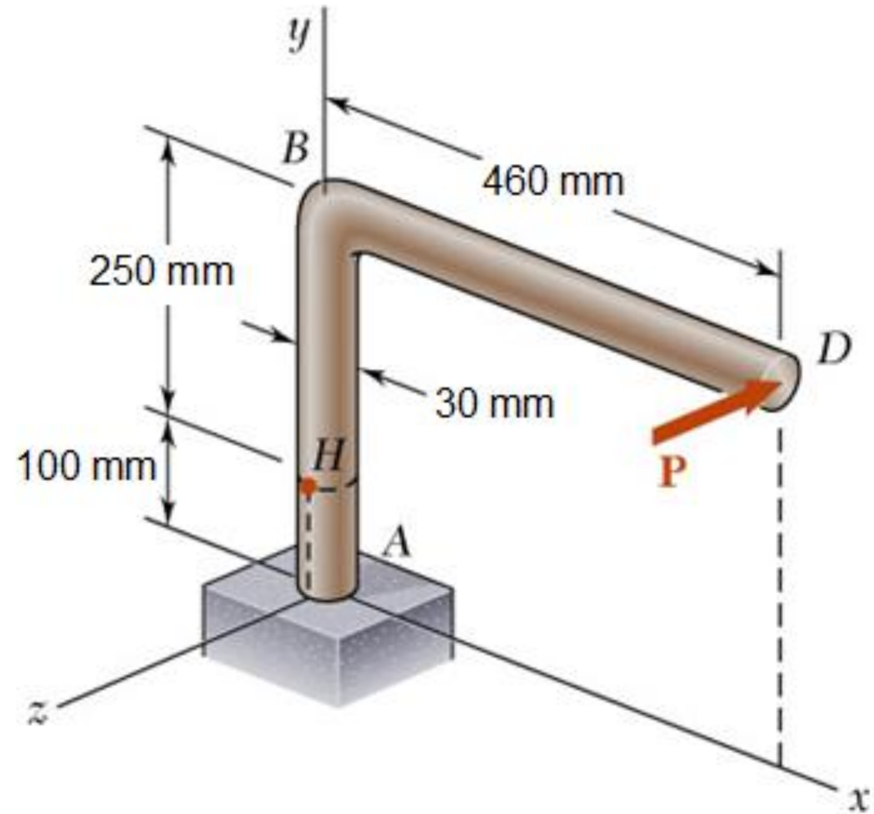


Exemplo:

Uma força horizontal *P* de 670 N é aplicada à extremidade ***D*** da alavanca ***ABD***. Determine:

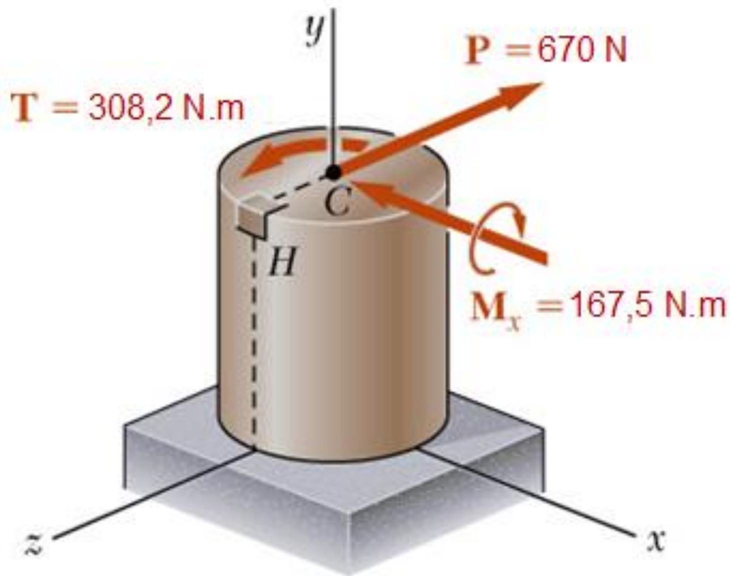
a) As tensões normal e cisalhante em um elemento no ponto ***H*** com lados paralelos aos eixos ***x*** e ***y***;

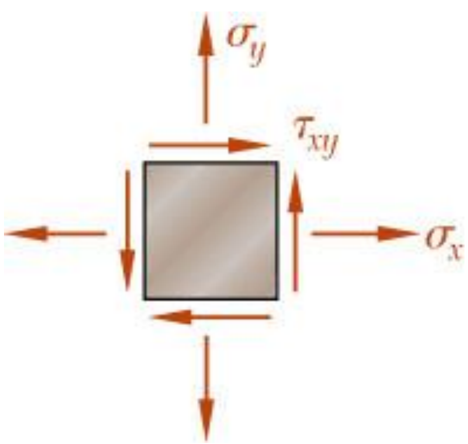
b) Os planos e tensões principais no ponto ***H***.



Obs.: Ao se deslocar uma força ao longo de uma linha, no novo ponto de aplicação deve-se somar a ela o momento igual ao produto vetorial da distância pela própria força.

Assim: A força ***P*** aplicada em ***D*** tem a direção de ***z***. Pode-se substituí-la por uma força aplicada em ***B*** e mais um momento na direção ***y*** (pois o deslocamento é em ***x***).





<u>SOLUÇÃO</u>:

Determine um sistema de força e momento equivalentes no centro da seção transversal que passa por *H*.

$$P = 670\,\text{N}$$
$$T = (670\,\text{N})(0{,}46\,\text{m}) = 308{,}2\,\text{N}\cdot\text{m}$$
$$M_x = (670\,\text{N})(0{,}25\,\text{m}) = 167{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$$

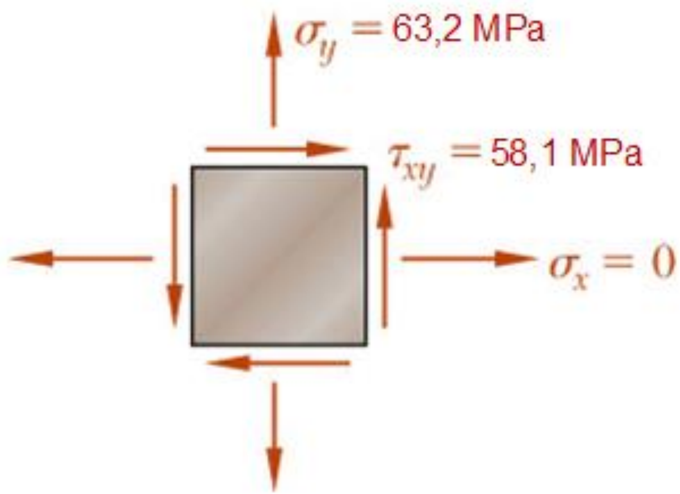
<u>Obs</u>.: A força ***P*** não causa tensão cisalhante no ponto ***H*** (lembre da fórmula de Zhuravski).

Avalie as tensões normais e de cisalhamento em *H*.

$$\sigma_y = +\frac{Mc}{I} = +\frac{(167{,}5\,\text{N}\cdot\text{m})(0{,}015\,\text{m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}015\,\text{m})^4}$$

$$\tau_{xy} = +\frac{Tc}{J} = +\frac{(308{,}2\,\text{N}\cdot\text{m})(0{,}015\,\text{m})}{\frac{1}{2}\pi(0{,}015\,\text{m})^4}$$

$$\boxed{\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 63{,}2\,\text{MPa} \quad \tau_y = 58{,}1\,\text{MPa}}$$

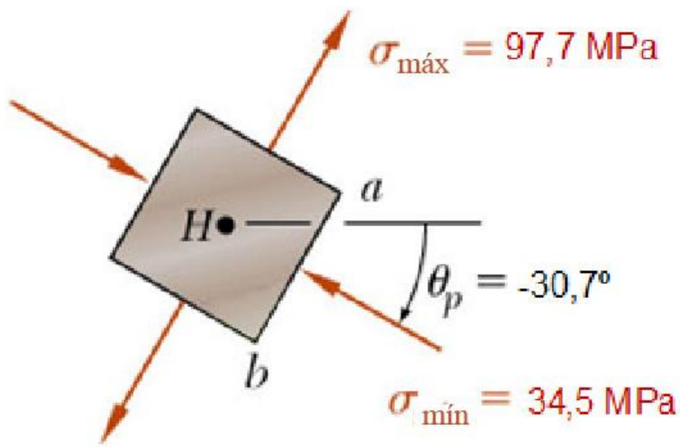


Determinar os planos principais e calcular as tensões principais.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(58{,}1)}{0 - 63{,}2} = -1{,}84$$

$$2\theta_p = -61{,}5° \text{ e } 118{,}5°$$

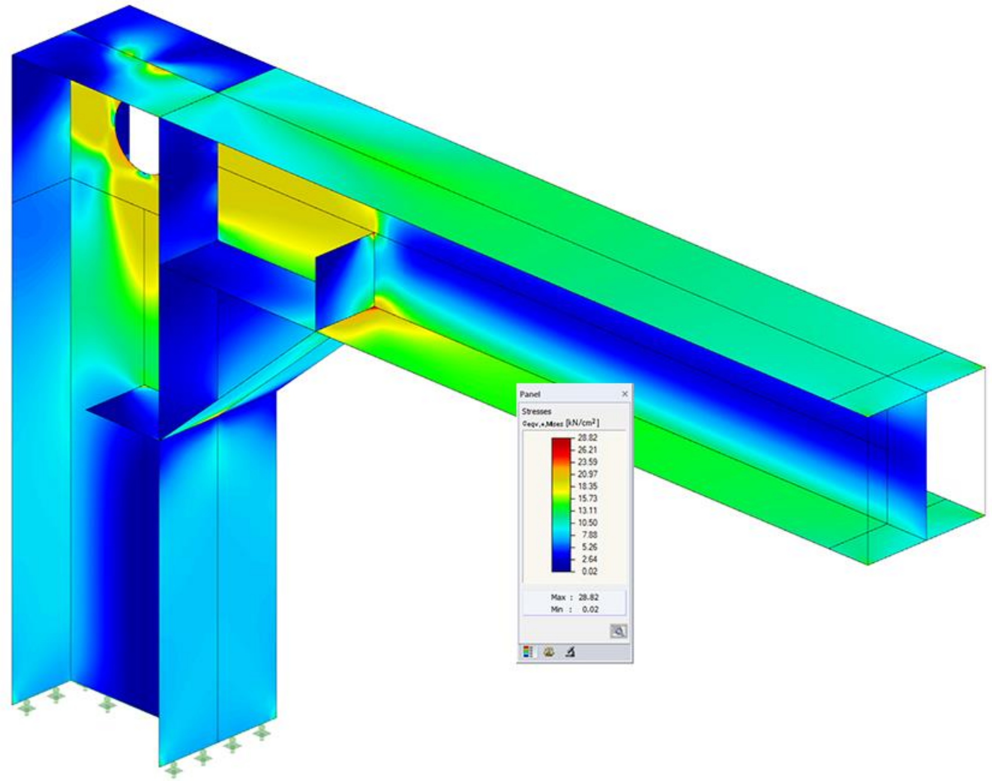
$$\boxed{\theta_p = -30{,}7° \text{ e } 59{,}3°}$$



$$\sigma_{\text{máx,mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 + 63{,}2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 63{,}2}{2}\right)^2 + (58{,}1)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= +97{,}7 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{mín}} &= -34{,}5 \text{ MPa} \end{aligned}}$$


Panel
Stresses
28.82
26.21
23.59
20.97
18.35
15.73
13.11
10.50
7.88
5.26
2.64
0.02
Max : 28.82
Min : 0.02

FIM