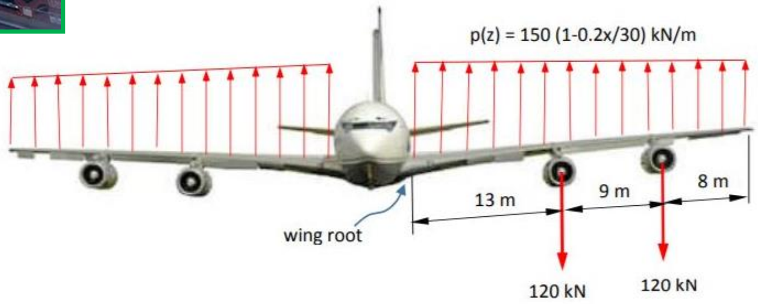
LOM 3101 - Mecânica dos Materiais

DEMAR – EEL – USP

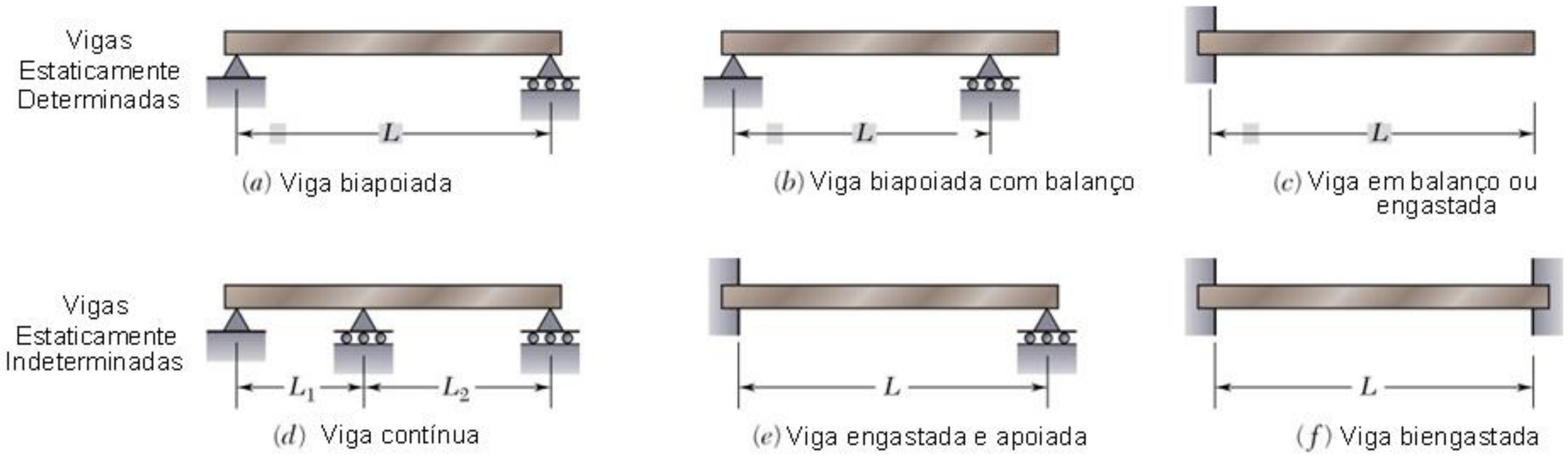
Professor : Carlos A.R.P. Baptista

2. FLEXÃO SIMÉTRICA

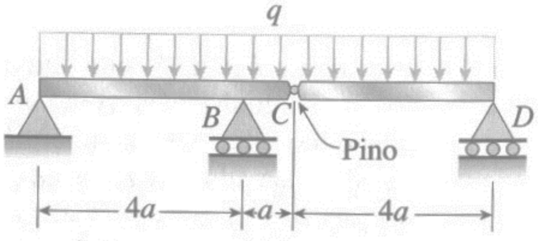
Peças submetidas a carregamentos transversais são denominadas vigas.



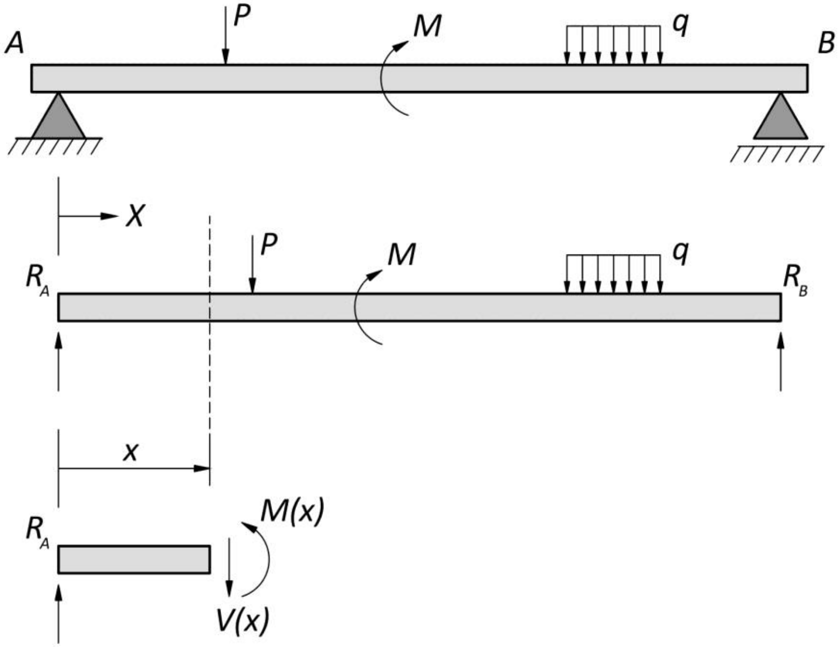
Classificação das vigas quanto aos seus apoios:



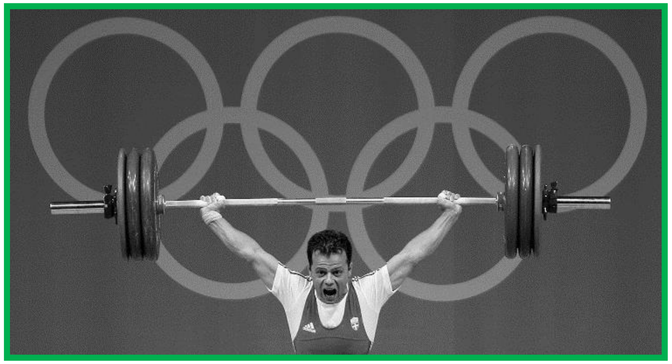
As vigas também podem ter articulações:



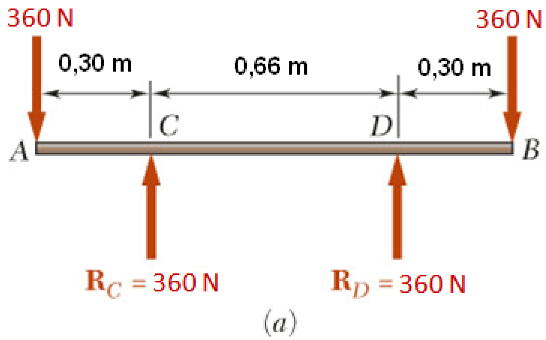
Esforços Solicitantes em uma viga: Força Cortante (V) e Momento Fletor (M)



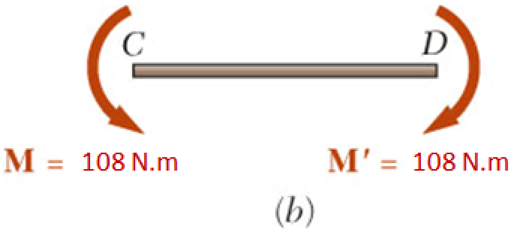
Quando o único esforço é o Momento Fletor...



A região entre as mãos do atleta está sob flexão pura.



Os esforços em uma viga são analisados por meio de gráficos: os diagramas de força cortante e momento fletor.



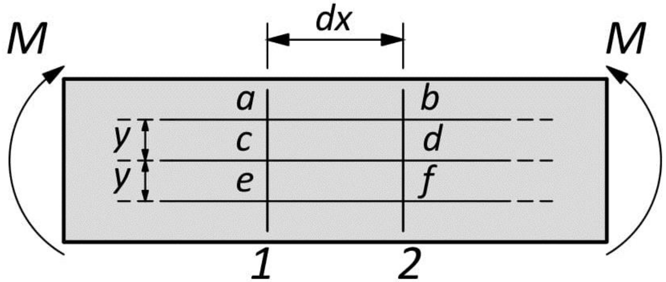
Temos a FLEXÃO PURA

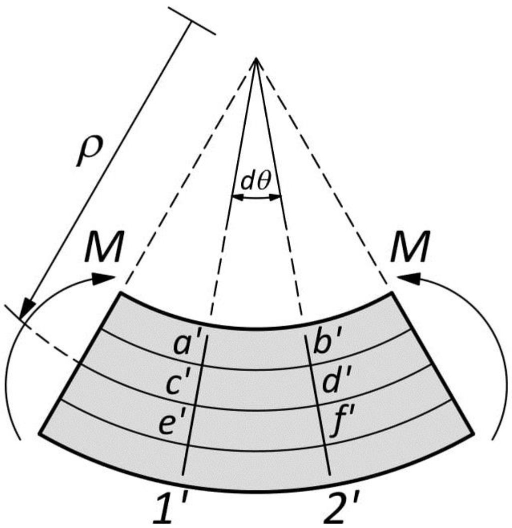
- **Análise Geométrica de uma barra deformada sob flexão pura:**

Considere uma malha desenhada sobre a face lateral de uma barra. Em seguida, suponha que essa barra seja deformada sob flexão pura. Vamos analisar o que acontece com as linhas dessa malha.

APÓS A DEFORMAÇÃO:

ANTES DA DEFORMAÇÃO:





Seja ρ o raio de curvatura da fibra que não se deforma, e y a distância medida a partir dessa fibra.

• **Análise Geométrica de uma barra deformada sob flexão pura:**

Constatações:

- Linhas verticais continuam retas: seções transversais permanecem planas.
- Existindo linhas horizontais que aumentam e outras que diminuem de comprimento, implica em que há uma linha cujo comprimento não se altera.
- Variação de comprimento das linhas: deformação axial.

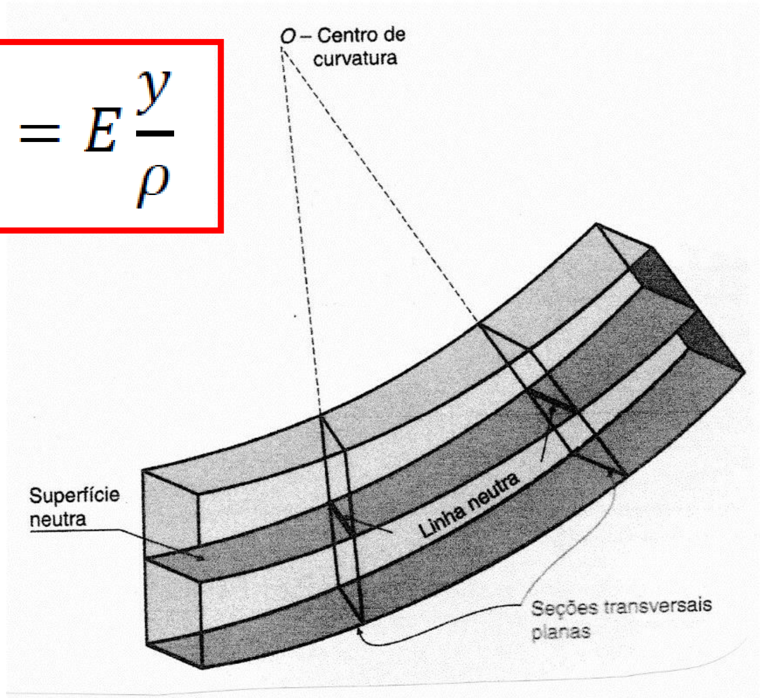
Definições e Conclusões:

- **Tensão normal** varia linearmente ao longo da altura da seção transversal.
- **Linha Neutra**: Intersecção do plano cuja deformação é nula com o plano da seção transversal.

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

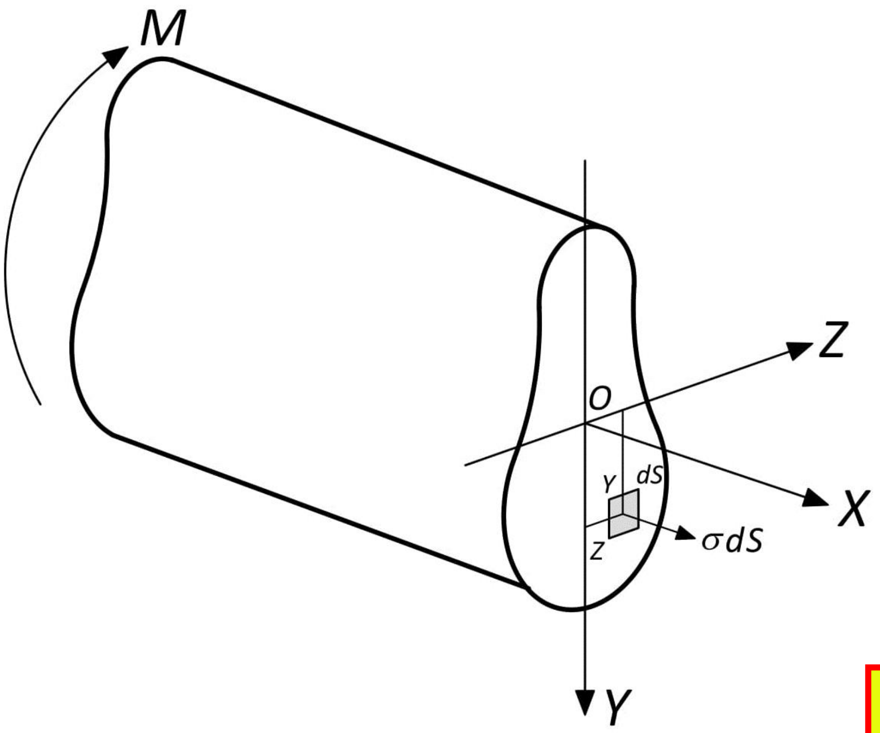
Perguntas que permanecem:

- Localização exata da linha neutra?
- Como obter uma expressão aproveitável para o cálculo da tensão normal?



- **Análise de Equilíbrio de uma barra deformada sob flexão pura:**

Considerando o trecho de uma barra obtido por meio de um corte transversal, seja o equilíbrio em relação sistema de eixos XYZ definido de modo que a área da seção está contida no plano YZ e o eixo Z coincide com a linha neutra.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int y da = 0$$

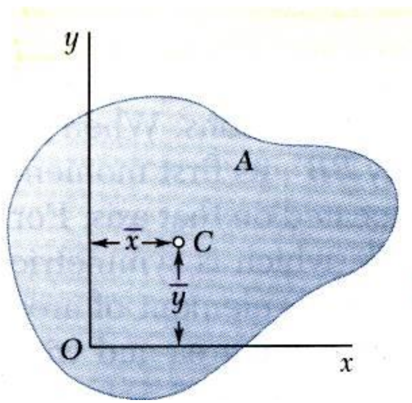
$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int yz da = 0$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M = \frac{E}{\rho} \int y^2 da$$

A que conclusões podemos chegar?

- **Características Geométricas de figuras planas:**

As coordenadas do centroide de uma figura de área A são obtidas dividindo-se os momentos de primeira ordem pelo próprio valor da área.
O momento de segunda ordem, ou momento de inércia da figura em relação a um dado eixo, é obtido integrando-se sobre sua área o produto de cada elemento de área dA pelo quadrado da distância desse elemento ao respectivo eixo.

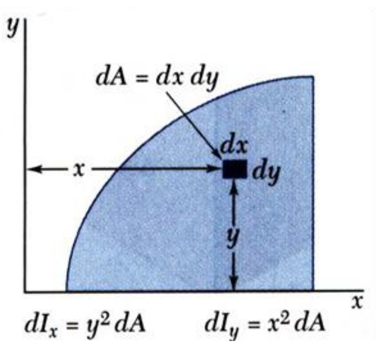


$$\bar{x}A = \int x\,dA = Q_y$$

$= \text{momento de primeira ordem em relação a } y$

$$\bar{y}A = \int y\,dA = Q_x$$

$= \text{momento de primeira ordem em relação a } x$



- *Os Momentos de Segunda Ordem* ou *Momentos de Inércia* de Superfícies em relação aos eixos x e y são:

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

- **Voltando à Análise de Equilíbrio:**

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int y da = 0$$

A primeira equação de equilíbrio impõe que o momento de primeira ordem da área da seção transversal em relação ao eixo Z seja nulo. Isto significa que a coordenada y do centroide é zero, ou seja, **a linha neutra passa pelo centroide**!

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int yz da = 0$$

O produto de inércia da seção é nulo. Satisfeito quando Y é um eixo de simetria.

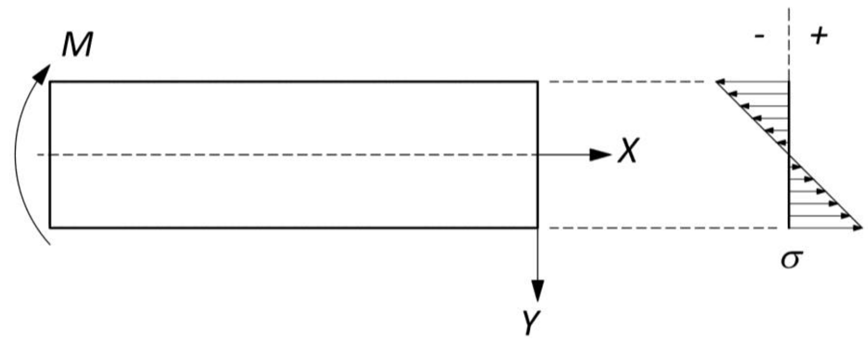
$$\sum M_z = 0 \rightarrow M = \frac{E}{\rho}\int y^2 da$$

Lembrando que o quociente E / ρ veio da análise geométrica e não é uma expressão útil na prática porque o valor de ρ é desconhecido. Agora, basta calcular o momento de inércia em relação a Z !

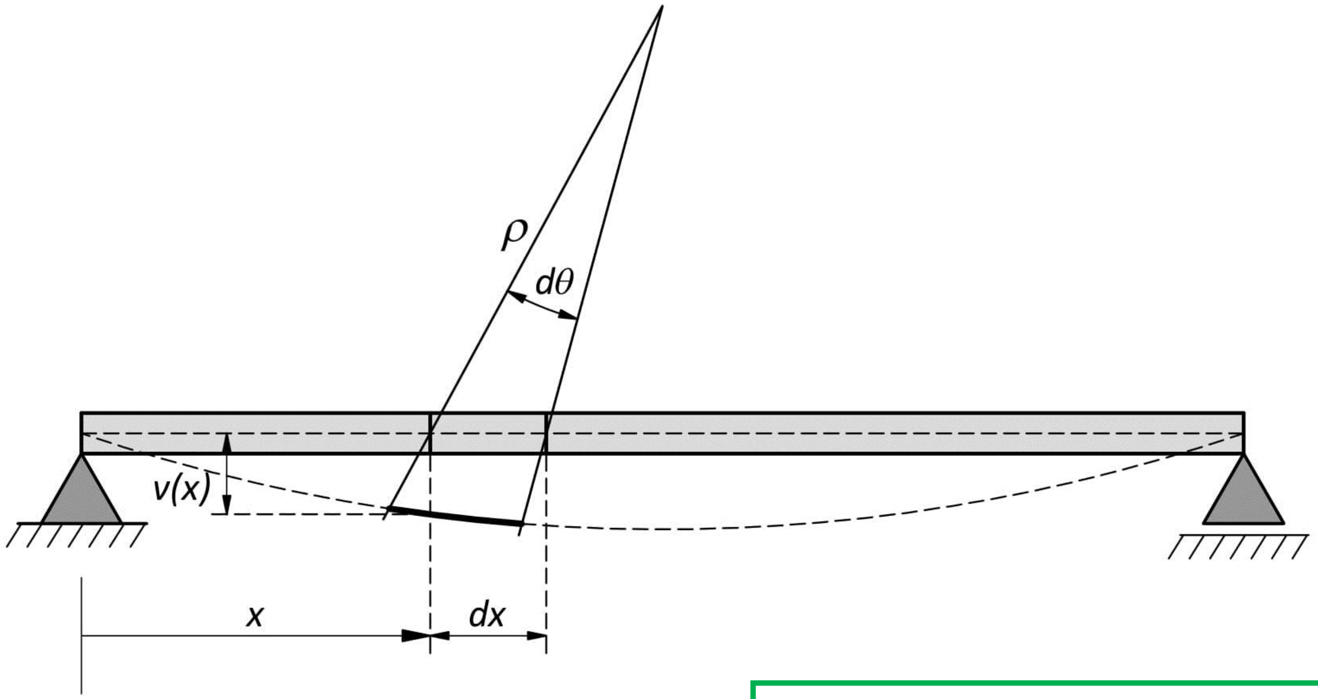
$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_z}$$

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M \cdot y}{I_Z}}$$



- **Deflexão de Vigas:**



Equação Diferencial da Elástica

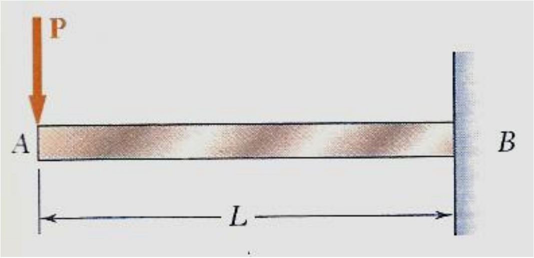
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$k = \frac{\left(\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-M}{EI_z}$$

Exemplos de Aplicação (solução por integração direta):

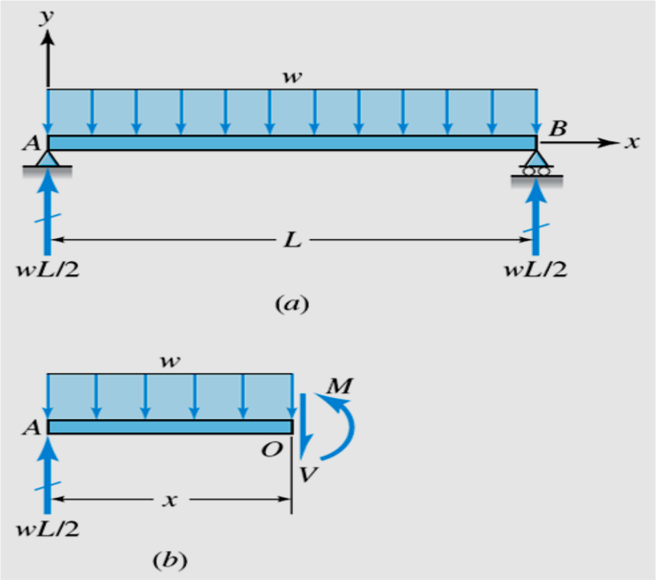
a) Determine a equação da flecha para a viga em balanço:



$V(x) = ?$

$$v(x) = \frac{-P}{EI_z}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{2} + \frac{L^3}{3}\right)$$

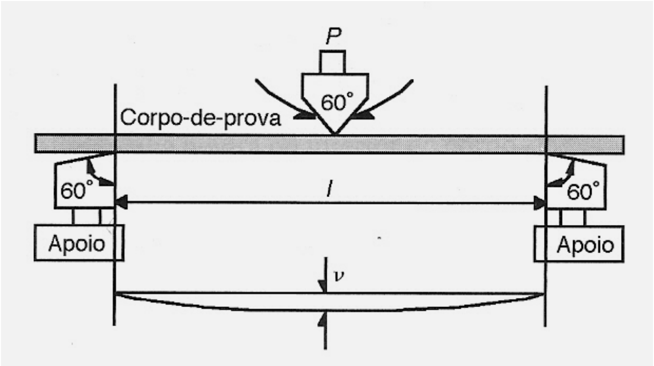
b) Viga biapoiada com carregamento distribuído:

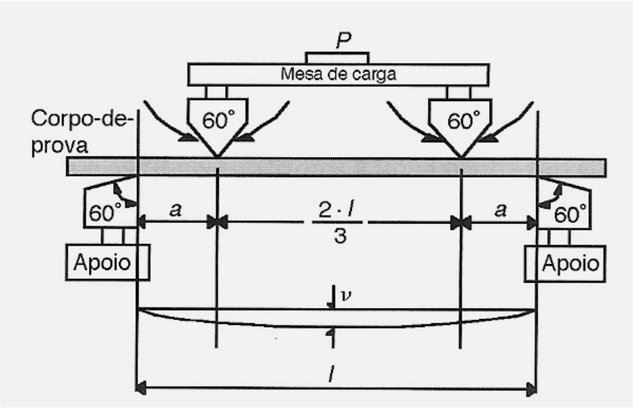


$V(x) = ?$

$$v(x) = \frac{-w}{2EI_z}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{L^3 x}{12}\right)$$

Exercício: Deduzir as expressões para deflexão a 3 e 4 pontos





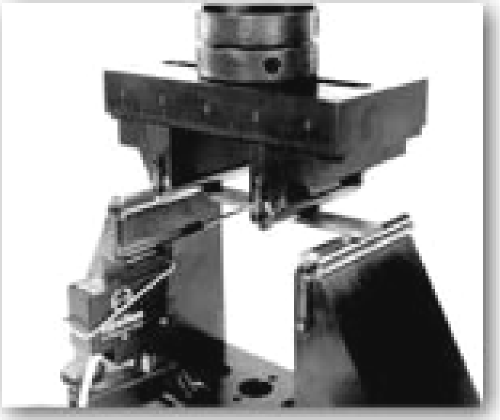
$$v(x) = \frac{-P}{4EI_z}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2 x}{4}\right), 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$v(x) = \frac{-Pa}{2EI_z}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2} + \frac{a^2}{6}\right), a \leq x \leq \frac{l}{2}$$

- ***v(x)* para *x* = *(l/2)* resulta em:**

$$\boxed{v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{pl^3}{48EI_z}}$$ **- Flexão a 3 pontos**

$$\boxed{v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pa}{48EI_z}\left(3l^2 - 4a^2\right)}$$ **- Flexão a 4 pontos**



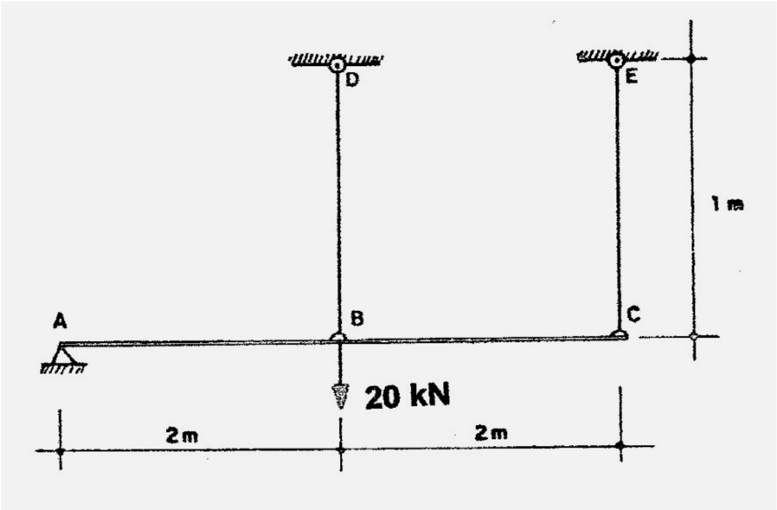
Exemplo: Um Problema Hiperestático

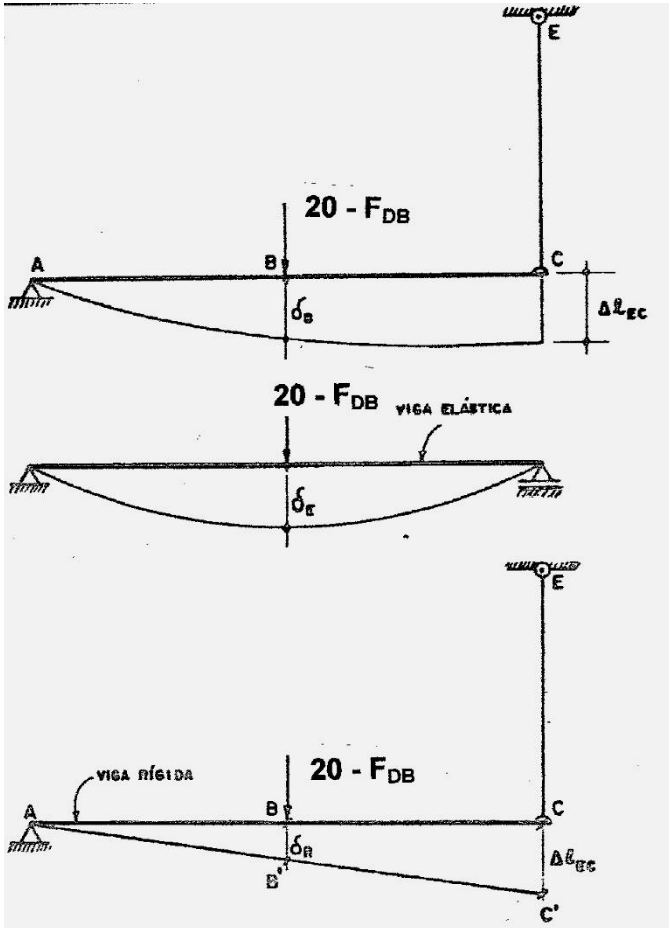
Determine as forças nos arames, considerando:

a) a viga ABC rígida;

b) a viga ABC elástica, com $I_z = 2 \times 10^{-5}\ m^4$

(dado: para os arames, $A = 1 \times 10^{-4}\ m^2$)





- Quando a viga ABC é deformável, aplica-se o **método da superposição**: o deslocamento total de um dado ponto é considerado como a soma dos deslocamentos representados nas figuras (viga rígida + viga elástica):

$$\delta_B = \delta_{B,E} + \delta_{B,R}$$

Exemplo: Um problema Hiperestático (cont.)

$$\delta_B = \delta_{B,E} + \delta_{B,R} = \Delta L_{BD}$$

O deslocamento devido à deformação da viga é calculado empregando-se a expressão já obtida (flexão a 3 pontos):

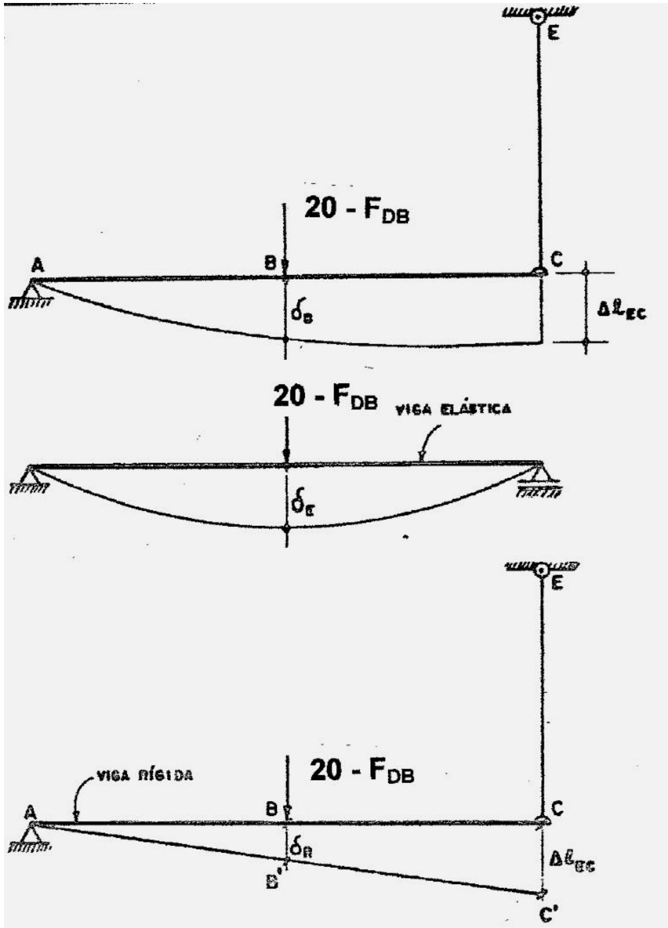
$$\delta_{B,E} = \frac{Pl^3}{48EI_z} = \frac{\left(20\times10^3 - F_{BD}\right)4^3}{48\cdot 2{,}0\times10^{-5}\cdot E} = \frac{2\times10^5\left(20\times10^3 - F_{BD}\right)}{E}$$

O deslocamento considerando-se a viga rígida foi obtido por semelhança de triângulos:

$$\delta_{B,R} = \frac{1}{2}\Delta L_{CE}$$

Substituindo as expressões, ficamos com:

$$\Delta L_{BD} = \frac{2\times10^5\left(20\times10^3 - F_{BD}\right)}{E} + \frac{1}{2}\Delta L_{EC}$$



Exemplo: Um problema Hiperestático (cont.)

$$\Delta L_{BD} = \frac{2\times 10^5\left(20\times 10^3 - F_{BD}\right)}{E} + \frac{1}{2}\Delta L_{EC}$$

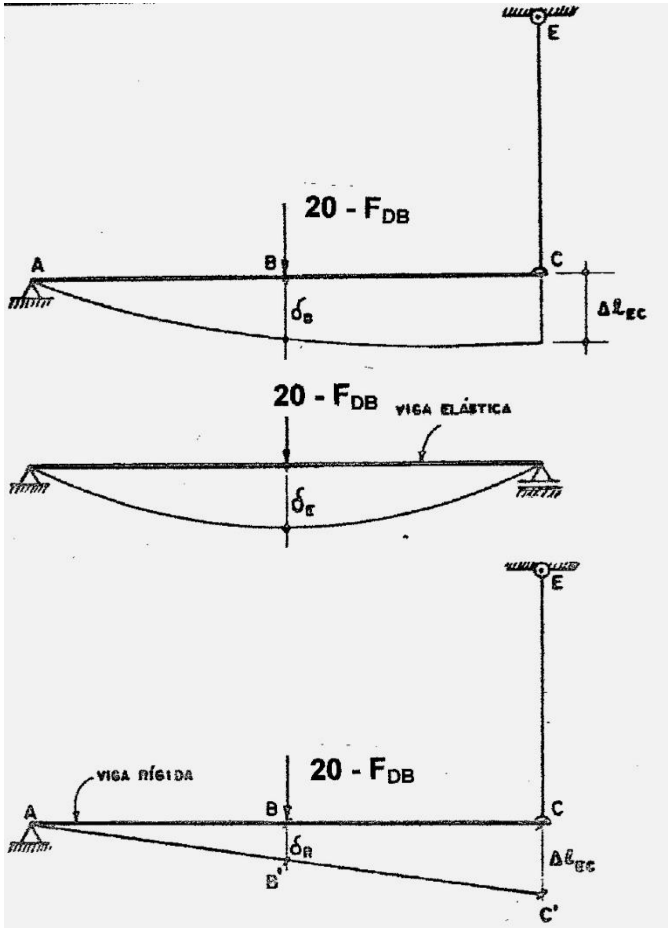
Lembrando que:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}$$

e usando os dados:

L = 1,0m
A = 1,0 x 10^{-4} m^2, chegamos a:

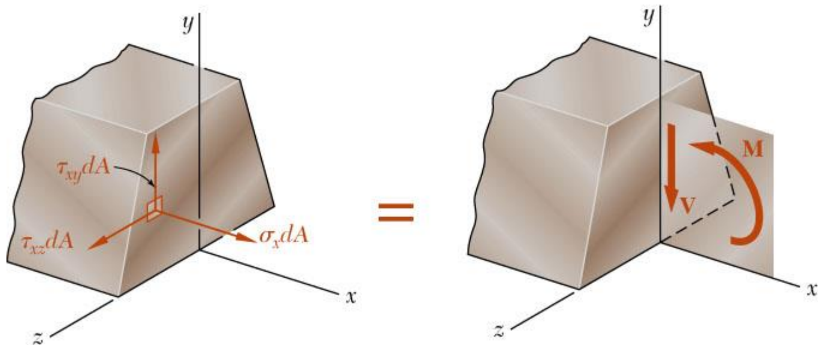
$$46F_{BD} - 3F_{CE} = 800(kN)$$

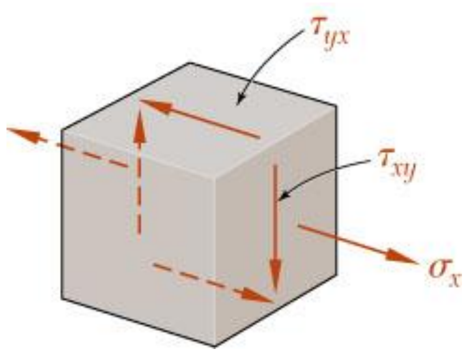


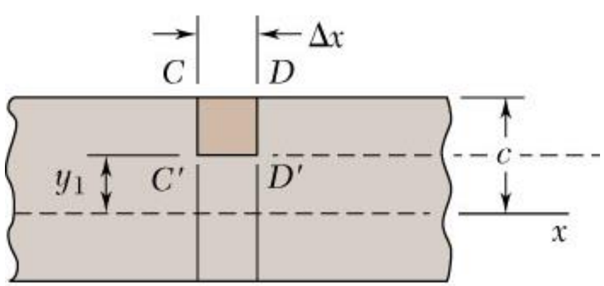
Juntando com a equação de equilíbrio: $F_{BD} + 2F_{CE} = 20(kN)$

A solução do sistema resulta em: $\boxed{F_{BD} = 17{,}48(kN)}$ $\boxed{F_{CE} = 1{,}26(kN)}$

• Tensão de Cisalhamento em Vigas:







- O carregamento transversal aplicado em uma viga resultará em tensões normais e de cisalhamento nas seções transversais.
- Quando tensões de cisalhamento são exercidas sobre as faces verticais de um elemento, tensões iguais devem ser exercidas sobre as outras faces horizontais.
- O cisalhamento longitudinal deve existir em qualquer elemento submetido a uma carga transversal.

A Fórmula de Zhuravski

$$\tau = \frac{VQ_s}{bI_z}$$