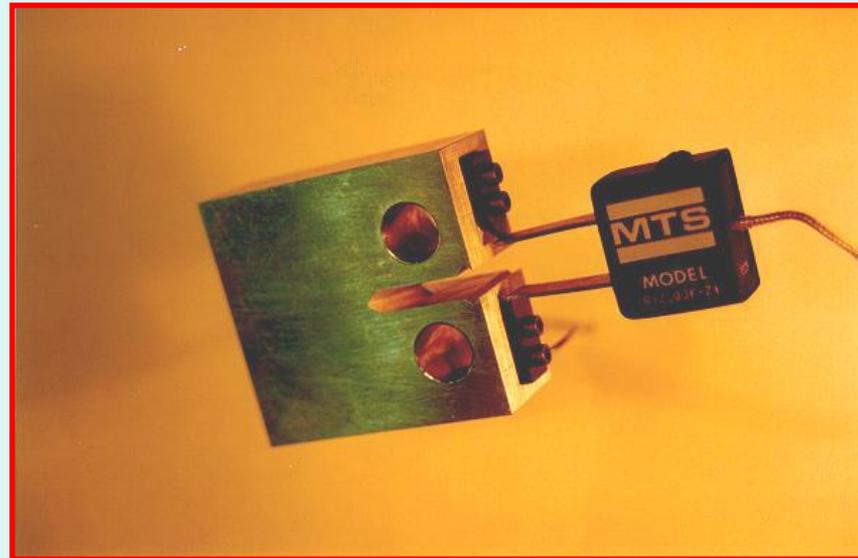


PARTE 4: PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR FADIGA

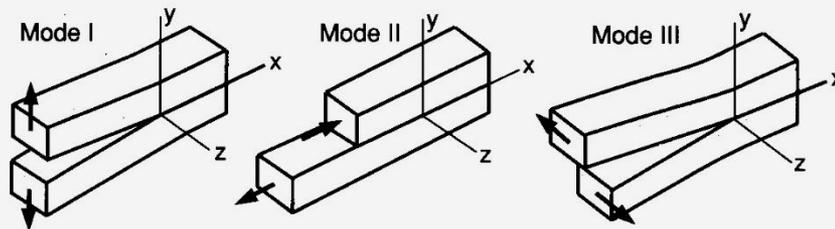


MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

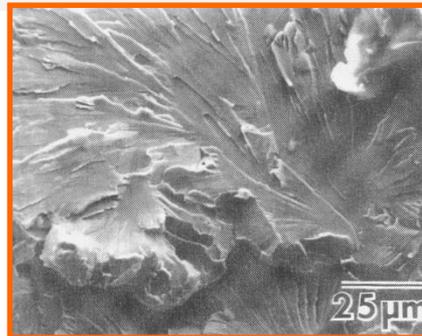
Conceitos básicos

- A Mecânica da Fratura (ou Mecânica da Integridade Estrutural) é empregada para avaliar a resistência de estruturas ou componentes contendo trincas ou defeitos.
- MFEL : As condições do material são predominantemente elásticas na fratura.
- Materiais de alta resistência mecânica tendem a apresentar baixa resistência residual em presença de trincas (fratura frágil, de baixa energia).

Os três modos básicos de sollicitação de uma trinca



Superfície de fratura com aspecto frágil

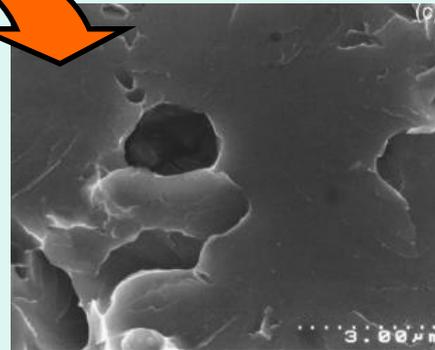
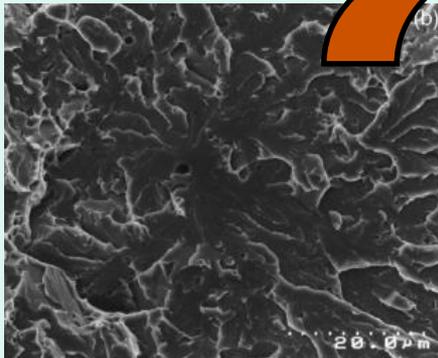


Corpo-de-prova após ensaio de Tenacidade à Fratura (ASTM E399)

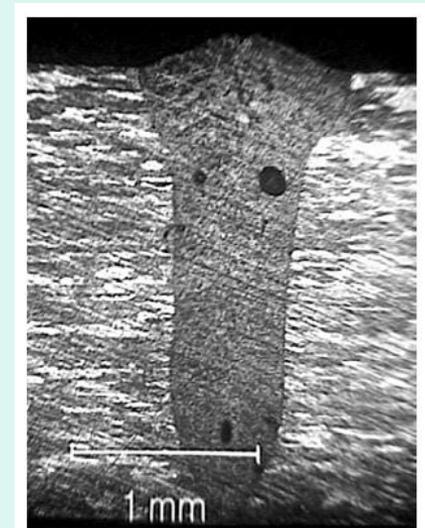
Comportamento em Presença de Trincas e Defeitos:

- Enfraquecimento do componente, podendo levar à falha por ruptura frágil
- Materiais contêm defeitos que devem ser tratados como trincas:
 - *Inclusões em Forjados e Fundidos*
 - *Poros em Soldas*
 - *Riscos Superficiais Profundos*
 - *Delaminação*

Fratura Iniciada em inclusão



Poros em cordão de solda a laser

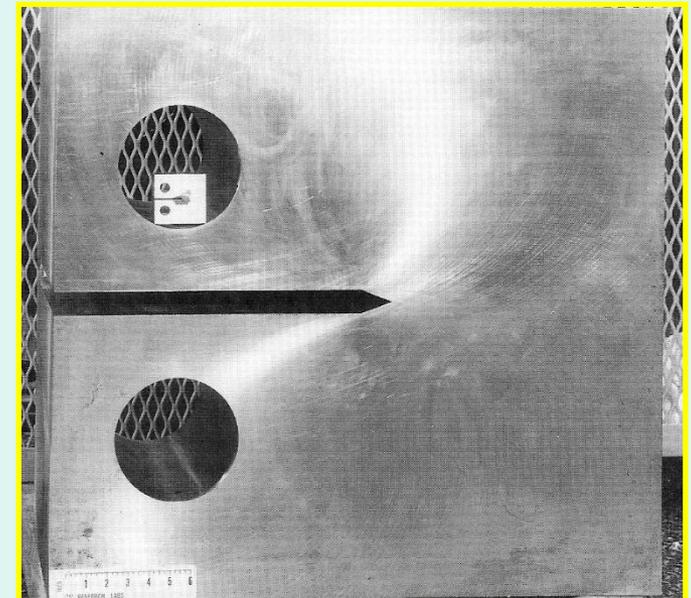
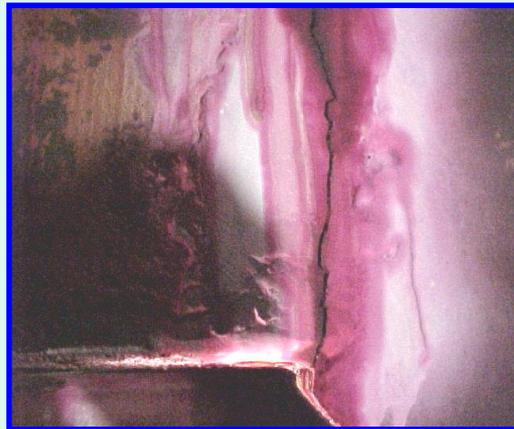


- Trincas também podem nuclear em condições de serviço em diversos tipos de estruturas, como aviões, vasos de pressão, navios, pontes, maquinaria pesada, veículos terrestres

A Mecânica da Integridade Estrutural (Mecânica da Fratura) estuda o comportamento dos sólidos em presença de trincas.

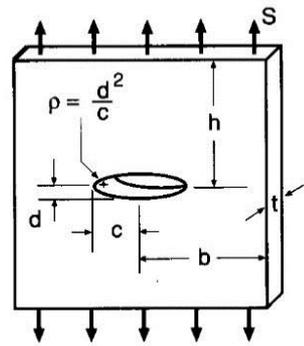
Suas aplicações incluem:

- *Seleção de Materiais*
- *Projeto de Componentes Estruturais*

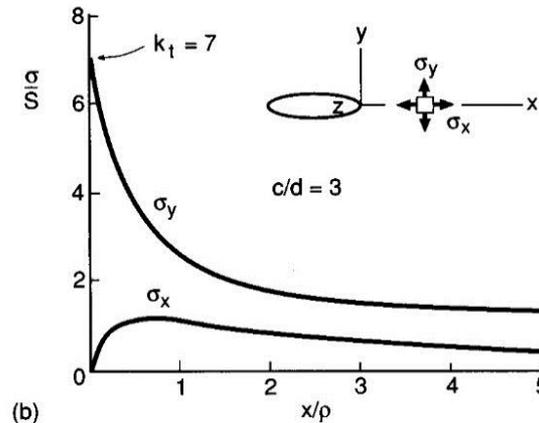


Precursosores da Mecânica da Fratura:

- Inglis: Concentração de tensão em presença de furo elíptico



(a)



(b)

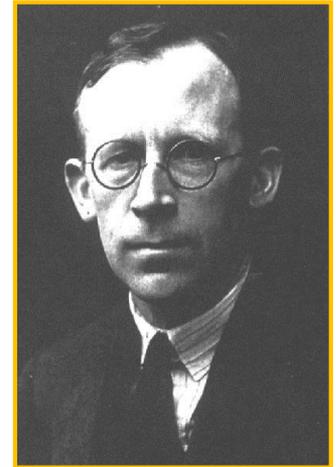
O valor máximo da tensão depende das proporções da elipse:

$$\sigma_y = S \left(1 + 2 \frac{c}{d} \right) = S \left(1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \right)$$

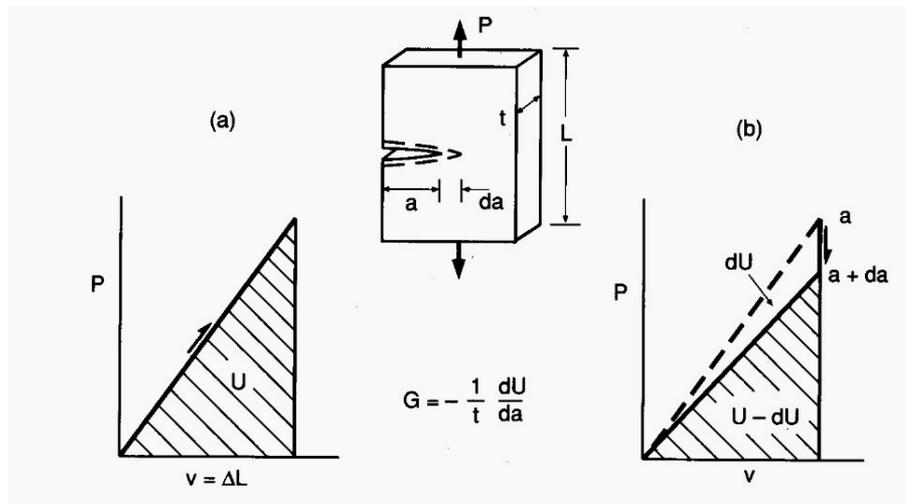
Precursosores da Mecânica da Fratura:

- **Griffith: Abordagem Energética.**

A trinca irá crescer se o decréscimo da energia elástica armazenada no corpo for ao menos igual à energia necessária para criar as novas superfícies de trinca



Alan Arnold Griffith (1893 – 1963)



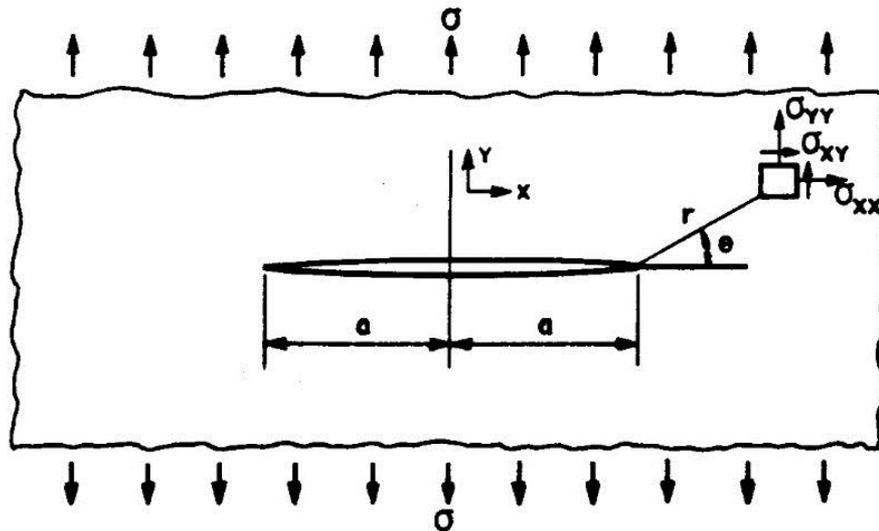
$$U = \frac{Pv}{2}$$

$$G = -\frac{1}{t} \frac{dU}{da}$$

ESTADO DE TENSÃO NA VIZINHANÇA DA TRINCA

Desenvolvimento analítico deve-se a Westergaard (1939)

- Considerou uma placa infinita contendo uma trinca de comprimento $2a$.
- Introduziu um tipo específico de função-tensão complexa.
- Resolveu o Campo de Tensões Elásticas na ponta da trinca.



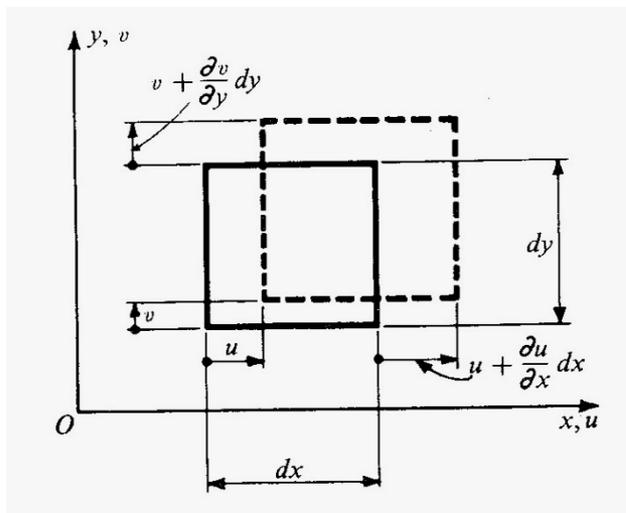
Harold M. Westergaard (1888 – 1950)

TEORIA DA ELASTICIDADE

Elasticidade Bidimensional

- Os 3 estados do problema estrutural (tensão, deformação, deslocamento)
- As 8 equações do problema (relações cinemáticas, Leis constitutivas, equilíbrio)
- Relações Adicionais: Equação de Compatibilidade e Condições de Contorno

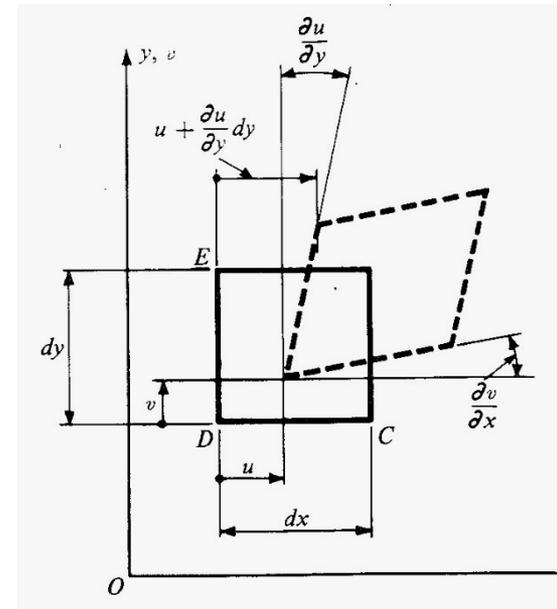
Relações Cinemáticas: Relações deformação-deslocamento



$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



TEORIA DA ELASTICIDADE

Leis Constitutivas: Relações entre tensão e deformação

Estado Plano de Tensão

$$(\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Estado Plano de Deformação

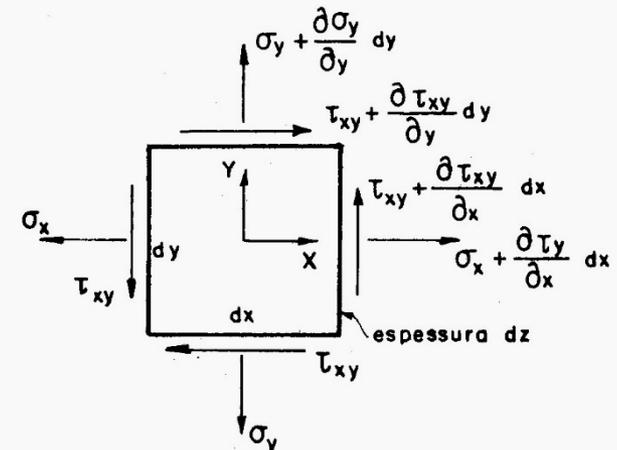
$$(\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Equações de Equilíbrio:

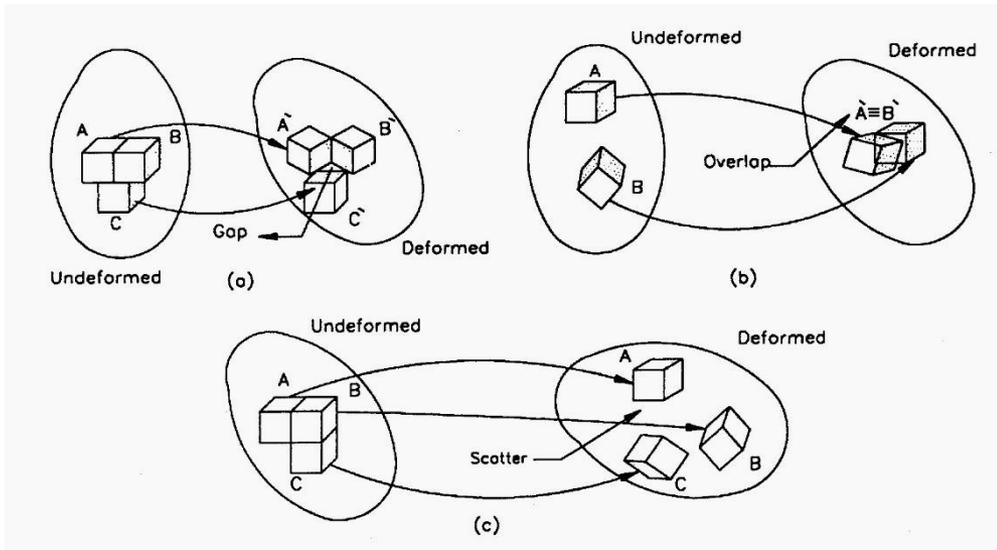
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$



TEORIA DA ELASTICIDADE

Equação de Compatibilidade: Condições necessárias de continuidade



$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Nos problemas do caso plano, tem-se basicamente 8 incógnitas:

$$u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$

Elas devem ser determinadas de modo a satisfazer as 8 equações disponíveis (3 equações cinemáticas, 3 constitutivas e 2 de equilíbrio), além das condições de contorno (específicas para cada problema) e a equação de compatibilidade (porque as 3 equações cinemáticas são funções de apenas 2 deslocamentos).

TEORIA DA ELASTICIDADE

Equação de Compatibilidade em Termos das Tensões

Na integração das 8 equações nas componentes dos 3 estados envolvidos no problema estrutural é clássica a variante em que se procura apresentar as expressões em deformações e deslocamentos em termos dos componentes de tensão. Torna-se então conveniente redigir a equação de compatibilidade em termos das tensões, para os dois casos analisados.

A equação de compatibilidade pode ser transformada em uma equação envolvendo apenas componentes de tensão, empregando-se para isso as relações constitutivas e tendo em vista as equações de equilíbrio.

Quando as forças de volume são constantes ou nulas, as equações de compatibilidade para tensão plana e deformação plana se reduzem a uma única equação, a Equação Diferencial de Laplace ou Equação Harmônica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{ou:} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

O problema da elasticidade plana consiste agora em resolver 3 equações (2 de equilíbrio e a equação de compatibilidade) a 3 incógnitas.

A FUNÇÃO-TENSÃO DE AIRY

Airy descobriu uma engenhosa manobra algébrica que permitiu reduzir o conjunto de 3 equações a apenas 1 equação.

Considera-se que as tensões em um problema bidimensional podem ser descritas por uma única função ϕ , denominada função-tensão.

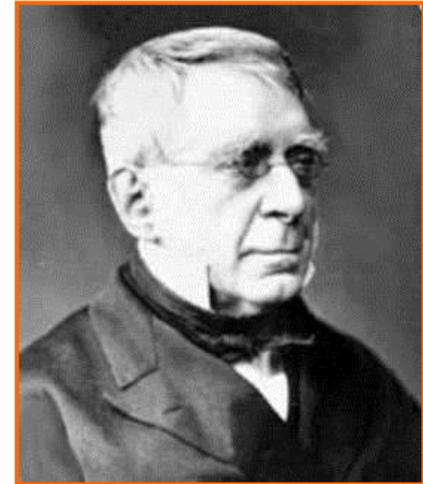
O conceito de Airy foi posteriormente generalizado por Maxwell para o caso tridimensional.

Admita a existência de uma função ϕ determinada de modo a satisfazer as seguintes relações:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Existindo tal função, as equações de equilíbrio são automaticamente satisfeitas. A equação de compatibilidade passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$



George B. Airy (1801 – 1892)

A FUNÇÃO-TENSÃO DE AIRY

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

Empregando o operador de Laplace, a equação de compatibilidade, agora uma **equação bi-harmônica**, é escrita da forma abaixo.

Qualquer função que obedeça a equação bi-harmônica representa um estado de tensão, desde que obedecidas as condições de contorno.

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \nabla^4 \phi = 0$$

A resolução direta das equações da Elasticidade pode se tornar excessivamente trabalhosa.

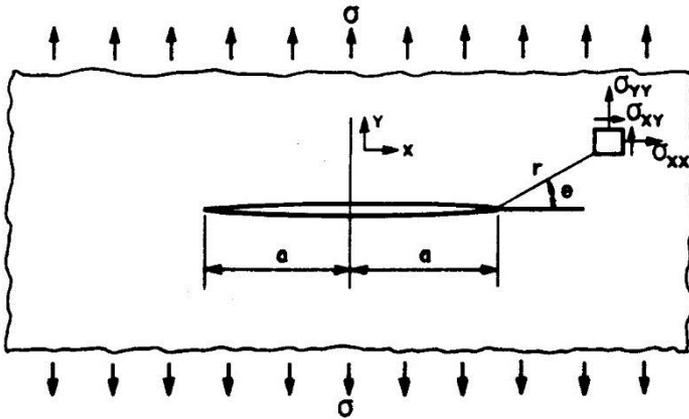
O **Método Inverso** em Elasticidade consiste em se achar a qual problema corresponde uma determinada solução da equação bi-harmônica

O **Método Semi-Inverso** requer que se assuma uma solução parcial. Pode ser usado por exemplo para verificar resultados da Resistência dos Materiais e determinar deslocamentos dos quais esta não trata.

Airy foi condecorado pelo Imperador D. Pedro II com a Grão-Cruz da Imperial Ordem da Rosa.



ESTADO DE TENSÃO NA VIZINHANÇA DA TRINCA DE MODO I

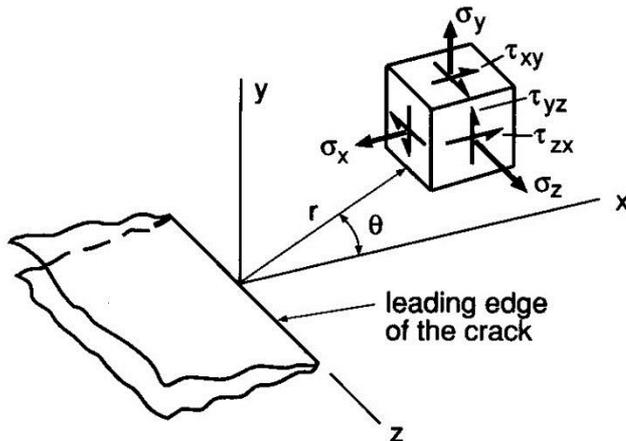


- Resultado do desenvolvimento analítico

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \dots$$

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \dots$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots$$



Sob predominância de deformação plana, tem-se ainda:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

- O campo de tensões na vizinhança da trinca fica conhecido a partir do termo:

$$\sigma\sqrt{a}$$

- Irwin define o Fator Intensidade de Tensão K:

- Para trincas de modo I, tem-se: $K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$, onde Y é uma função geométrica
- O conceito é extensível aos modos II e III
- Como os problemas envolvendo trincas do modo I são mais comuns, é costume omitir-se o índice nestes casos: $K \equiv K_I$
- O campo de tensão à frente da trinca é então descrito como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

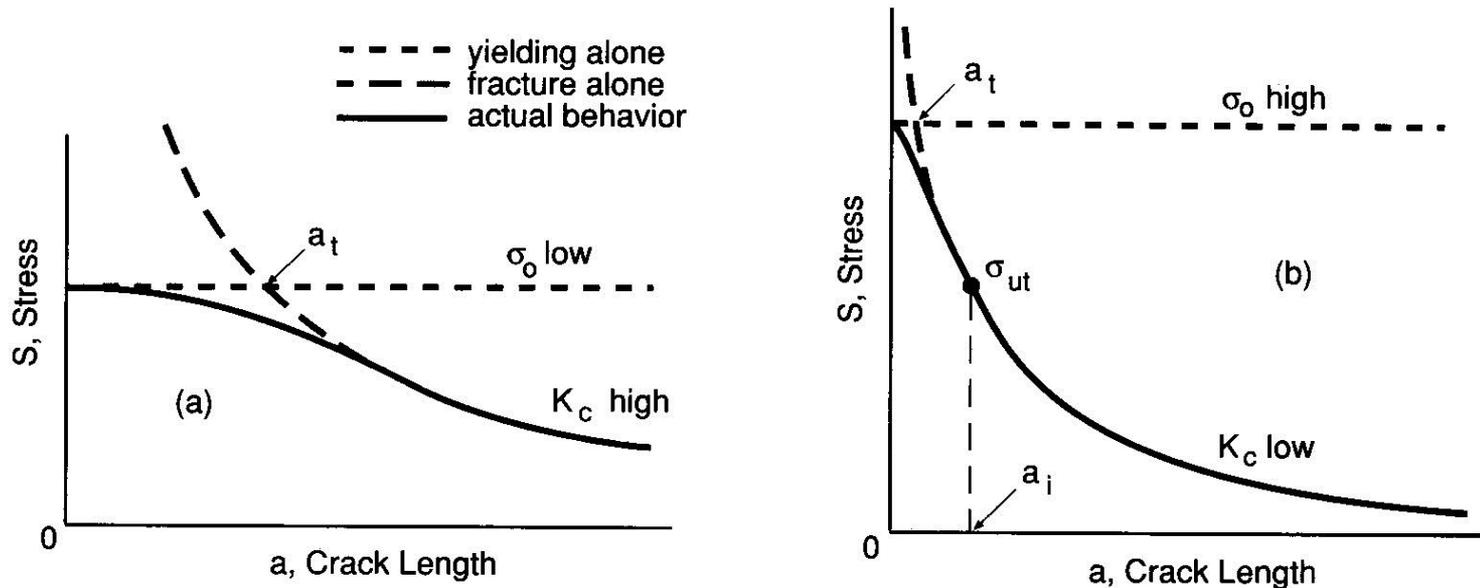
Sendo a fratura um processo altamente localizado na ponta da trinca, é natural supor que ela seja controlada pelos campos de tensão e deformação, os quais estão completamente descritos pelo Fator Intensidade de Tensão.

Verifica-se a existência de um valor crítico K_c deste Fator, para o qual ocorre a propagação instável da trinca. Este valor crítico depende do material e do estado de tensão.

COMPORTAMENTOS DÚCTIL E FRÁGIL

- Os defeitos inerentes a alguns materiais são maiores que o tamanho de transição (*tamanho da trinca para o qual a tensão de falha se iguala ao limite de escoamento do material*). Neste caso o limite de escoamento não é atingido e o material se rompe de forma frágil.

$$\sigma_e \sqrt{\pi a_t} = K_c$$



MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

Zona Plástica na ponta da trinca

-O metal localizado próximo à ponta da trinca deforma-se plasticamente, mantendo as tensões finitas. Devido às dificuldades para descrever a forma e dimensões da zona plástica, os modelos mais conhecidos são aproximações em que ou o tamanho, ou o formato apresenta maior precisão no cálculo.

-Uma primeira aproximação para o tamanho da zona plástica, numa situação de **Tensão Plana**, é obtida a partir do campo de tensões elásticas:

- Para $\theta = 0^\circ$:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad (\text{demais componentes são nulos})$$

- No Escoamento:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_e$$

- Isolando r , obtém-se:

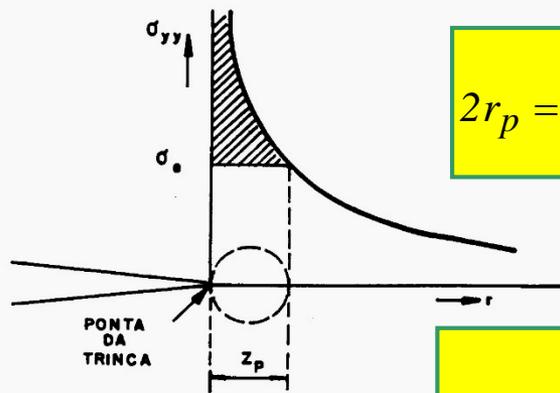
$$r_p = z_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{\sigma_e} \right)^2 \quad (\text{primeira aproximação para a zona plástica})$$

MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

Zona Plástica na ponta da trinca (cont.)

- A primeira aproximação subestima o tamanho da zona plástica, porque a carga representada pela área hachurada na figura abaixo também deve ser suportada.

- **Irwin** definiu uma trinca com comprimento corrigido, a partir da qual foi possível determinar que o tamanho da zona plástica é o dobro da primeira aproximação.

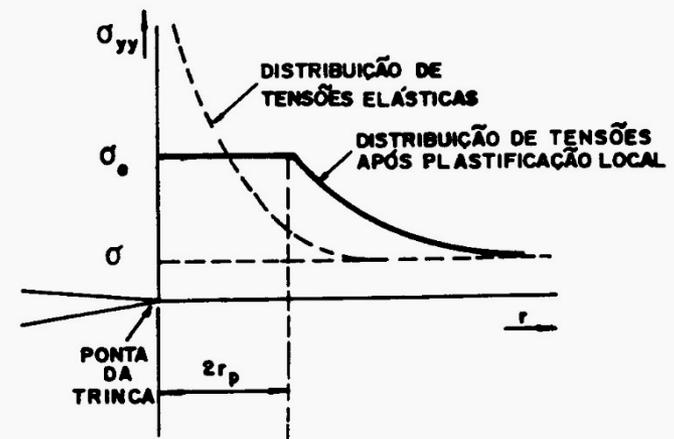


$$2r_p = \frac{I}{\pi} \left(\frac{K}{\sigma_e} \right)^2$$

(Zona Plástica em tensão plana)

$$2r_p = \frac{I}{3\pi} \left(\frac{K}{\sigma_e} \right)^2$$

(Zona Plástica em deformação plana)

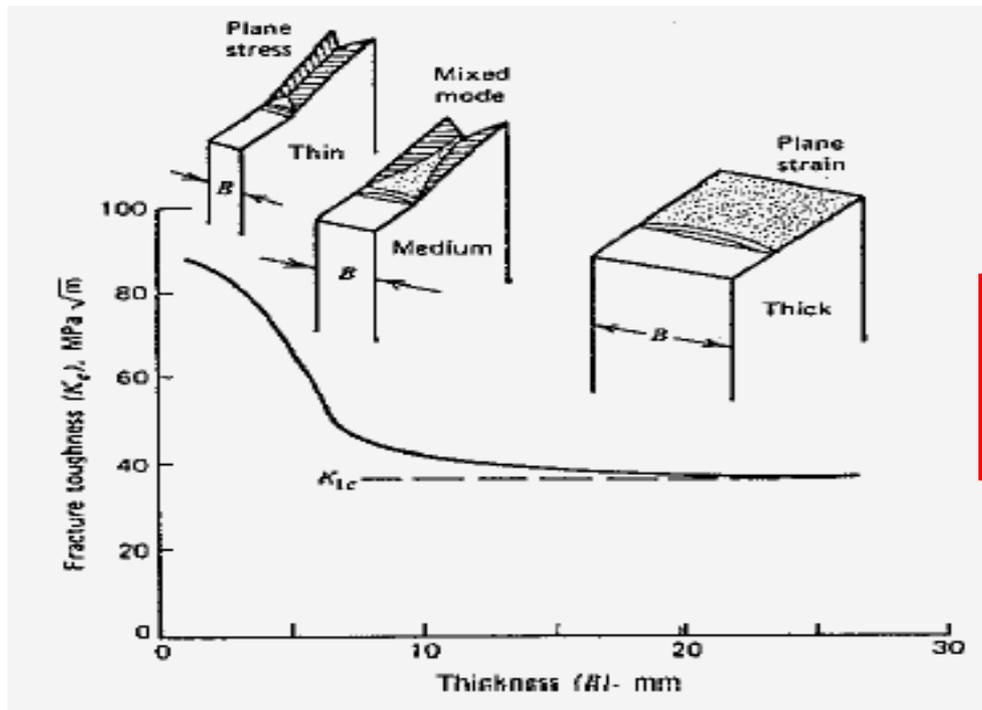


- Em deformação plana, a tensão efetiva é menor e por isso o valor de σ_y necessário para causar o escoamento será maior. Este aumento aparente da resistência ao escoamento é devido à restrição geométrica e à tensão hidrostática resultante na ponta da trinca.

MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

Tenacidade à Fratura

- A forma e dimensões da zona plástica na ponta da trinca são afetadas pelo estado de tensão, visto que este determina a tensão efetiva de escoamento.
- Assim, o valor crítico do Fator Intensidade de Tensão também depende do estado de tensão. Observa-se que K_{Ic} varia com a espessura da amostra, diminuindo assintoticamente à medida que a deformação plana predomina.



✓ O valor de K_{Ic} no estado de deformação plana é denotado por K_{Ic} e é denominado Tenacidade à Fratura, sendo considerado uma propriedade mecânica do material.

O DESAFORTUNADO F-111

Triunfo sobre a Adversidade

- O F-111 foi talvez o projeto mais problemático desde a Segunda Guerra Mundial.
- Custos crescentes com a fabricação e operação de aviões cada vez mais sofisticados induziram à adoção de projetos “multi-tarefas”.
- A General Dynamics assinou a proposta de desenvolvimento para o programa TFX, um caça-bombardeiro multipropósitos que serviria à USAF e à USN.
- Primeiro vôo em dezembro de 1964; início das entregas em outubro de 1967.



O DESAFORTUNADO F-111

Triunfo sobre a Adversidade

- A tecnologia incorporada em um avião de produção regular usualmente está em um nível estável, onde é bem entendida e prontamente aplicada.
- Por outro lado, o F-111 demandou tal nível de performance para a época que as tecnologias existentes eram insuficientes para atender às necessidades.
- Novas tecnologias para as asas de geometria variável, motores, sistema de navegação automática, sistema de escape da tripulação e novas ligas metálicas.
- Projeto desenvolvido em regime de urgência; o avião entrou em produção antes que os problemas encontrados fossem resolvidos: **receita para o desastre**.



O DESAFORTUNADO F-111

Asas de Geometria Variável

- Concebidas inicialmente pela Messerschmitt AG na Alemanha nazista.
- Um protótipo do projeto P.1101 foi construído, mas não foi testado em vôo antes do fim da Guerra, quando foi capturado incompleto pelas forças americanas.
- O protótipo foi levado para os Estados Unidos e entregue à Bell Aircraft Company.



Protótipo capturado do Messerschmitt P.1101

O DESAFORTUNADO F-111

Asas de Geometria Variável

- O avião experimental Bell X-5 foi desenvolvido inspirado no protótipo alemão e incorporava um mecanismo de mudança do ângulo das asas em vôo.
- O X-5 voou pela primeira vez em 1951, mostrando-se um avião bastante instável e difícil de controlar. Em 1953 um dos protótipos caiu, matando o piloto de testes.
- O projeto foi abandonado devido às limitações tecnológicas da época.



Fotografia composta mostrando diferentes angulações das asas do Bell X-5.



Avião experimental Bell X-5 em vôo

O DESAFORTUNADO F-111

Asas de Geometria Variável

- Um dos problemas da asa de geometria variável era que quando o ângulo de “sweep” da asa era aumentado, a porção da asa próximo do corpo do avião tinha que retrair para dentro da fuselagem, diminuindo a área de sustentação.
- Pesquisadores da NASA apresentaram em 1959 a ideia do duplo pivô, em que a raiz da asa poderia se mover para dentro ou para fora ao se mudar o ângulo. Para isso, seria necessário um anteparo (“shoulder”) que manteria as partes móveis afastadas da fuselagem e também poderia ter função de aerofólio.
- O conceito do “shoulder” não estava bem desenvolvido, e os projetistas da General Dynamics não o fizeram suficientemente largo (ou aerodinamicamente eficiente). Este erro só foi corrigido no caça F-14 Tomcat.

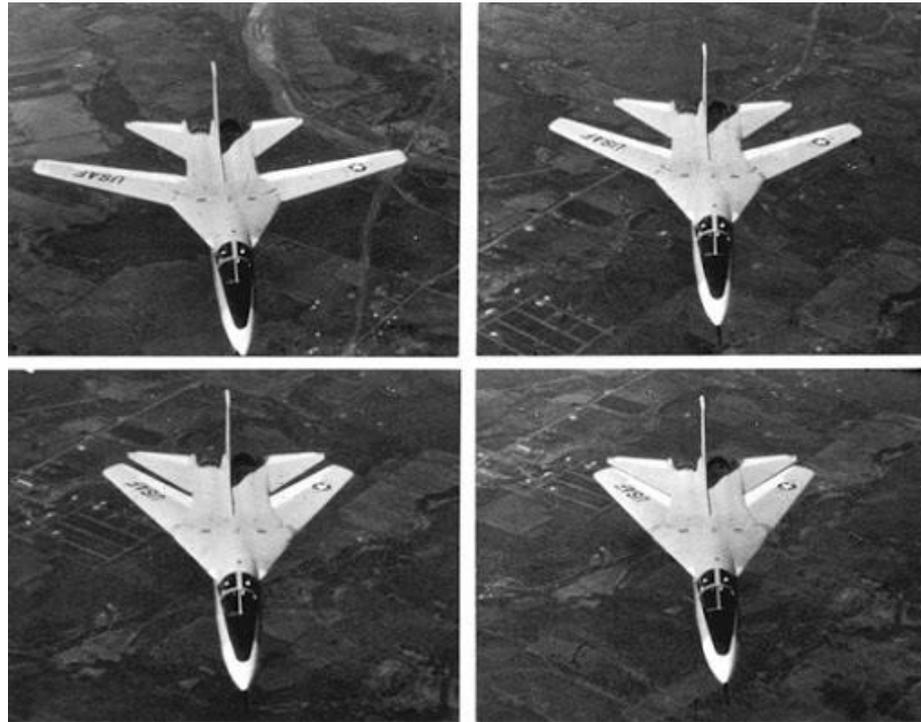
Um F-111 Aardvark da RAAF. Os Estados Unidos e a Austrália foram os únicos países a operar este avião militar “multitarefa”.



O DESAFORTUNADO F-111

Asas de Geometria Variável

- O F-111 foi o primeiro avião de série a usar asas de geometria variável. Seus projetistas tiveram mais a aprender, e cometeram mais erros, do que aqueles que os sucederam. O ângulo de suas asas podia variar de 16° a $72,5^\circ$.



O DESAFORTUNADO F-111

Novas Ligas Metálicas

- Vários componentes do F-111, entre eles as asas de geometria variável, trouxeram novos desafios aos engenheiros: encontrar materiais para resistir às altas tensões envolvidas (o avião deveria suportar acelerações de até 7g).
- Para o suporte das asas foi escolhido o aço D6ac, material novo na época e ainda não suficientemente testado em aviões.
- Em dezembro de 1969 um F-111 com apenas 104 horas de vôo caiu devido à fratura do suporte da asa esquerda durante a retomada de um mergulho, matando o piloto.
- A análise dos destroços revelou que um pequeno defeito de forjamento (não detectado nas inspeções) originou uma trinca que cresceu por fadiga apenas 0,44mm quando causou a fratura do suporte da asa.

Composição do aço D6ac (% peso):

0,42-0,48 C

0,90-1,20 Cr

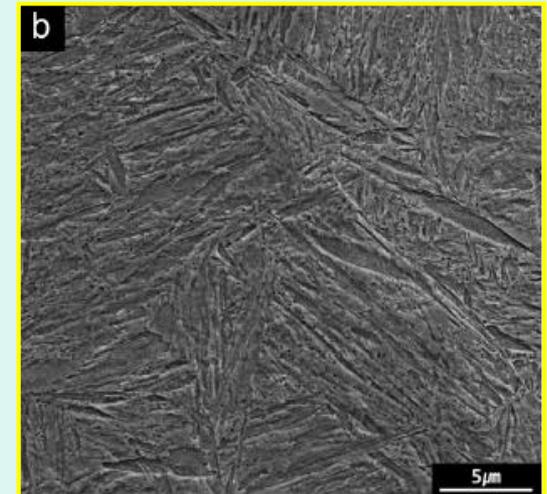
0,90-1,10 Mo

0,60-0,90 Mn

0,40-0,70 Ni

0,07-0,15 V

Microestrutura do aço D6ac temperado após austenitização a 1.000 °C (MEV)



O DESAFORTUNADO F-111

Estrutura Tolerante aos Danos

- O projeto do F-111 foi baseado na filosofia “Safe Life”, cujo objetivo principal é levar em conta o efeito das cargas cíclicas na estrutura do avião. Contudo, este projeto não leva em conta o efeito de uma trinca (“rogue flaw”), introduzida em um avião específico e que não seja detectada nas inspeções não-destrutivas.
- A Mecânica da Fratura trata do efeito de pequenas trincas no material. Mas o F-111 já estava projetado e fabricado – tarde demais para uma nova filosofia de projeto. O comitê que investigou a falha recomendou que **todos** os F-111 fossem submetidos a um ensaio de resistência à temperatura de -40°C , o “Low Temperature Proof Test”.

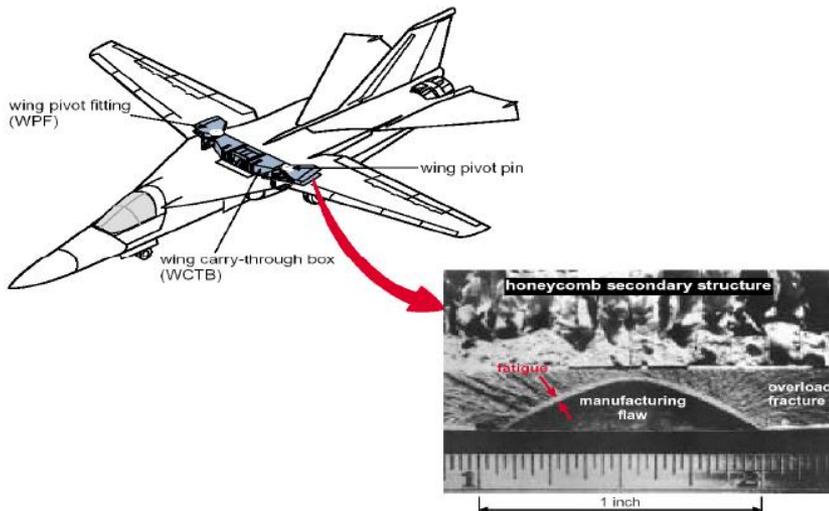


O F-111 foi o único avião na história que dependeu do “Cold Proof Test” para a sua operação segura.

O DESAFORTUNADO F-111

Triunfo sobre a Adversidade

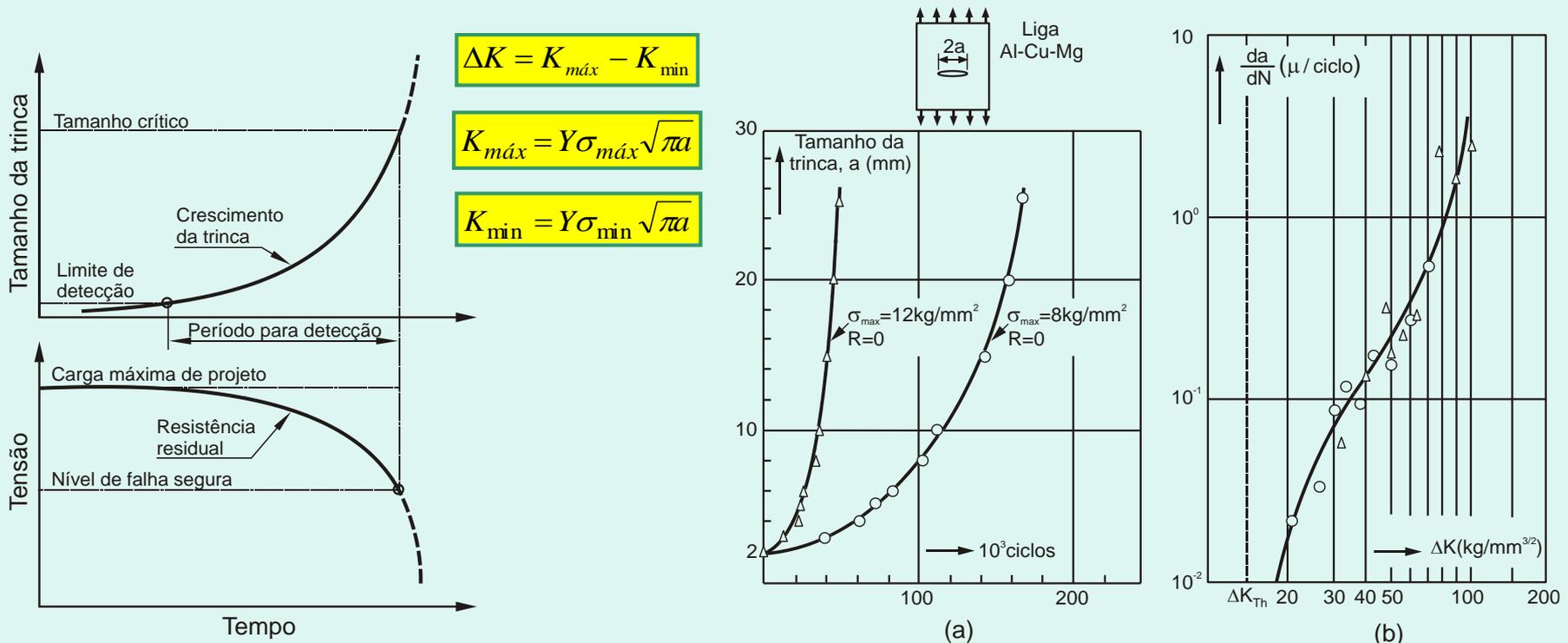
- O caso do F-111 levou a USAF a desenvolver o conceito de projeto tolerante ao dano, em que falhas, tais como uma trinca de 0,05 polegada, são assumidas existir *a priori* em um componente crítico. O componente deve tolerar este defeito, resistindo às cargas e sobrecargas de operação normal. O defeito não pode crescer até o tamanho crítico antes da próxima inspeção. Critérios de crescimento da trinca são usados para estabelecer o intervalo entre as inspeções.
- Após a adoção do “Cold Proof Test”, nenhum outro F-111 caiu devido a falha estrutural em mais de 30 anos de operação.



PROPAGAÇÃO DE TRINCAS SOB CARREGAMENTOS CÍCLICOS

Tolerância ao Dano

- Previsão da vida restante de peças contendo trincas.
- Inspeção não-destrutiva.
- Conhecer a velocidade de crescimento da trinca.
- Relação entre da/dN e ΔK sob amplitude constante.



PROPAGAÇÃO DE TRINCAS SOB CARREGAMENTOS CÍCLICOS

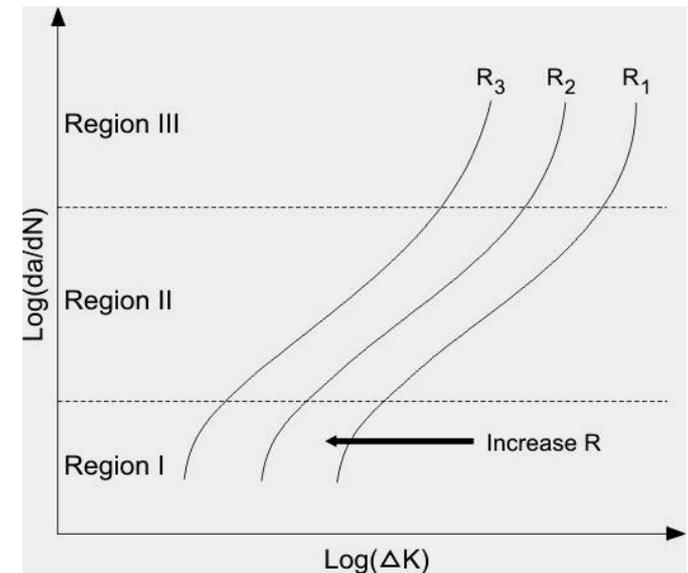
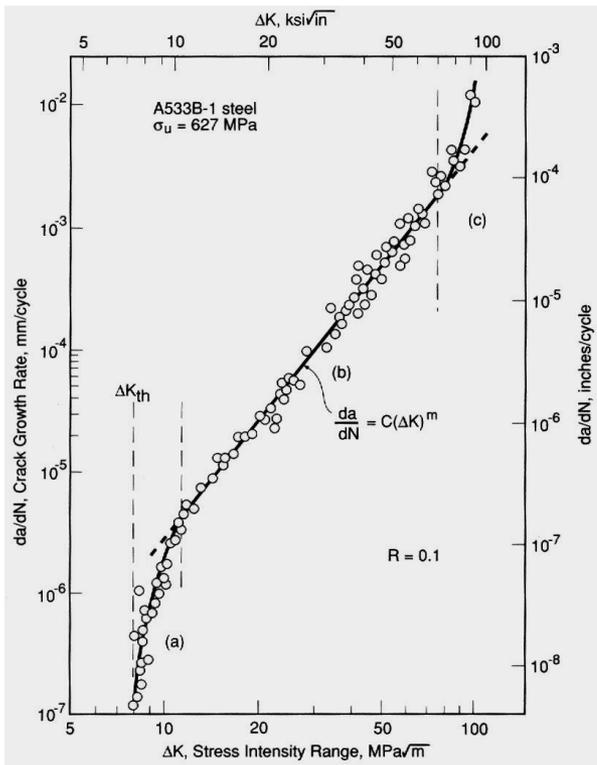
Curva da/dN versus ΔK

- Divisão em três regiões.
- Modelo de Paris & Erdogan para Região II.
- Efeitos de Assimetria (razão R)

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^n$$

$$R = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

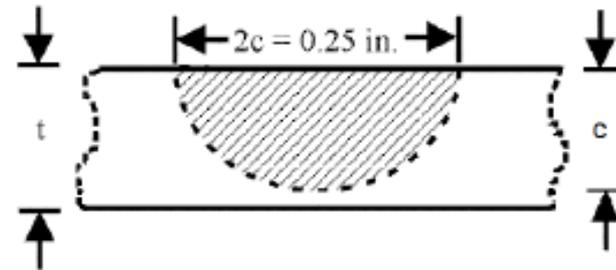
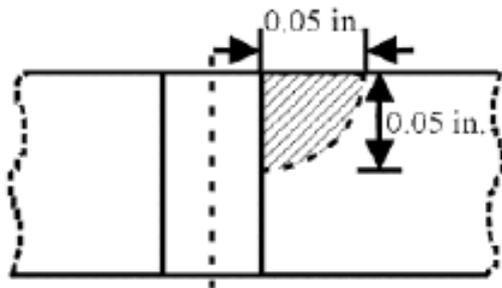
Corpo de prova do tipo painel M(T)



PROJETO TOLERANTE AO DANO

Conceito de Tolerância ao Dano

- TD: “Capacidade de uma estrutura em resistir a carregamentos em presença de defeitos causados por fadiga, corrosão ou dano acidental até que tais defeitos sejam detectados e reparados”.
- Esta teoria estabelece que uma estrutura já entra em serviço com um “dano inicial”. O tamanho e posição de tais danos são determinados por norma. Ex.: *Damage Tolerant Design Handbook, H.A. Wood and R.M. Engle Jr., USAF, 1979.*
- Aplicação: o crescimento de trincas de fadiga a partir de furos de rebite é responsável por grande parte das falhas de componentes de aviões.
- Exemplos de caracterização do dano inicial:



PROJETO TOLERANTE AO DANO

Aplicação dos conceitos de Tolerância ao Dano

- A análise do crescimento de trincas pode ser feita de duas formas: por meio de um procedimento analítico ou usando softwares especializados, como o AFGROW.
- As cargas de serviço podem apresentar grande variação no tempo. Em asas, por exemplo, podem ter uma forma bastante aleatória, devido a efeitos de turbulências e rajadas de vento. Para usar os espectros de carregamento é requerida uma normalização, determinando-se uma tensão média e uma amplitude constante.
- Procedimento analítico:

1. Initial damage, a_0
2. Determination of ΔK using the chosen spectrum's stress range ($\Delta\sigma$):
3. Determination of da/dN applying the Growth Law in use (Paris, Forman, etc.);
4. Obtaining a medium (arithmetic or geometrical) of two consecutive values of da/dN
5. Determination of number of cycles for the current increase in crack length:

$$\Delta K = \beta \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\frac{\overline{da}}{dN}$$

$$\Delta N = \Delta a / \left[\frac{\overline{da}}{dN} \right]$$

6. The number of cycles, N , is obtained adding the value for ΔN determined.
7. Adding an increment to the crack size – Δa ;
8. The process is then repeated from point 2 until a failure criterion is reached, whether based on Residual Strength, a_{crit} , or based on the fracture toughness of the material, K_{IC} .

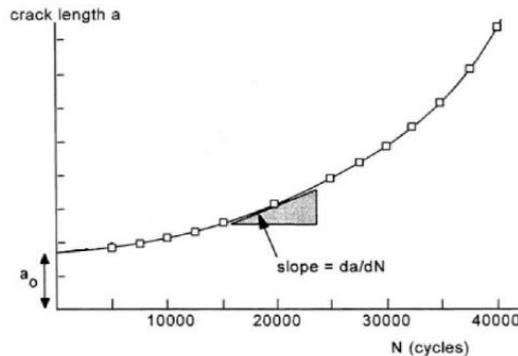
PROJETO TOLERANTE AO DANO

Requerimentos de inspeção

- O objetivo da inspeção é detectar uma trinca enquanto ainda cresce no regime estável, portanto a definição do tempo para a primeira inspeção e dos intervalos entre inspeções é uma questão fundamental. Inspeções visuais são o principal método. Inspetores devem detectar trincas de 2" em inspeções gerais e de 0,25" em inspeções visuais detalhadas.
- É importante definir os *scatter factors* para os períodos de inspeção. O principal objetivo é conceder várias oportunidades de detecção da trinca de modo a prevenir a falha. Há dois tipos de scatter factors: um relativo à vida total da estrutura (j_1) e outro relativo ao número de inspeções recorrentes a serem feitas após a primeira inspeção (j_2).

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$$

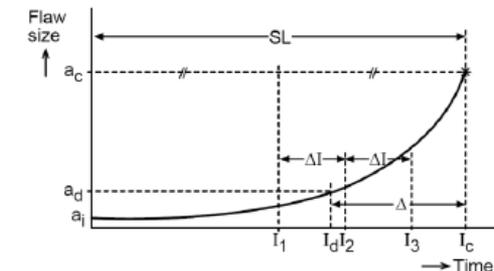
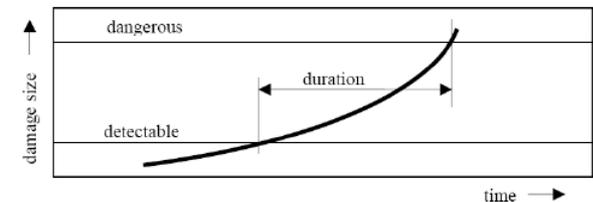
$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F \Delta K^{m_F}}{(1-R)K_{IC} - \Delta K}$$



K_1, K_2	Defined as 2, to imposing inspections at least on half the component's life
K_3	1 for low humidity environment 1.5 for medium humidity environment 2 for high humidity environment
K_4	Special factor to account for unknowns (agreed with Aeronautical Authorities to ensure safety)

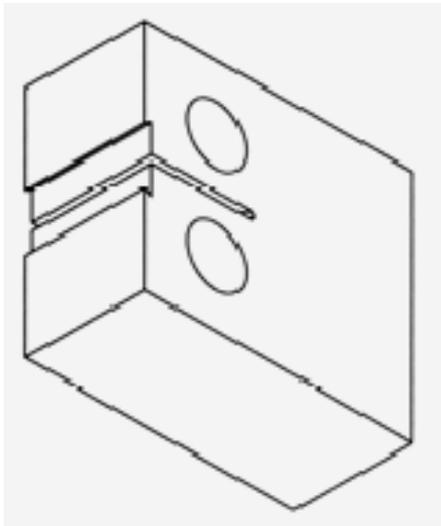
Table 1 – Life Reduction Factor [19]

$$j_1 = K_1 \times K_3 \times K_4 \quad j_2 = K_2 \times K_3 \times K_4$$

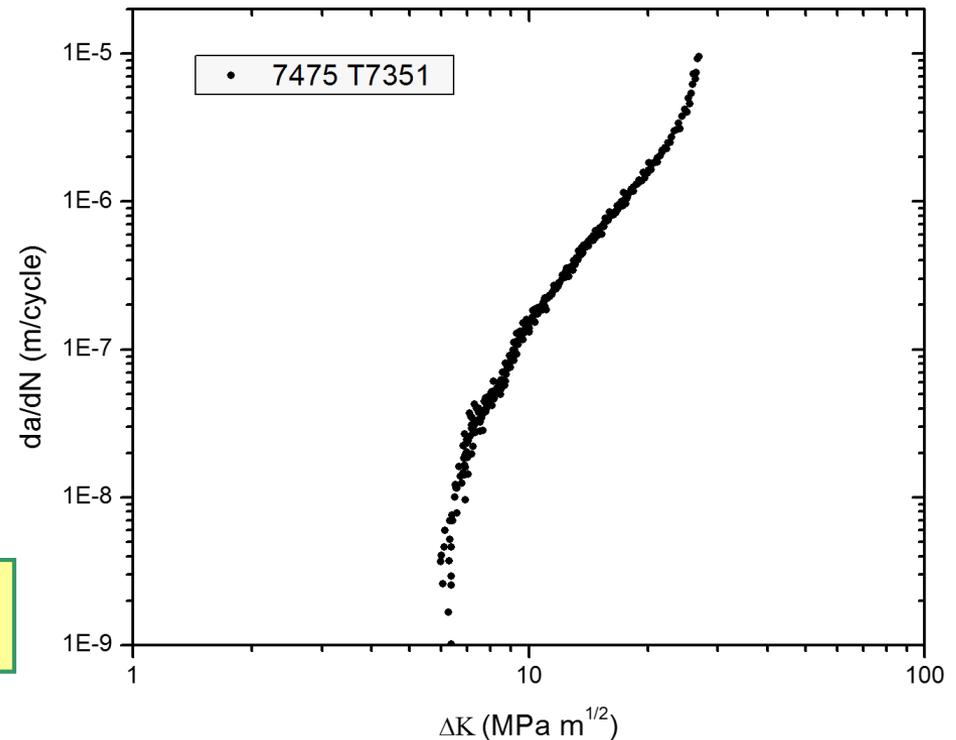


MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

- Ensaio em liga de alumínio AMS 7475 T7351 (realizados na EESC/USP)
- Foram usados corpos-de-prova CT (espessura 25 mm), orientação T-L
- Ensaio de propagação da trinca por fadiga:
 - Amplitude constante (ΔK crescente)
 - K decrescente para propagação “near-threshold”



*Pontos experimentais dos dois ensaios
são superpostos em um único gráfico*



MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

- Baseando-se na equação de Paris, diversos modelos têm sido propostos para descrever a curva sigmoidal completa.
- Um dos mais conhecidos e empregados na descrição do efeito de R é o modelo de Forman.
- O modelo de Forman modificado busca descrever as 3 regiões, englobando também o efeito de R.

MODELO DE FORMAN:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K}$$

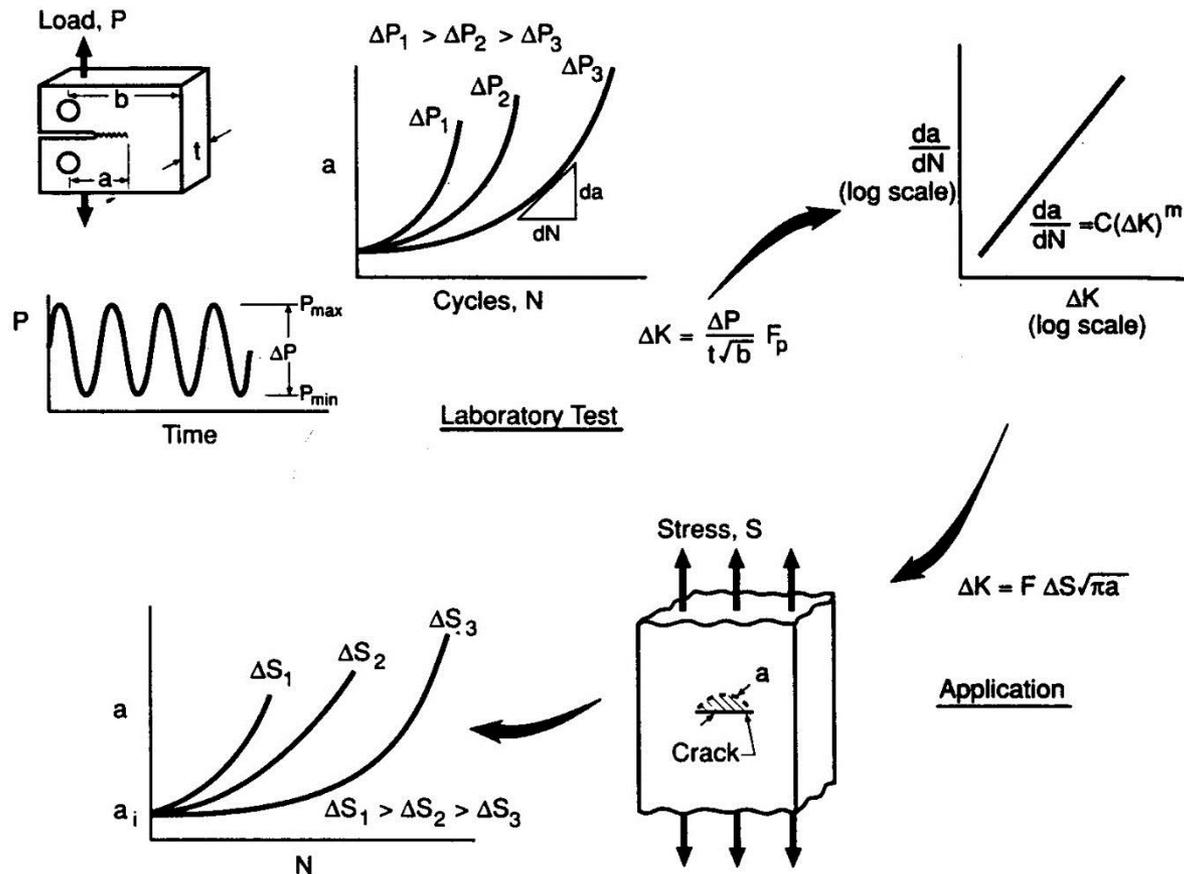
MODELO DE FORMAN MODIFICADO:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1-R)^m \Delta K^n (\Delta K - \Delta K_{th})^p}{((1-R)K_c - \Delta K)^q}$$

Region I
Region II
Region III
R-Effect

Al-Rubaie et al tested various FCG models for the complete sigmoidal curve and observed that the Modified Forman provides the best fit to FCG data (fixed $R = 0.5$)

RESUMO DO MÉTODO da/dN

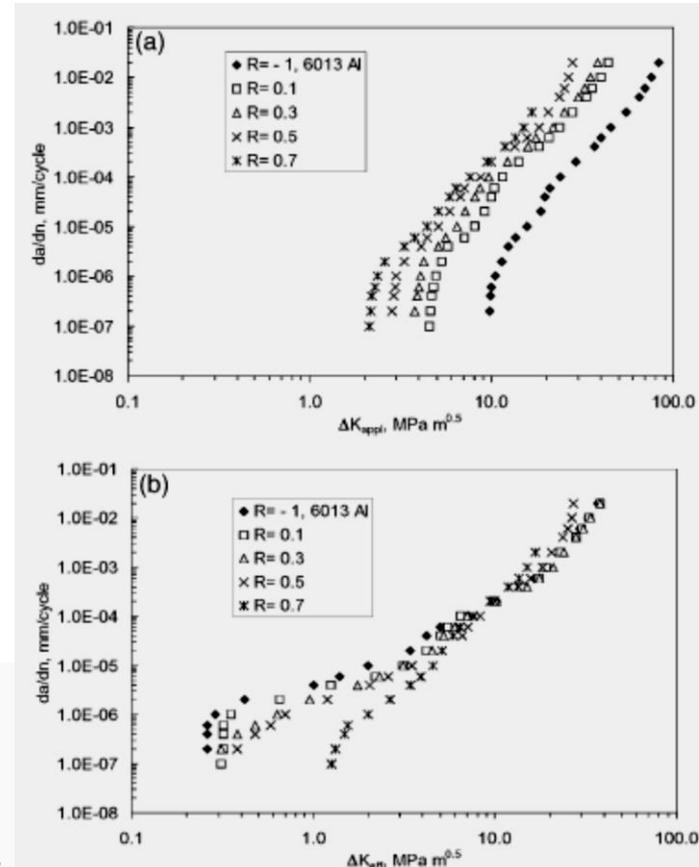
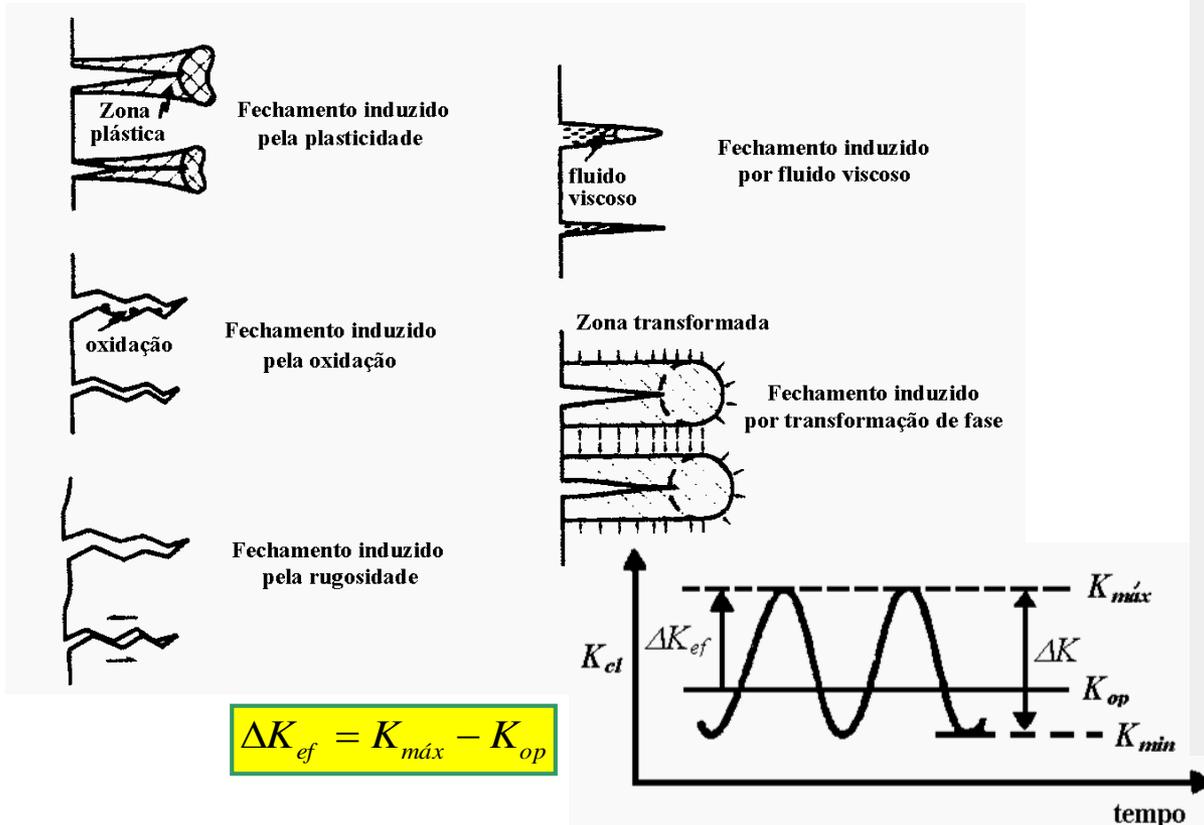


O FECHAMENTO DA TRINCA

Os Conceitos de fechamento da trinca e ΔK_{ef}

- Elber: As faces permanecem em contato durante parte do ciclo.
- Fatores que contribuem para o fechamento.
- Variação efetiva do Fator Intensidade de Tensão.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^n$$



O FECHAMENTO DA TRINCA

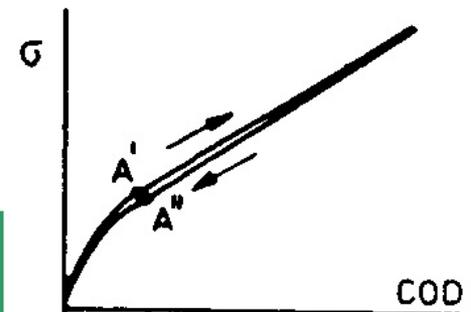
Métodos para avaliar o fechamento

- Possibilidade de estimativa teórica: restrita à tensão residual?
- Medidas experimentais do fechamento:
 - ASTM E647: "Compliance Offset Method"
 - NASA Tech. Mem. 109032 (november 1993)
 - Alguns métodos dependem da interpretação
- A forma usual de se avaliar o fechamento baseia-se nas medidas do COD.



Corpo-de-prova com medidor de COD ("clip gage") posicionado

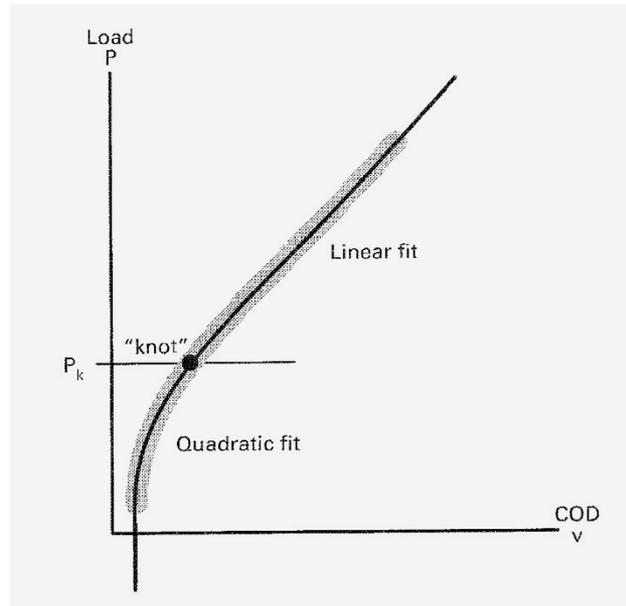
Numa trinca de fadiga real, observa-se uma parte não-linear



O FECHAMENTO DA TRINCA

Método da “Spline Linear-Quadrática” (MTS FCG Application, 2000)

- Vantagem: automatizado, com nenhuma ou pouca interferência do usuário
- Baseia-se na realização de dois ajustes numéricos com os pontos experimentais:
 - Parte superior: ajuste linear
 - Parte inferior: equação de segundo grau
 - O encontro das duas curvas (nó) é chamado P_K
- Objetivo do Método: encontrar um valor ótimo $P_K = P_{cl}$



O FECHAMENTO DA TRINCA

Roteiro para o Método da “Spline Linear-Quadrática”

- Emprega-se uma faixa de valores de P_K entre as cargas máxima e mínima
- Realiza-se inicialmente o ajuste linear
- Em seguida, impõe-se que o ajuste quadrático encontre o linear em $P = P_K$

Passo-a-Passo:

1. Para um dado P_K é obtido o ajuste linear dos pontos: $\{(P_i, V_i), P_i \geq P_K\}$
2. Esta “função de referência” tem a forma: $V_{ref}(P) = L_0 + L_1 P$
3. Em seguida, calcula-se a função quadrática dos pontos: $\{(P_i, V_i), P_i < P_K\}$
4. Esta função tem a forma: $V_Q(P) = Q_0 + Q_1 P + Q_2 P^2$
5. As condições para que as duas curvas se encontrem em P_K são:

$$\left. \frac{d}{dP} (Q_0 + Q_1 P + Q_2 P^2) \right|_{P=P_K} = \left. \frac{d}{dP} (L_0 + L_1 P) \right|_{P=P_K}$$

$$(Q_0 + Q_1 P + Q_2 P^2) \Big|_{P=P_K} = (L_0 + L_1 P) \Big|_{P=P_K}$$

O FECHAMENTO DA TRINCA

Roteiro para o Método da “Spline Linear-Quadrática” (cont.)

Passo-a-Passo (cont.):

6. *Ficamos com:*

$$\begin{cases} Q_1 + 2Q_2P_k = L_1 \\ Q_0 + Q_1P_k + Q_2P_k^2 = L_0 + L_1P_k \end{cases}$$

7. *O ajuste linear é fixado; forçaremos a função quadrática a se encontrar com ele.*

8. *Temos 2 equações e 3 incógnitas. Para impor a igualdade, tomamos o valor de Q_2 (ou seja, a curvatura) anteriormente calculado para os pontos $P_i < P_K$ e determinamos Q_0 e Q_1 a partir das condições impostas:*

$$\begin{cases} Q_1 = L_1 - 2Q_2P_k \\ Q_0 = L_0 + (L_1 - Q_1)P_k - Q_2P_k^2 \end{cases}$$

O FECHAMENTO DA TRINCA

Roteiro para o Método da “Spline Linear-Quadrática” (cont.)

Passo-a-Passo (cont.):

9. Temos agora resultados quase ótimos de L_0, L_1, Q_0, Q_1 e Q_2 .
10. O próximo passo é comparar os resultados para diferentes valores de P_K .

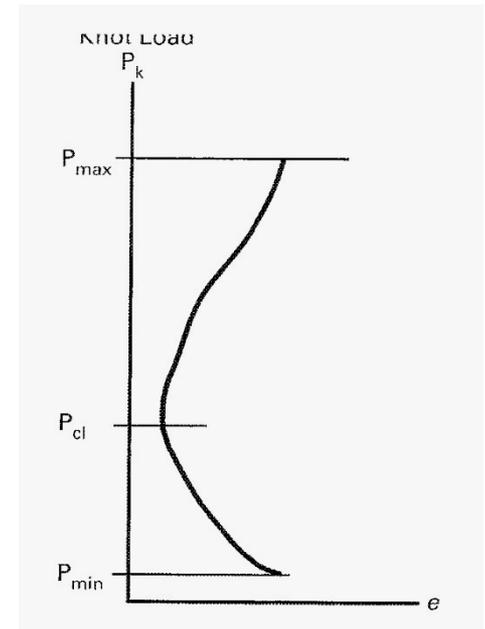
Isto é feito por meio da soma dos quadrados dos resíduos:

$$e = \frac{1}{(v_{max} - v_{min})^2} \sum_{i=1}^N \begin{cases} (V_Q(P_i) - V_i)^2, & P_i < P_k \\ (V_{ref}(P_i) - V_i)^2, & P_i \geq P_k \end{cases}$$

11. Obtendo-se os valores de e para diversos P_K ,
pode-se fazer a minimização de e em função de P_K .

Assim, a carga de fechamento será

$P_{cl} = P_K$ tal que e seja mínimo.

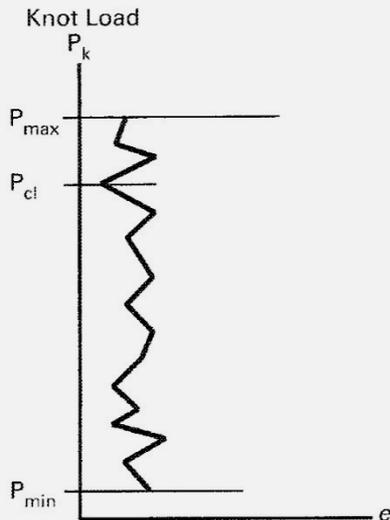


O FECHAMENTO DA TRINCA

Problemas com o fechamento

- Métodos de medida encontram valores discrepantes: não há consenso.
- Mesmo o método automatizado pode resultar em valores errôneos.
- Dificuldade em modelar o fechamento não permitem encontrar uma função simples e precisa para determinar ΔK_{ef} .

Quando o fechamento é desprezível, anomalias devidas ao ruído podem resultar em valores errôneos



$$\Delta K_{ef} = U \Delta K$$

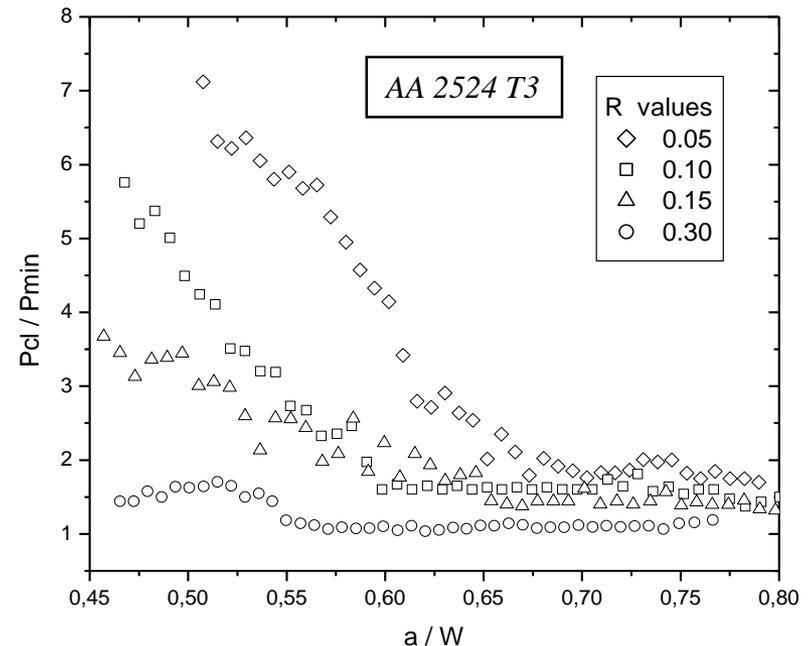
$$U = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{cl}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}$$

Para Al2024:

$$U = 0,5 + 0,4R$$

Funciona??

Medidas da carga de fechamento em função do tamanho da trinca



PROPAGAÇÃO DA TRINCA COMO FUNÇÃO DE 2 PARÂMETROS

Modelagem do efeito de R na taxa de crescimento da trinca

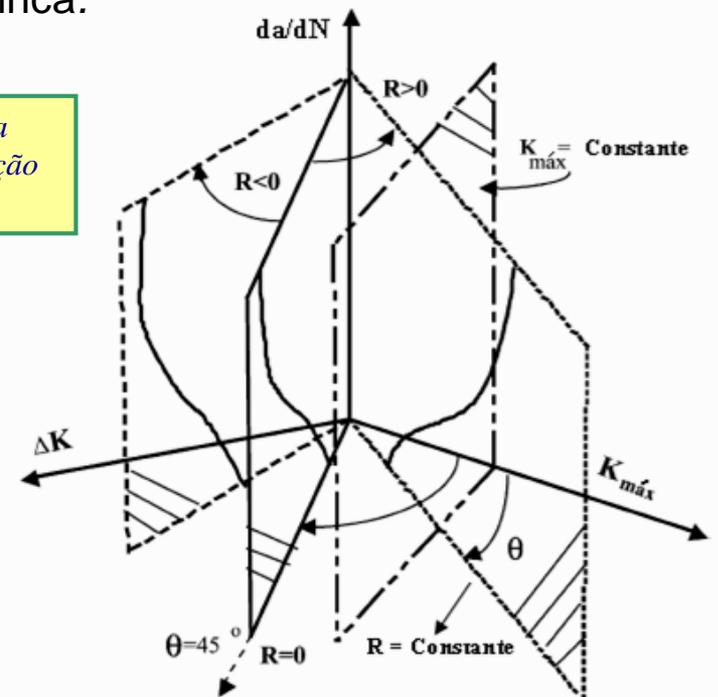
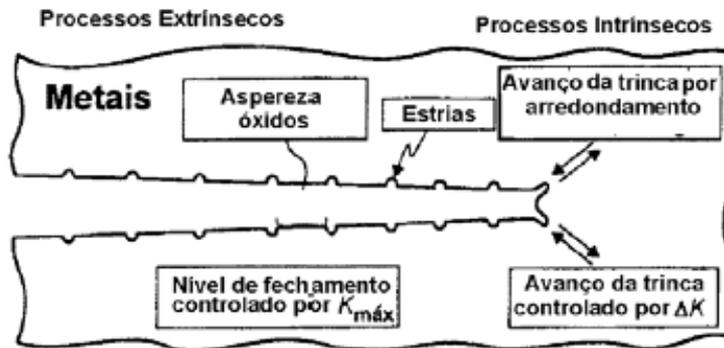
- Dois parâmetros definem um ciclo de carregamento.
- Busca por equações que modelem a propagação da trinca com um único grupo de constantes de ajuste, sem necessidade de considerar o fechamento.
- Enfoque Unificado de Sadananda e Vasudevan: ΔK e $K_{m\acute{a}x}$ são as **duas forças motrizes** para o crescimento da trinca.

Exemplo de modelo para a Região II

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n (1 - R)^{n(m-1)}$$

(Walker)

Representação em 3D da taxa da trinca como função de 2 forças motrizes

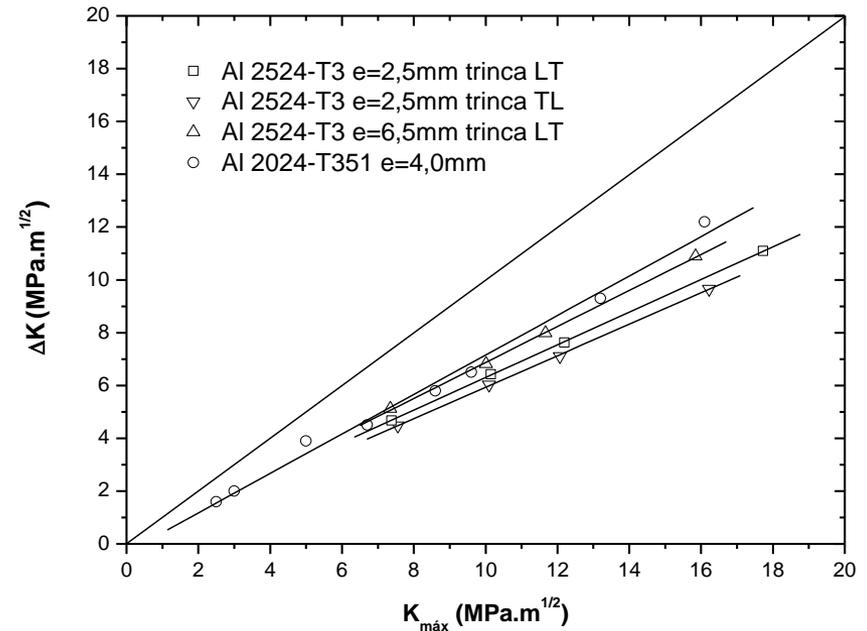
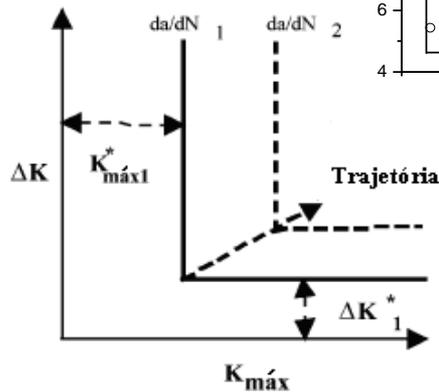
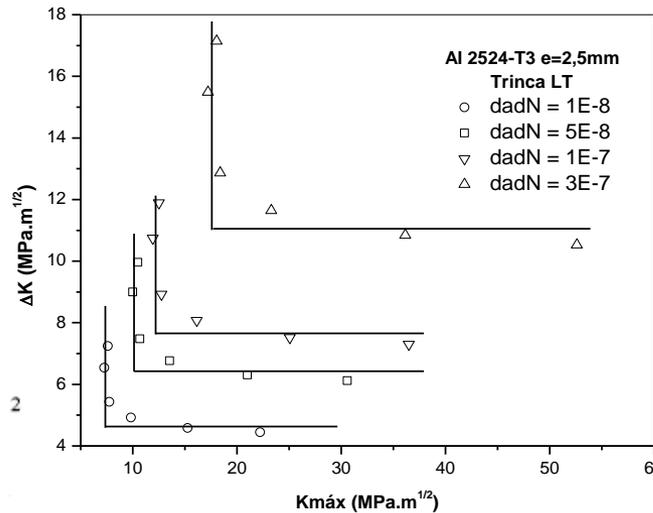


PROPAGAÇÃO DA TRINCA COMO FUNÇÃO DE 2 PARÂMETROS

Avaliação baseada no Enfoque Unificado

- Definição dos valores “threshold” ΔK^* e $K_{máx}^*$ para cada taxa de propagação.
- Gráficos de trajetória da trinca (efeitos ambientais)
- Modelo de dois parâmetros baseado no Enfoque Unificado:

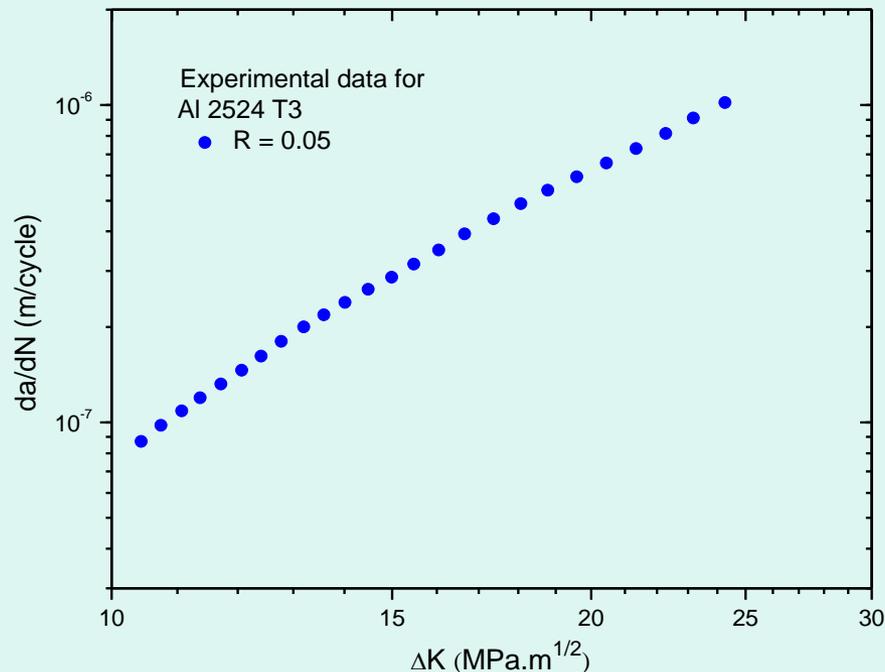
$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n (K_{máx})^m$$



MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

Motivação

- Modelos disponíveis apresentam limitações na descrição das taxas de trincas para uma faixa ampla de razões R com um único grupo de constantes.
- Curvas da/dN - ΔK para alguns materiais apresentam certo grau de não-linearidade
- Trabalho desenvolvido na EEL-USP (Adib & Baptista, 2007).



Considere pontos experimentais obtidos em um ensaio para dado R

MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

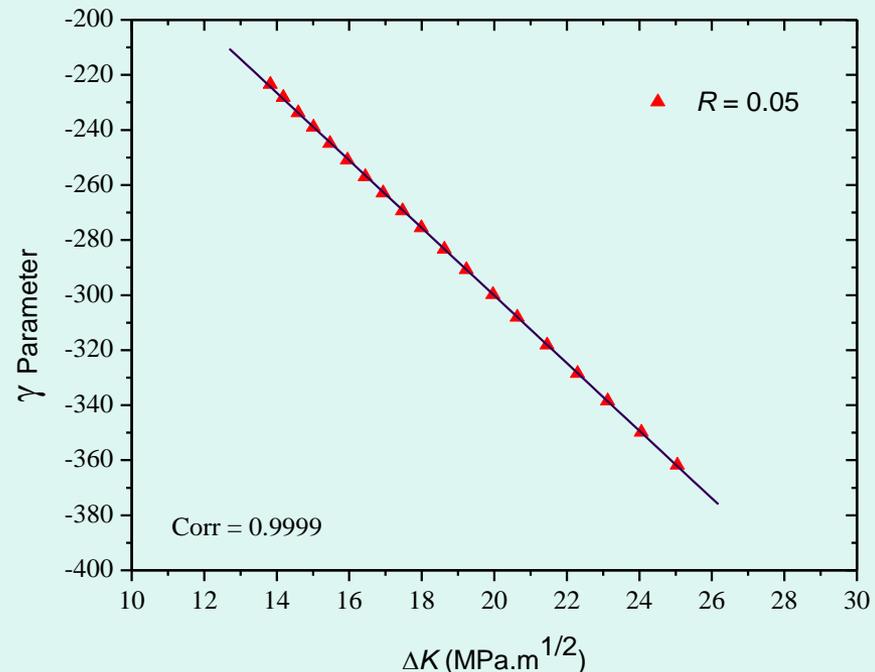
- Let the FCG rate be described by the following exponential equation:

$$\frac{da}{dN} = \exp\left(\frac{\gamma}{\Delta K}\right)$$

$$\left(\text{i. e. } \gamma = \ln\left(\frac{da}{dN}\right)\Delta K \right)$$

- The following linear relationship is obtained:

$$\gamma = \alpha\Delta K + \beta$$



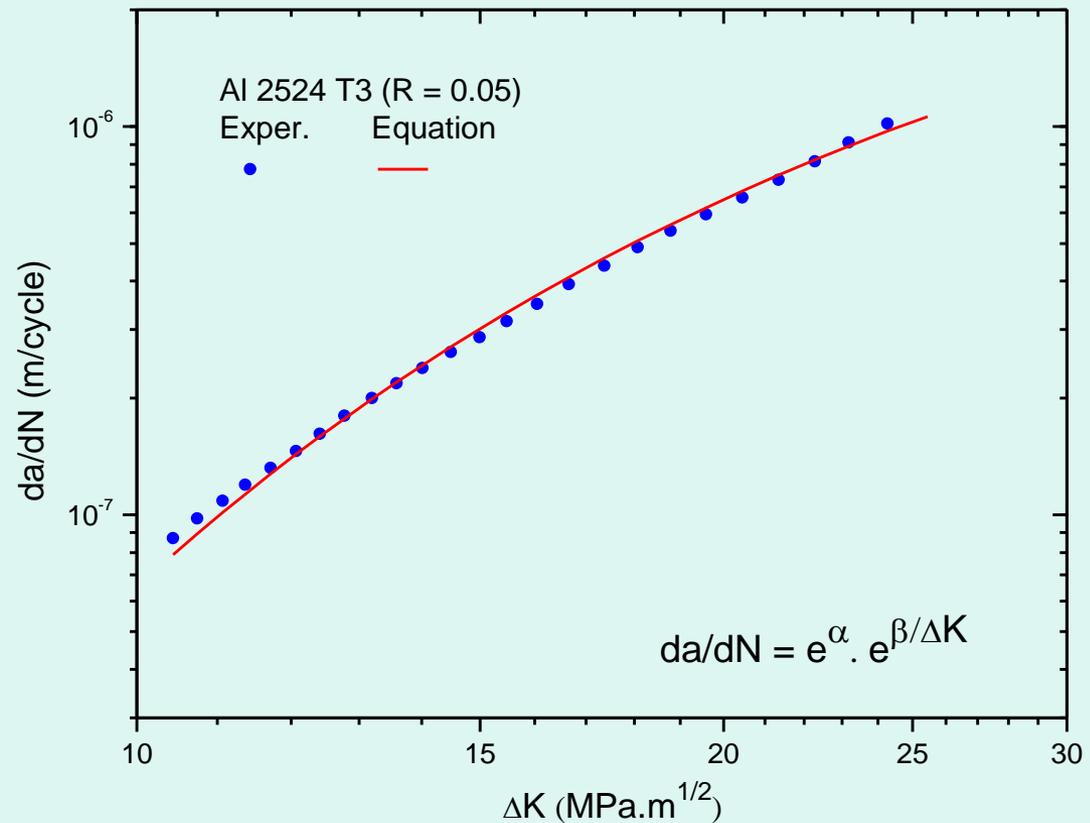
MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

- The equation is then written as:

$$\frac{da}{dN} = C \exp\left(\frac{\beta}{\Delta K}\right)$$

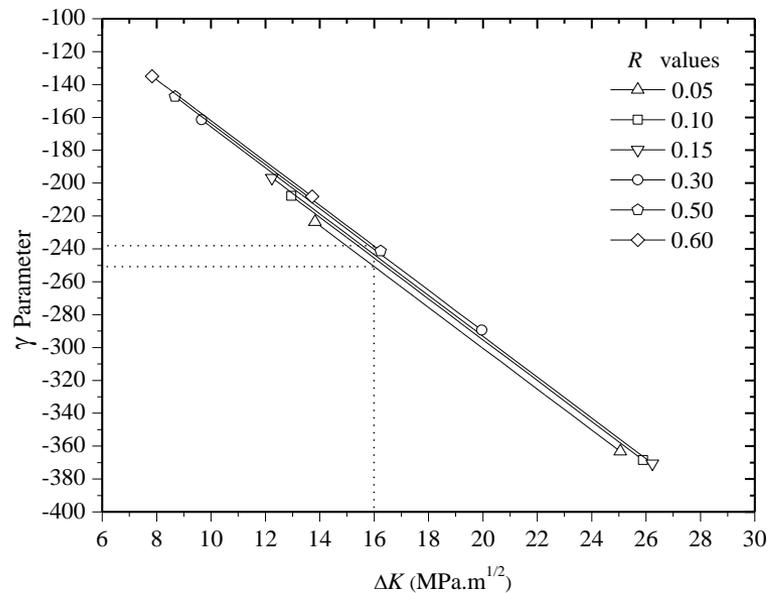
where

$$C = \exp(\alpha)$$



MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

- For a range of loading ratios:

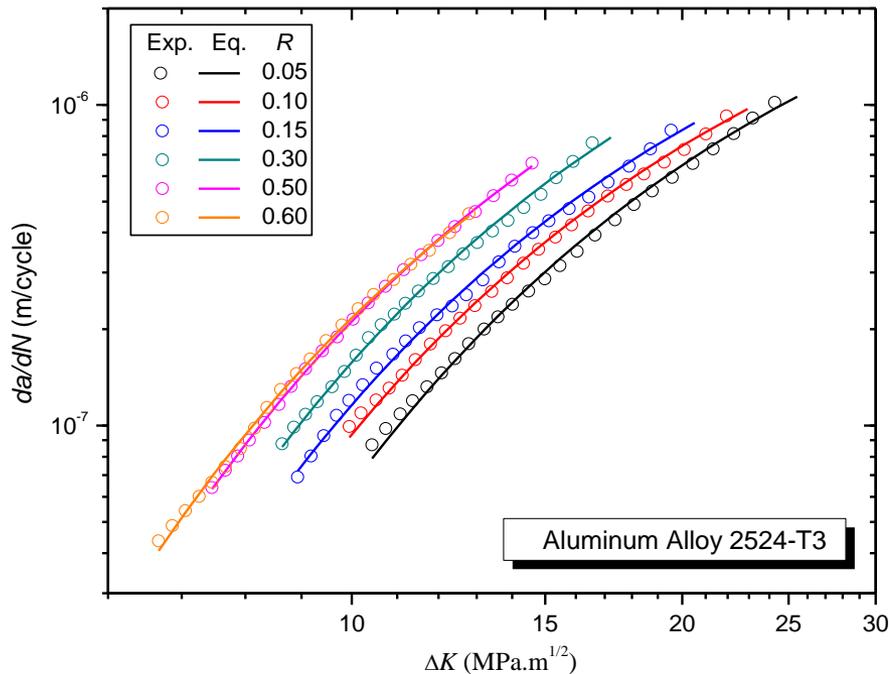


Fitting coefficients

R	α	β
0.05	-11.948	-45.999
0.10	-12.038	-41.441
0.15	-12.018	-39.519
0.30	-11.811	-38.545
0.50	-11.828	-35.414
0.60	-11.993	-33.519

MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

- For a range of loading ratios:

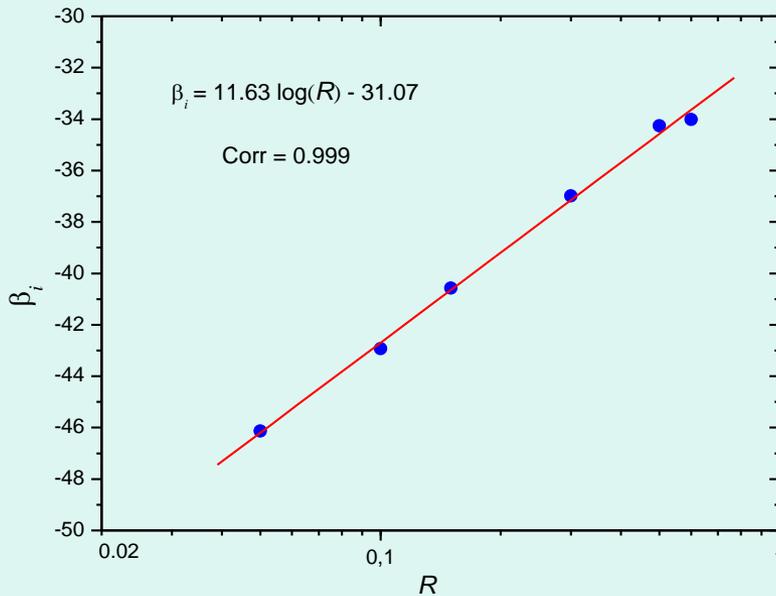


Fitting coefficients

R	α	β
0.05	-11.948	-45.999
0.10	-12.038	-41.441
0.15	-12.018	-39.519
0.30	-11.811	-38.545
0.50	-11.828	-35.414
0.60	-11.993	-33.519

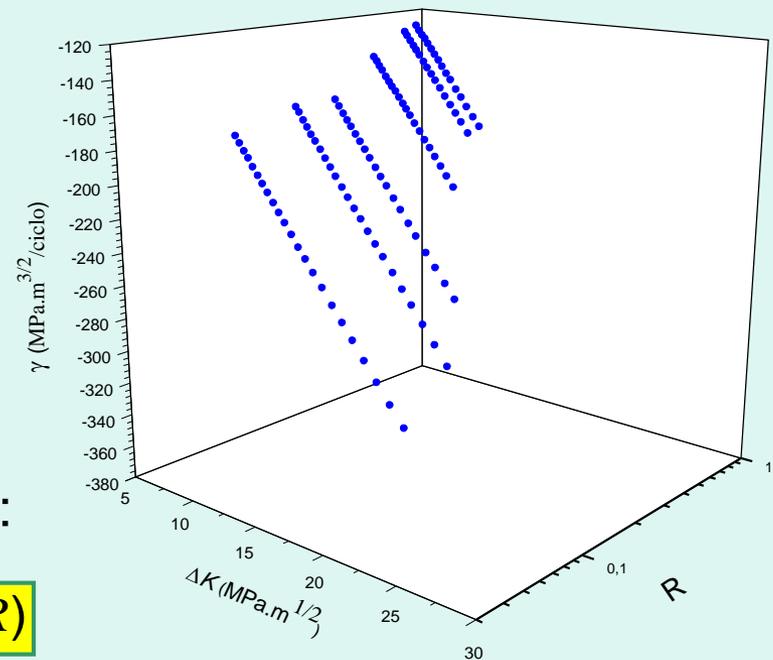
MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

- Taking $\alpha_{av} = -11.939$ and recalculating β , the following is obtained:



- Which means a plane in the 3-D plot:

$$\gamma = \alpha \Delta K + \beta_0 + \beta_1 \log(R)$$



MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

- Generalized exponential equation:

$$\frac{da}{dN} = C \exp\left(\frac{\beta_0 + \beta_1 \log(R)}{\Delta K}\right) \quad \text{where } C = \exp(\alpha)$$

- Linear regression in \mathbf{R}^3 space:

- Let r be the number of curves
- Let $p(j)$ be the number of experimental points of curve “ j ”, $j = 1, \dots, r$
- The logarithmic error for point “ i ” of curve “ j ” is:

$$E_{ij} = \ln\left(\frac{da}{dN}\right)_{ij} \Delta K_{ij} - \alpha \Delta K_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \log(R)_j$$

MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

- Linear regression in \mathbf{R}^3 space (*continued*):

- The total quadratic error is:

$$E_T = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{p(j)} (E_{ij})^2$$

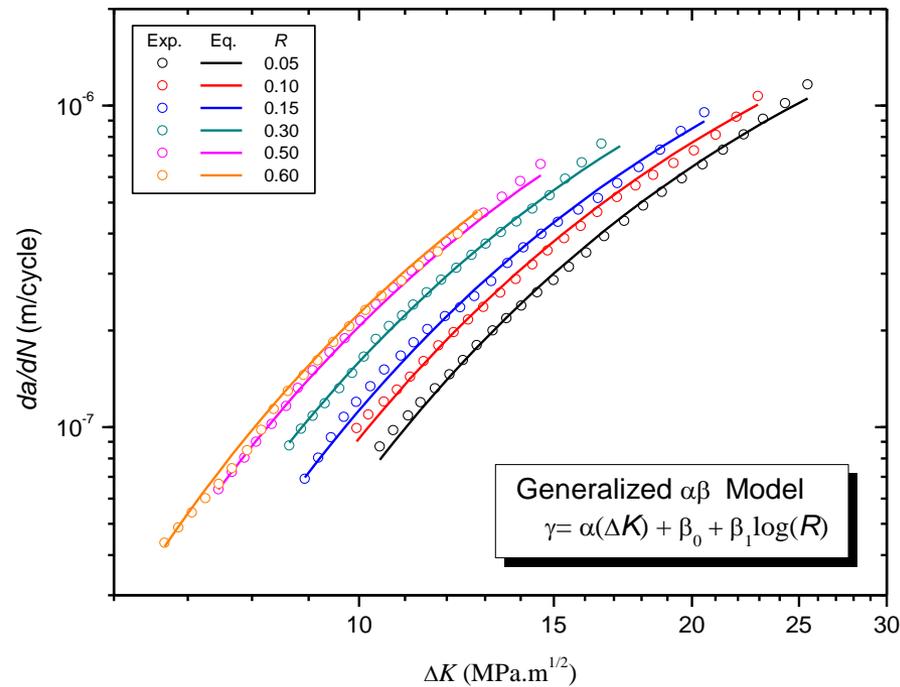
- Necessary minimum conditions (least square method):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_T(\alpha, \beta_0, \beta_1)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial E_T(\alpha, \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0 \\ \frac{\partial E_T(\alpha, \beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 \end{array} \right.$$

MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

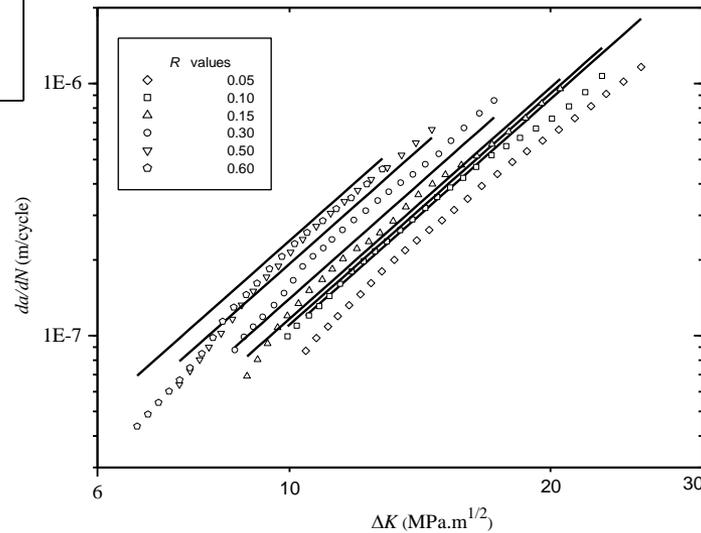
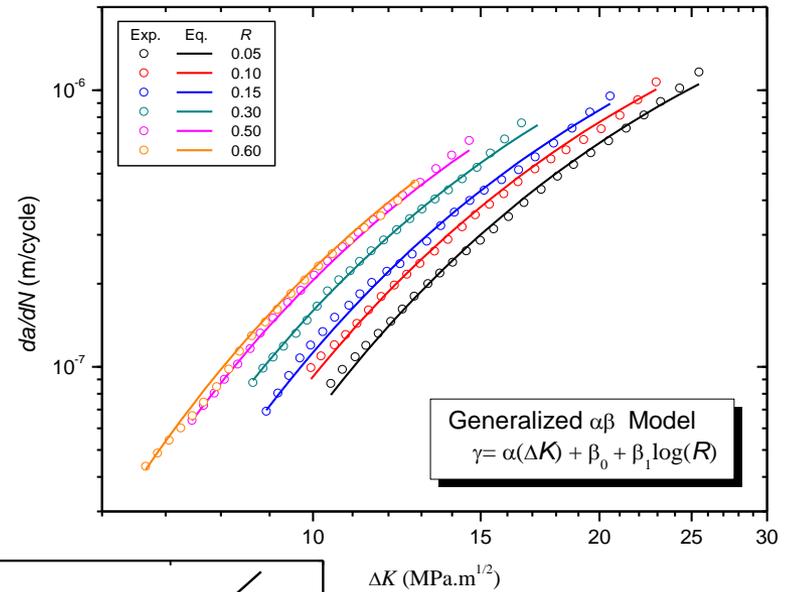
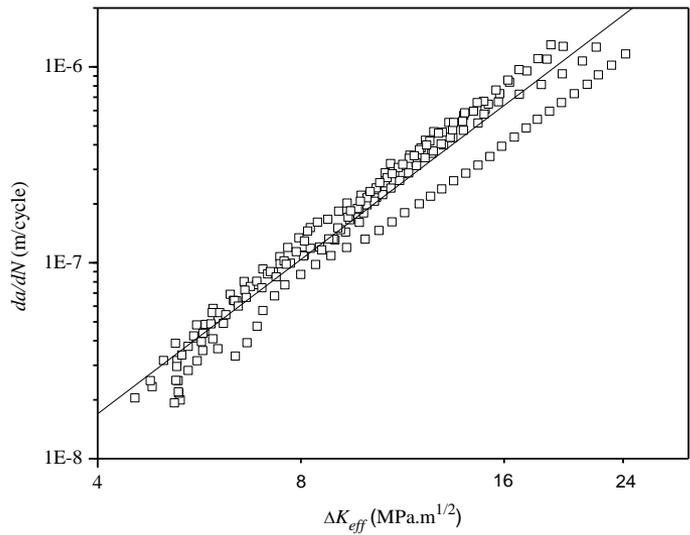
- A single group of fitting coefficients is determined:

$$\begin{cases} \alpha = -11.960 \\ \beta_0 = -30.879 \\ \beta_1 = +11.500 \end{cases}$$



MODELAGEM EXPONENCIAL DA REGIÃO II

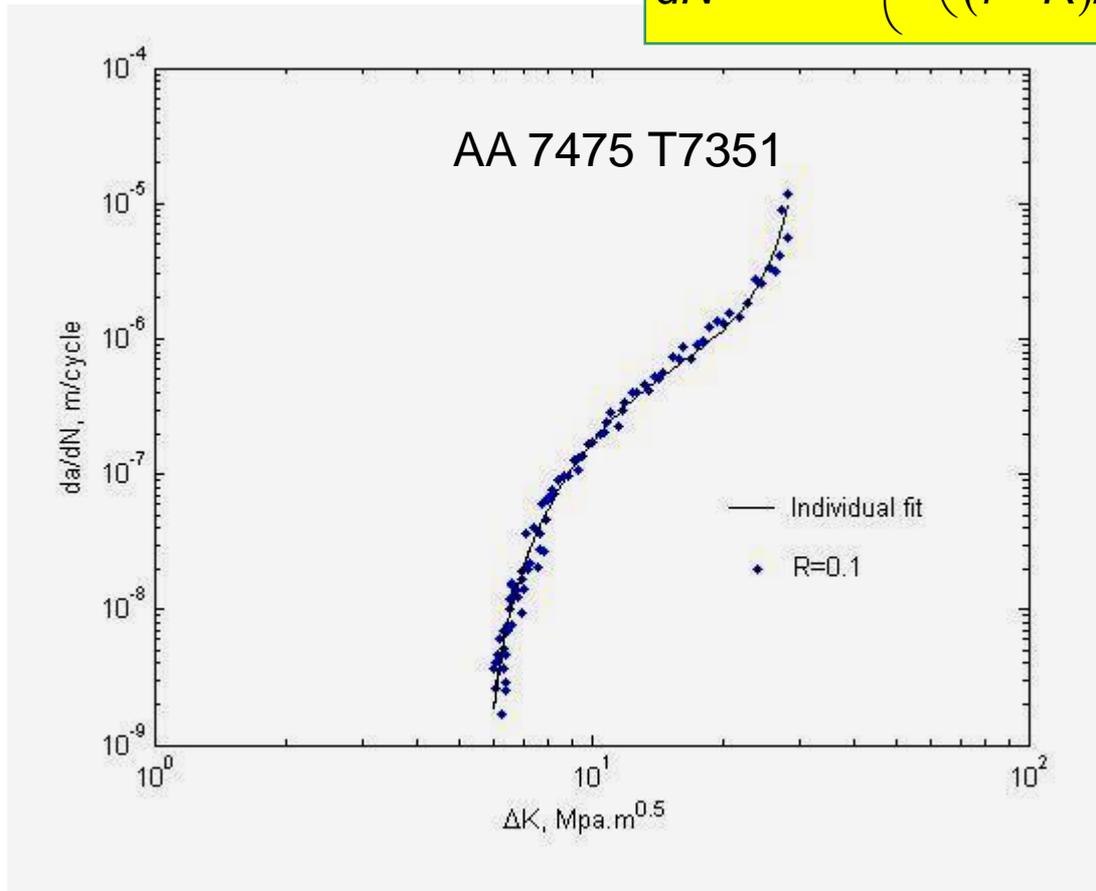
- Comparação de modelos :



MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

- Modificação do Modelo Exponencial (EEL/USP):

$$\frac{da}{dN} = C \exp \left(\beta \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{(1-R)K_c - \Delta K} \right)^\theta + \mu(\Delta K - \Delta K_{th}) \right)$$



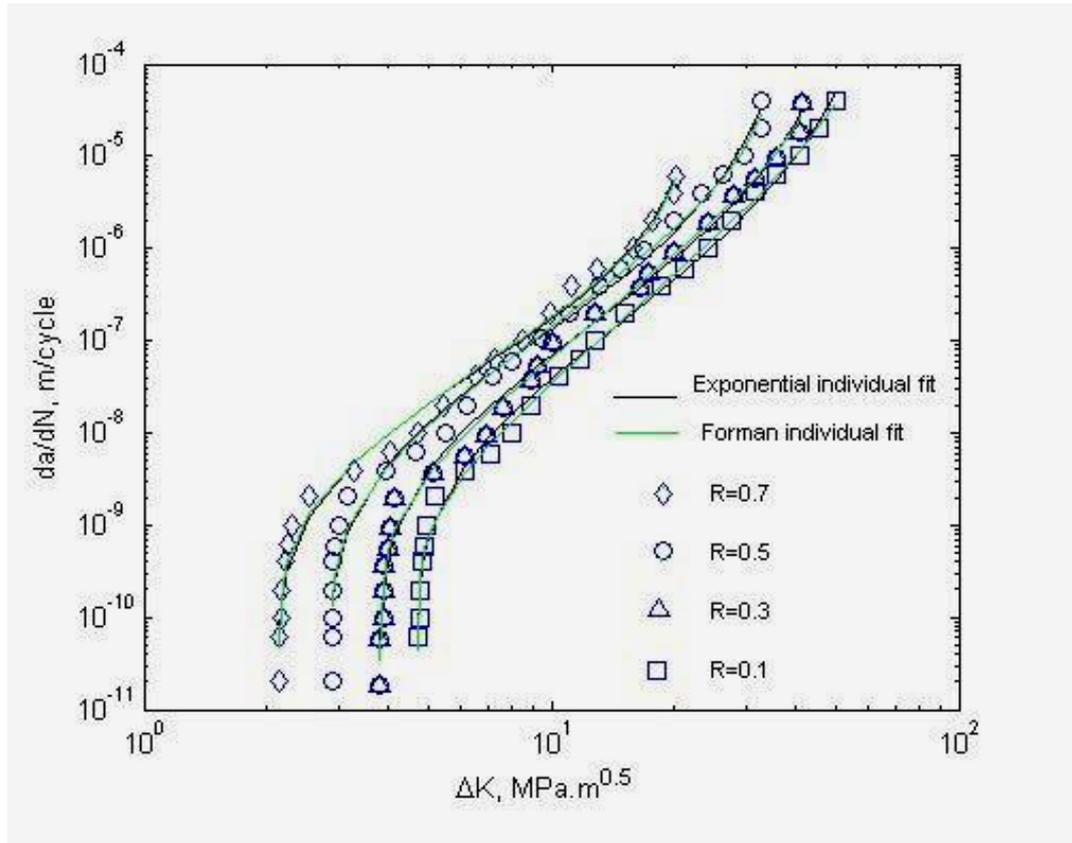
onde:

$$C = \exp(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -26.11 \\ \theta &= 0.25 \\ \beta &= -44.311 \\ \mu &= -0.4392 \end{aligned}$$

MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

- Aluminum Alloys 2324-T39, 6013-T651, 7055-T7511
- Crack growth data taken from literature
- Comparison: Exponential and Modified Forman Models

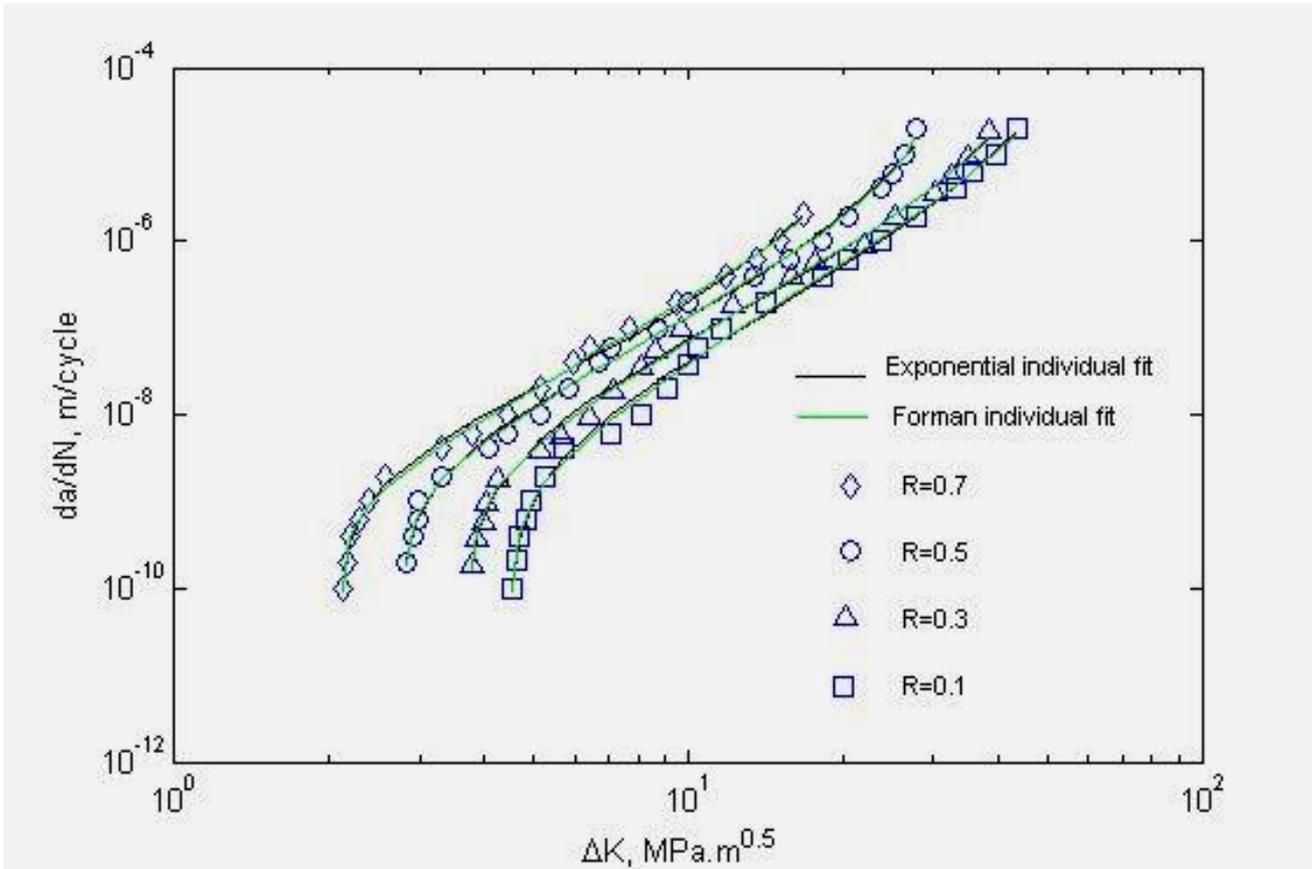


AA 2324-T39

Exponential Model:

R	α
0.1	-24.92
0.3	-25.11
0.5	-24.97
0.7	-25.44

MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

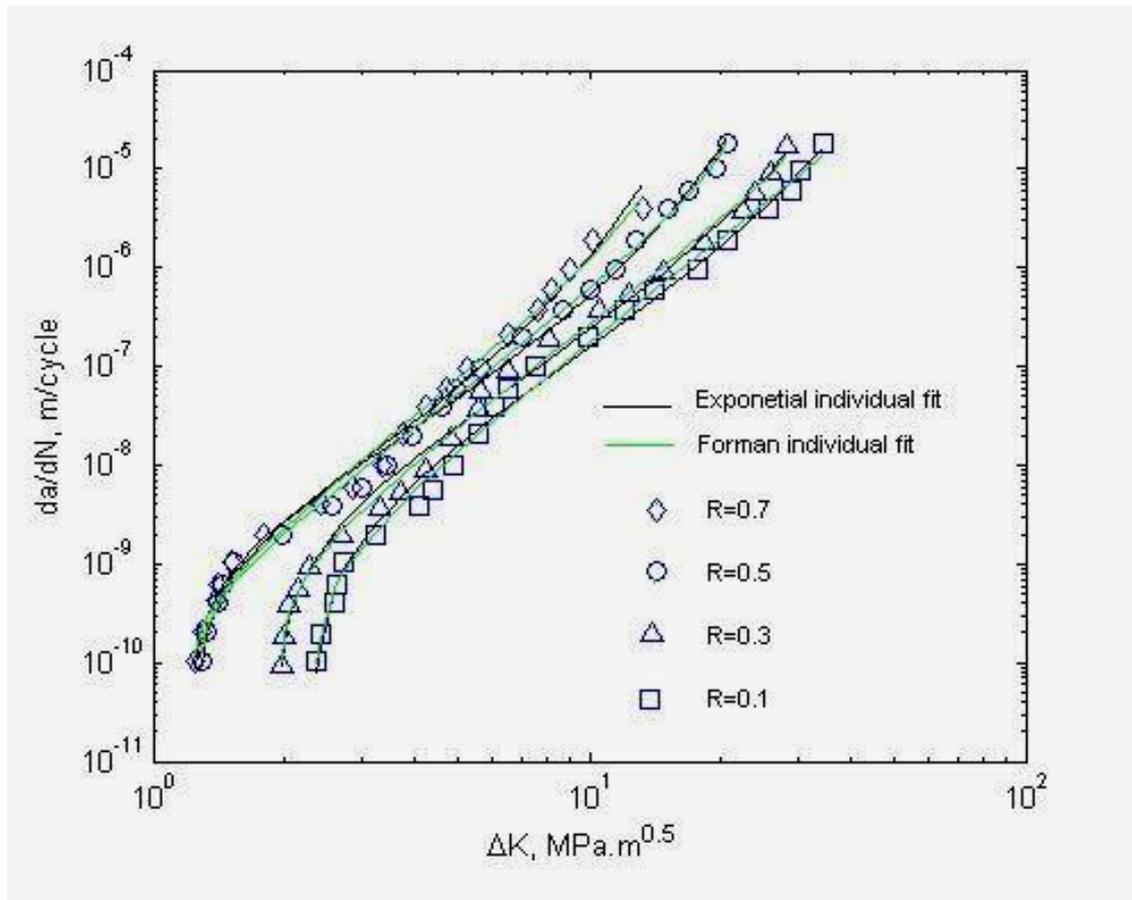


AA 6013-T651

Exponential Model:

R	α
0.1	-24.99
0.3	-24.92
0.5	-24.41
0.7	-24.24

MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK



AA 7055-T7511

Exponential Model:

R	α
0.1	-25.62
0.3	-25.32
0.5	-24.96
0.7	-24.94

MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

- Model Comparison: Exponential Equation and Modified Forman

Material Designation	R -ratio	Exponential		Modif. Forman	
		R^2	AIC_C	R^2	AIC_C
6013	0.1	0.9961	-57.69	0.9968	-55.55
	0.3	0.9960	-56.34	0.9965	-52.54
	0.5	0.9954	-53.51	0.9970	-55.53
	0.7	0.9962	-53.22	0.9972	-51.17
2324	0.1	0.9943	-50.07	0.9950	-47.30
	0.3	0.9892	-34.32	0.9921	-36.28
	0.5	0.9779	-16.39	0.9804	-13.32
	0.7	0.9859	-28.85	0.9901	-30.13
7055	0.1	0.9934	-46.25	0.9950	-45.80
	0.3	0.9939	-48.12	0.9958	-49.10
	0.5	0.9950	-52.32	0.9965	-53.52
	0.7	0.9988	-42.94	0.9931	-36.15

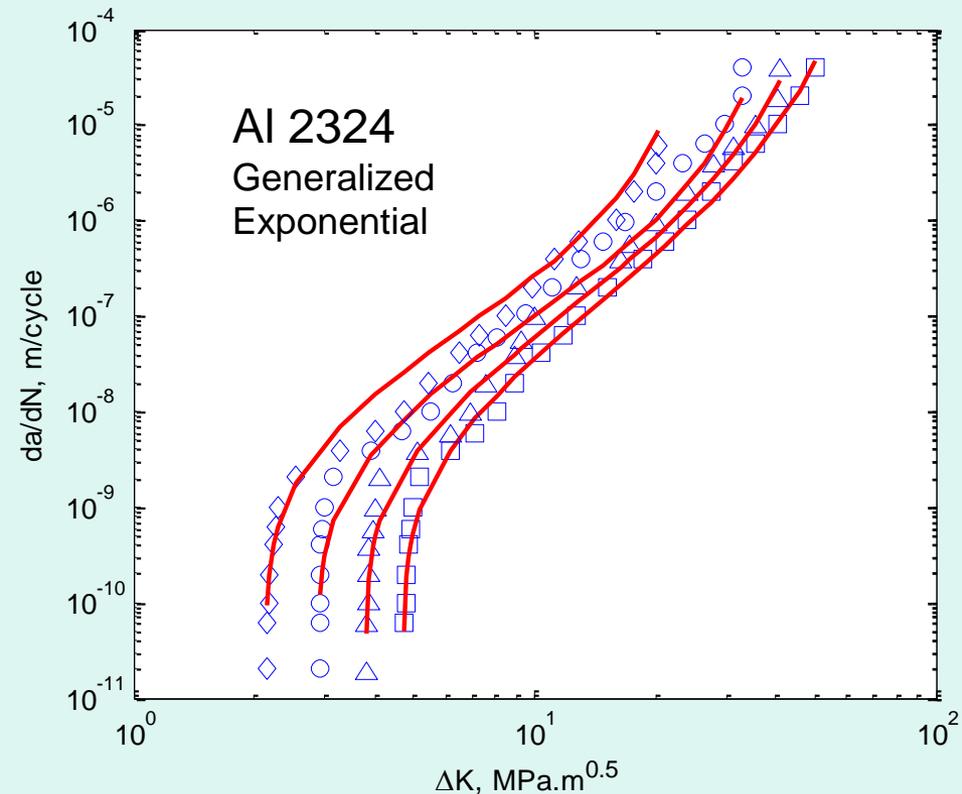
R^2 = Coefficient of determination
 AIC_C = Akaike Information Criterion (corrected for small samples)

MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

- Correlation Between Fitting Parameters and Load Ratio

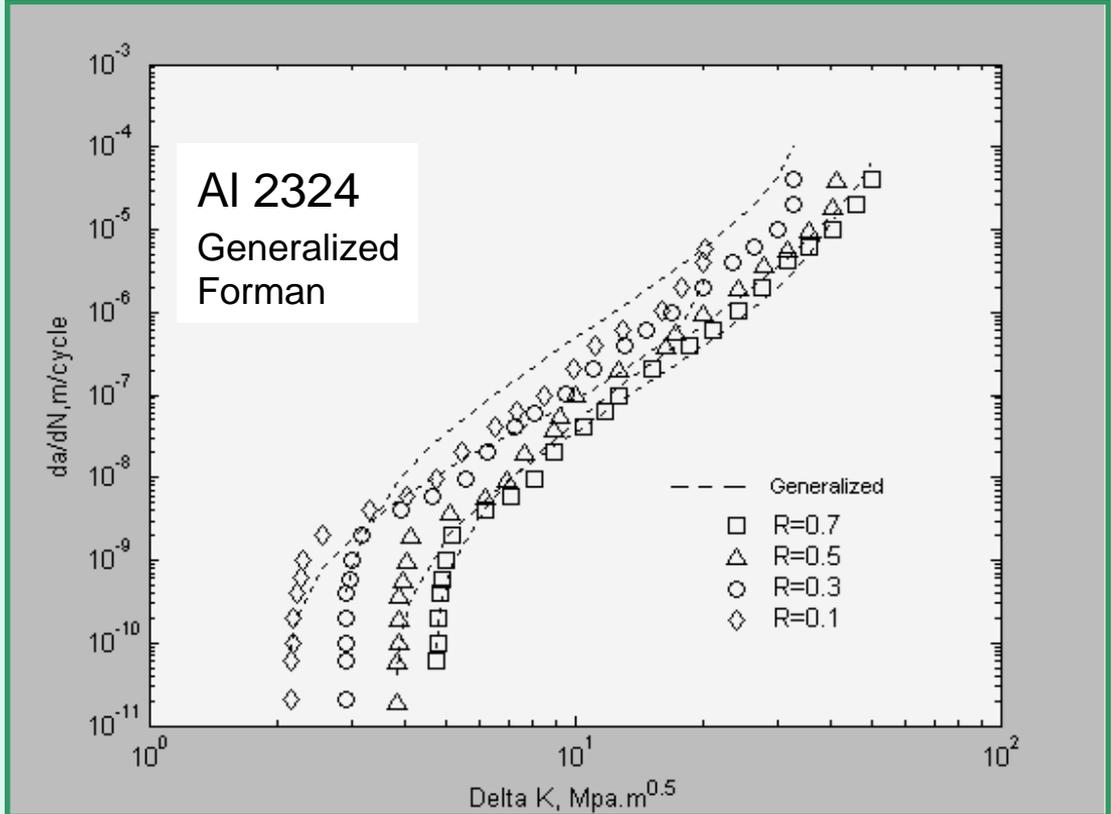
$$\frac{da}{dN} = C \exp \left(\beta \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{(1-R)K_c - \Delta K} \right)^\theta + \mu(\Delta K - \Delta K_{th}) \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -25.11 \\ \theta &= 0.25 \\ \beta &= 16.27 - 2.70 R \\ \mu &= -0.034 + 0.070 R - 0.38 R^2 \end{aligned}$$



MODELAGEM DAS TRÊS REGIÕES DA CURVA da/dN vs. ΔK

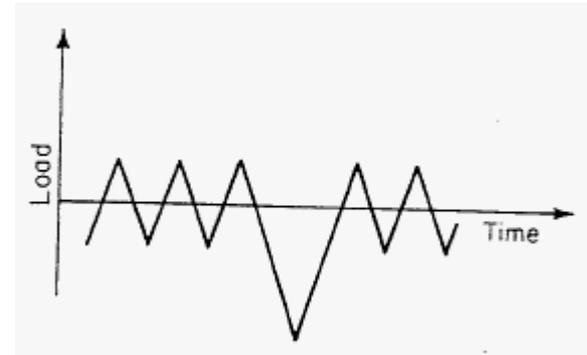
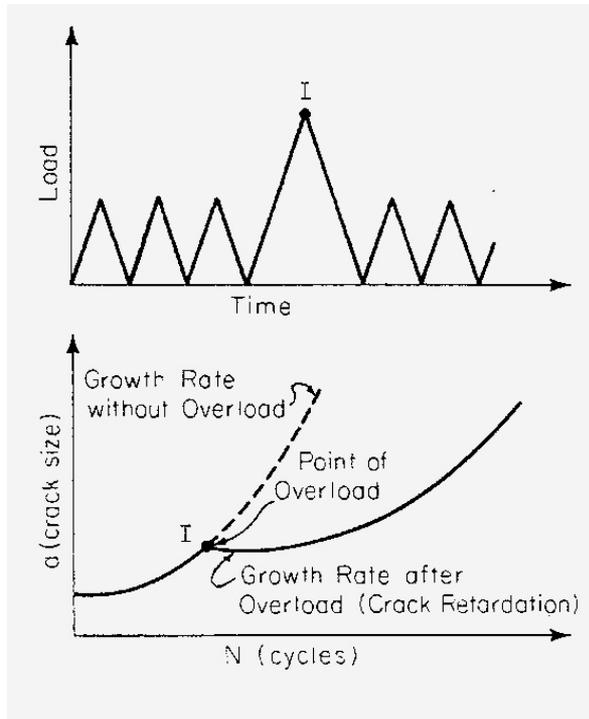
- Same methodology was not so successful with Modified Forman model



CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Efeitos de Interação

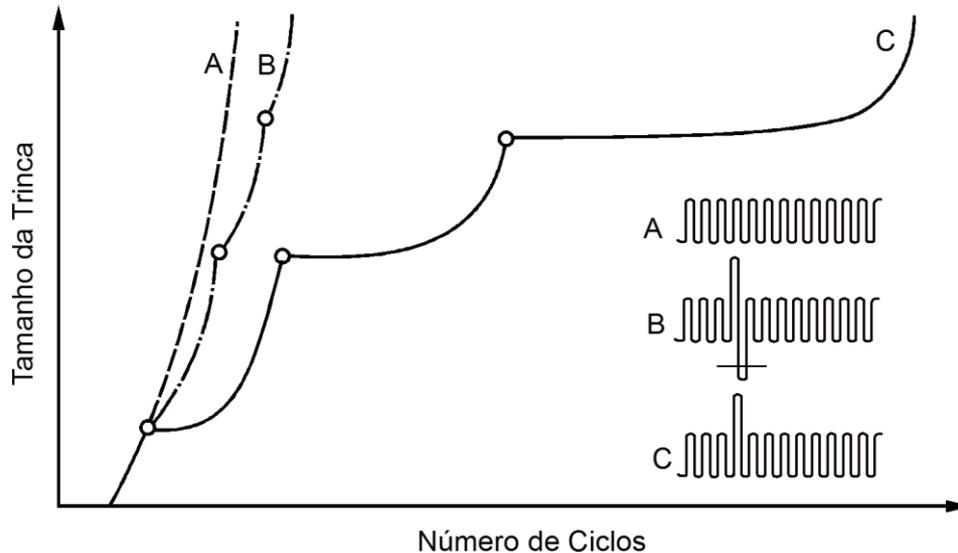
- Efeitos descobertos no início da década de 1960.
- O incremento da trinca depende da história de carregamento precedente
- Retardo na propagação da trinca devido à aplicação de sobrecarga
- Aceleração após a aplicação de “underload”.



CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Efeitos de Interação

- Sobrecarga seguida de subcarga: retardo é reduzido.



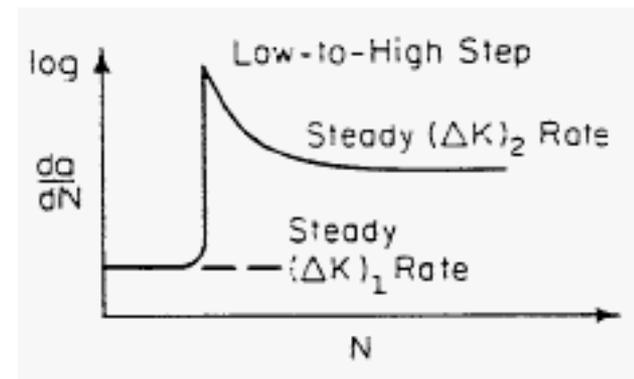
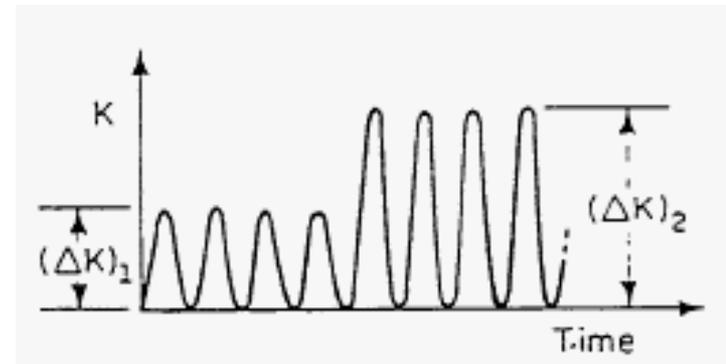
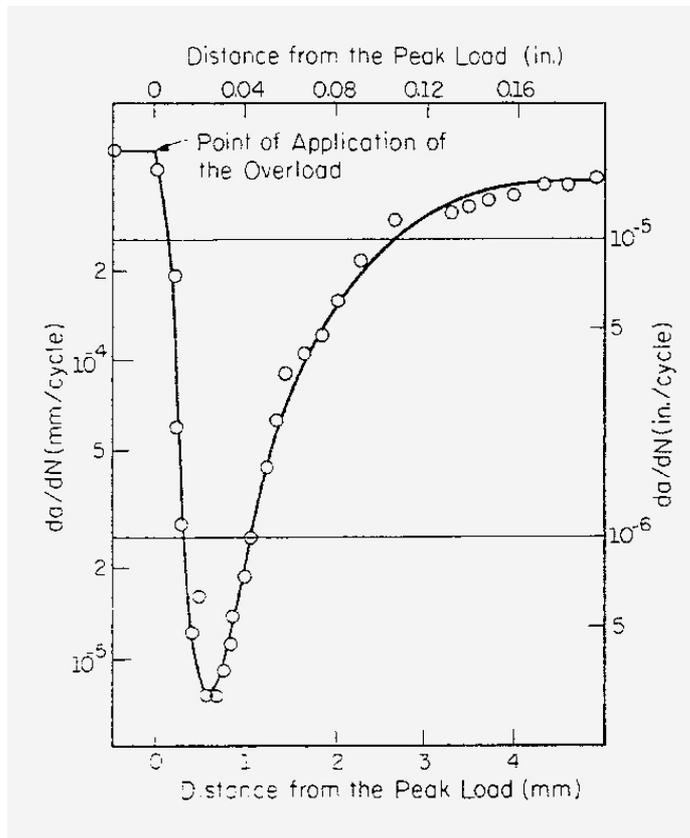
Teorias para explicar o Retardo:

- *Embotamento da ponta da trinca devido à sobrecarga*
- *Tensões residuais na ponta da trinca*
- *Efeitos de fechamento*

CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Observações sobre os efeitos de interação

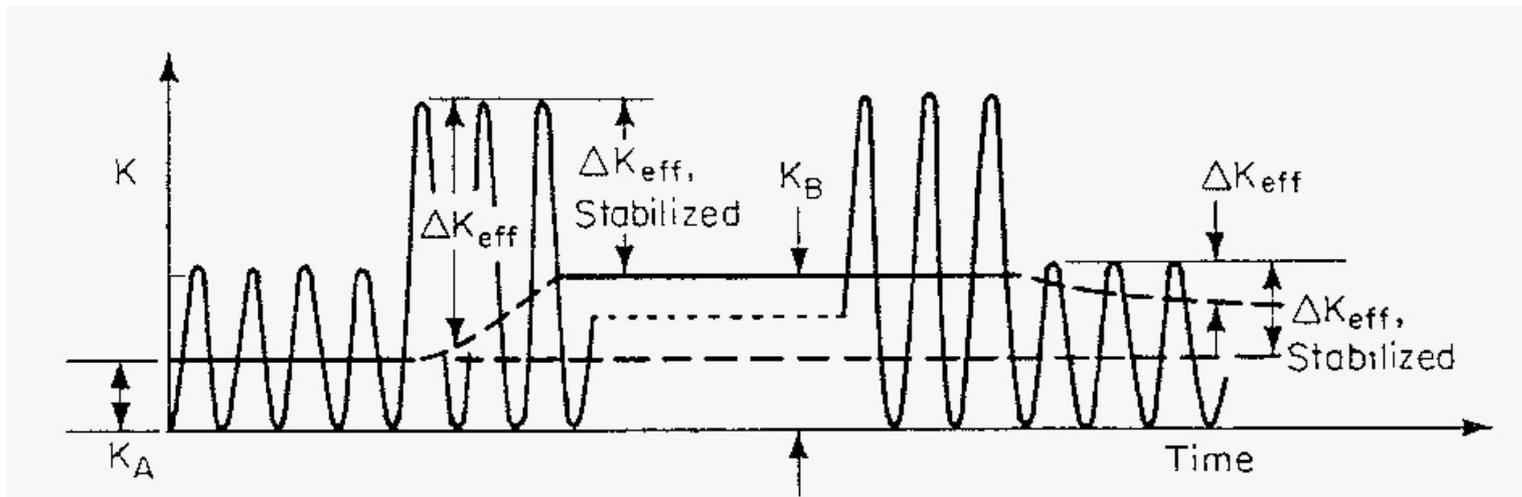
- A taxa de propagação não atinge o mínimo imediatamente após a sobrecarga.
- Sequencias “baixo-alto” produzem efeito inverso.



CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Observações sobre os efeitos de interação

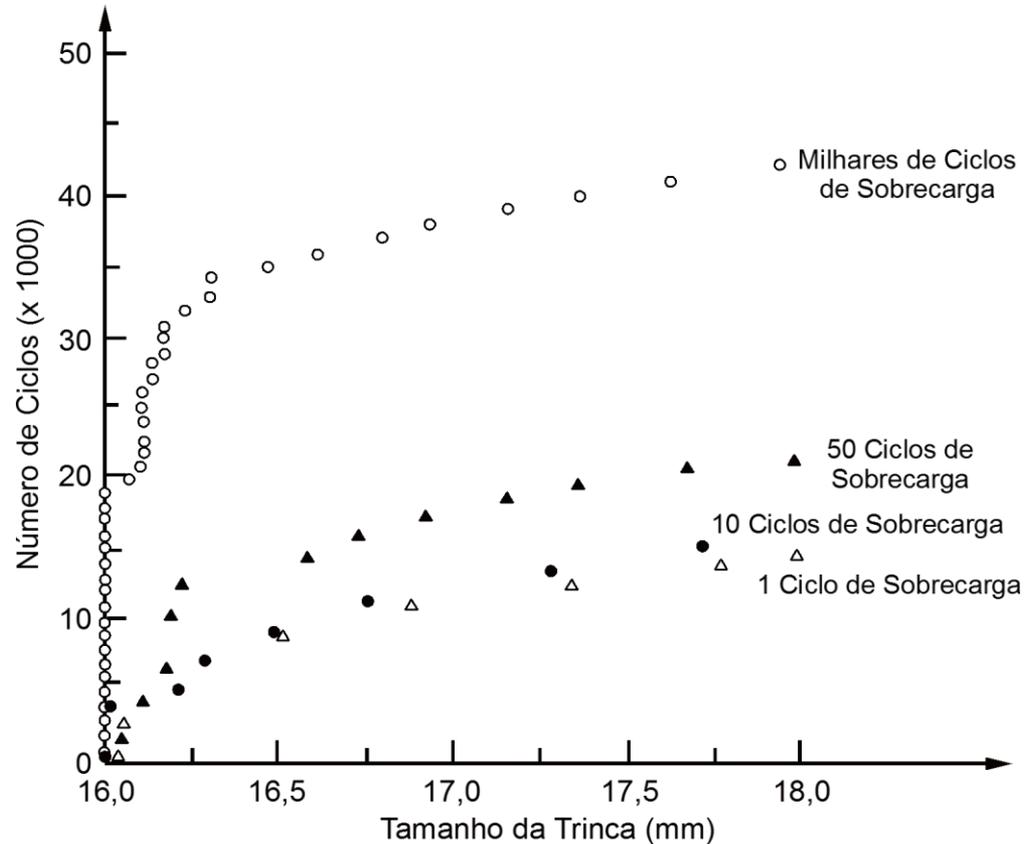
- Proposições baseadas no fechamento podem prever com sucesso os transientes observados na aceleração e no retardo.



CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

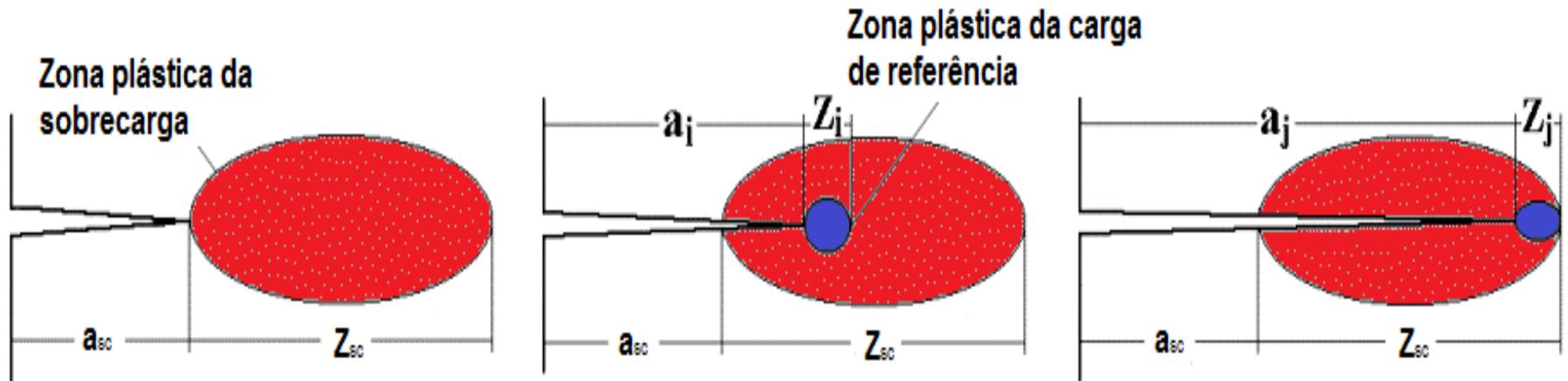
Observações sobre os efeitos de Interação

- Intensidade do retardo depende do número de ciclos de sobrecarga



CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Concepção do retardo baseado na zona plástica de sobrecarga



(MEGGIOLARO; CASTRO, 2002)

CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Modelos para o Retardo

- Modelos baseados na Zona Plástica.
- Apresentação do Modelo de **Wheeler**:

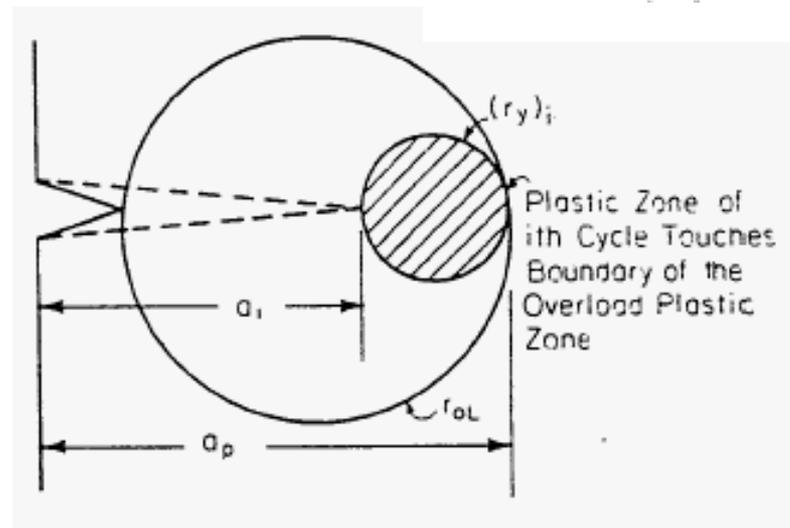
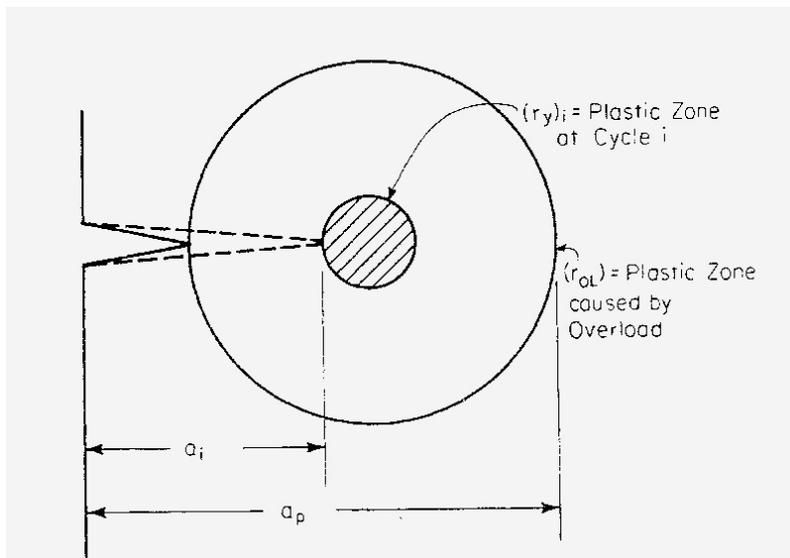
$$\frac{da}{dN_i} = (C_p)_i \left[C(\Delta K_i)^n \right]$$

$$(C_p)_i = \left(\frac{r_{yi}}{a_p - a_i} \right)^p$$

Características do Modelo:

- Taxa de amplitude constante é alterada
- Parâmetro empírico C_p depende da razão entre as ZPs.
- A desvantagem é que o parâmetro de ajuste p deve ser determinado experimentalmente.

$$a_r = a_0 + \sum_{i=1}^r \left(\frac{da}{dN} \right)_i$$



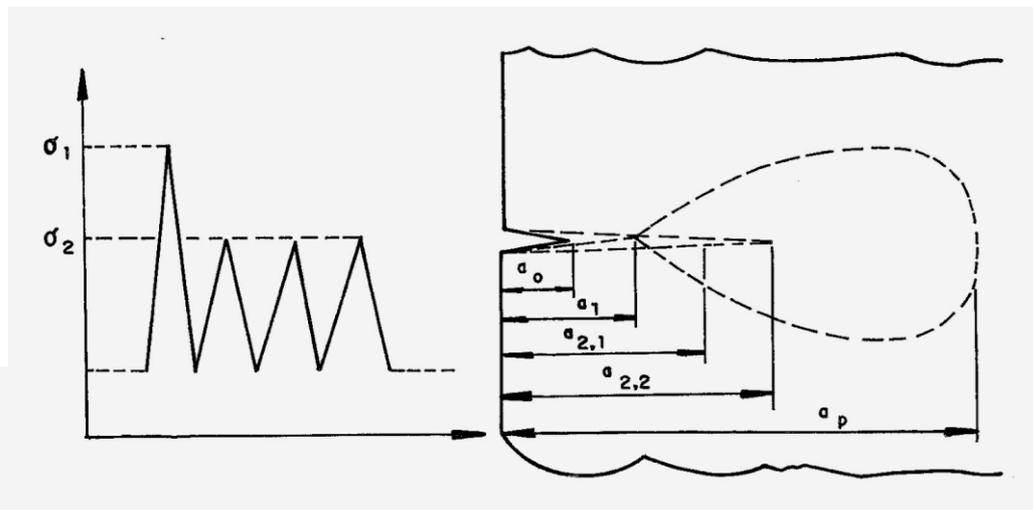
CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Modelos para o Retardo

- Apresentação do Modelo de **Willenborg**:

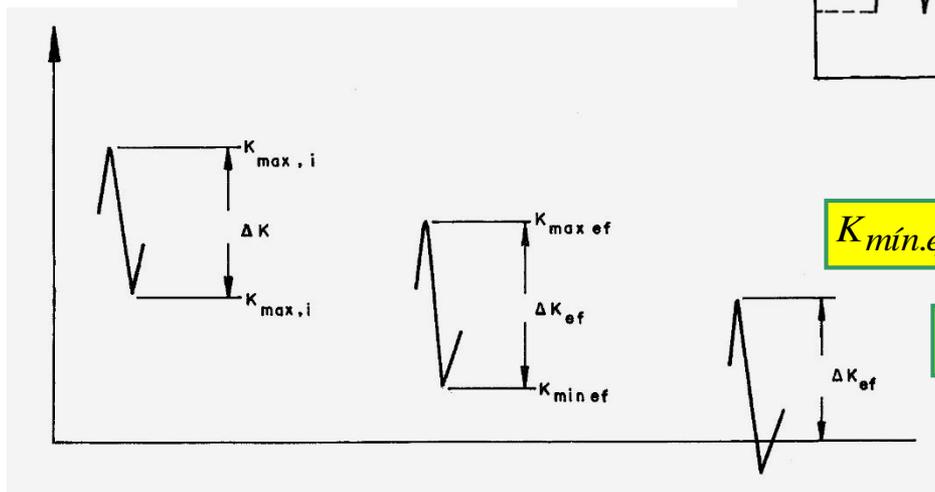
$$K_{red} = K_{req} - K_{máx.2,i}$$

$$\Delta K_{ef.2,i} = K_{máx.ef.2,i} - K_{mín.ef.2,i}$$



$$K_{mín.ef.2,i} = K_{mín.2,i} - K_{red} = K_{mín.2,i} + K_{máx.2,i} - K_{req}$$

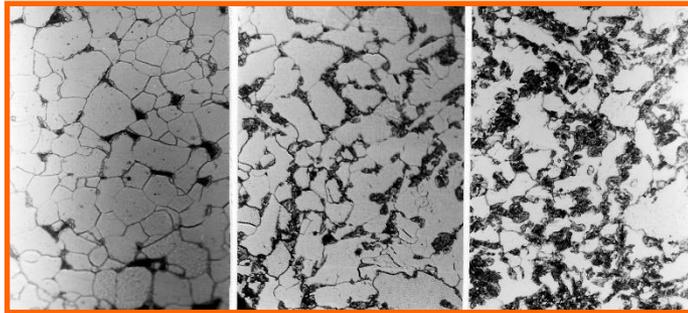
$$K_{máx.ef.2,i} = K_{máx.2,i} - K_{red} = 2K_{máx.2,i} - K_{req}$$



CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Exemplo: Retardo na propagação da trinca em aços bifásicos

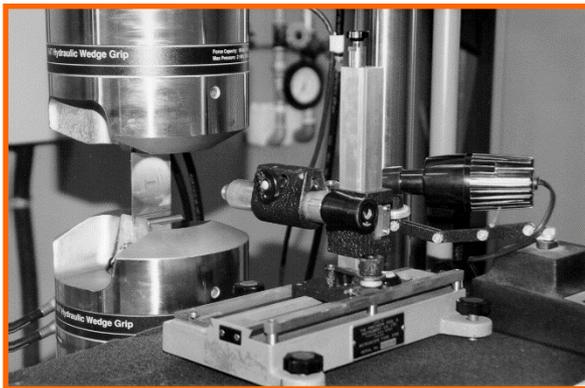
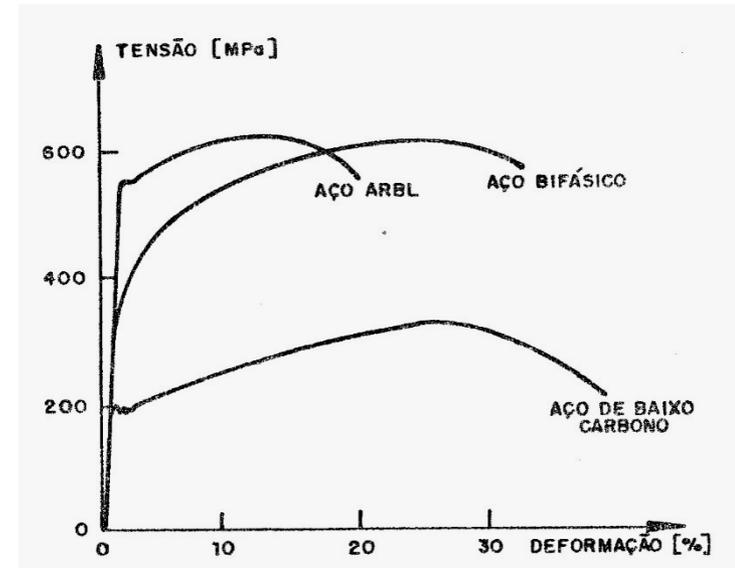
- Aços de baixo carbono; microestrutura contém basicamente ferrita e martensita.
- Ensaios de propagação da trinca em amplitude constante e variável.



NT750

NT800

NT850



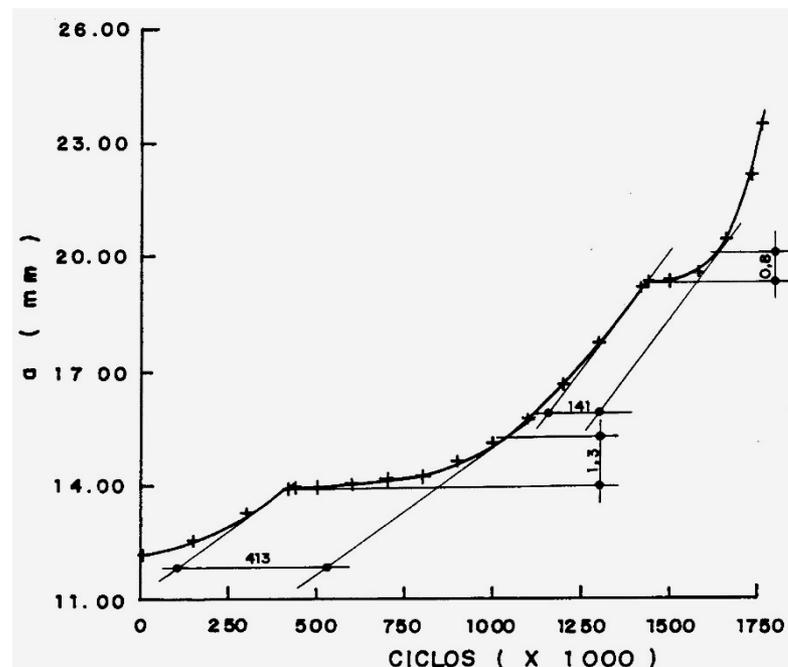
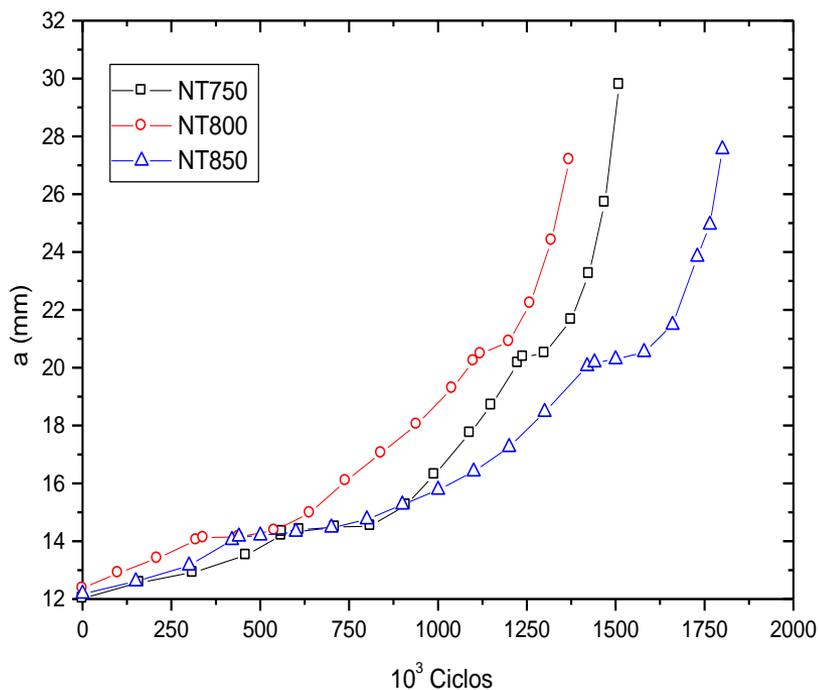
Material	Martensita (% vol.)	Martensita (HV)	σ_e (MPa)	σ_t (MPa)	RA (%)
NT750	23	551	387	593	58
NT800	30	454	400	615	61
NT850	51	331	364	547	68

CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Exemplo: Retardo na propagação da trinca em aços bifásicos (cont.)

- Ensaio de propagação da trinca com aplicação de ciclos de sobrecarga
- Forma de estimar o retardo (extensão e duração)

$$\frac{K_{m\acute{a}x.sc}}{K_{m\acute{a}x.cr}} = 1,33$$

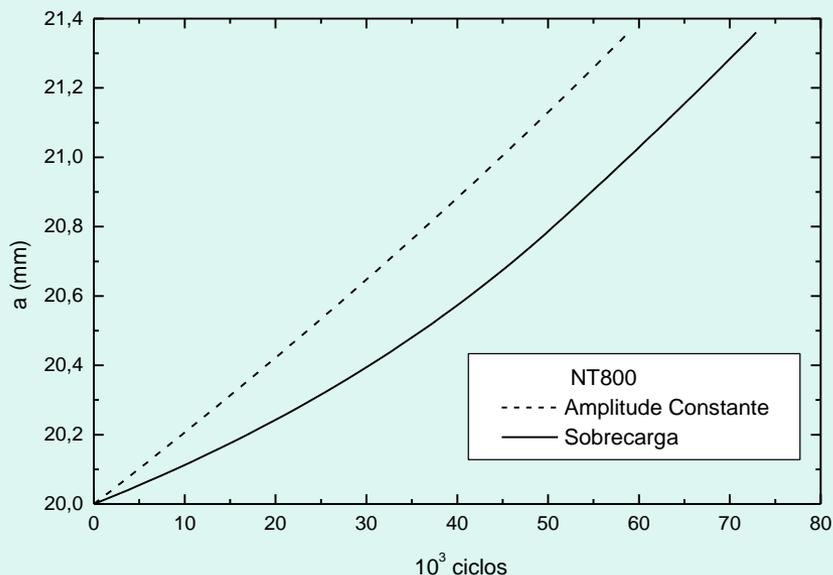


CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Exemplo: Retardo na propagação da trinca em aços bifásicos (cont.)

- Previsões do retardo pelo modelo de Willenborg
- Comparação com resultados experimentais

Resultados Experimentais



Material	Aplicação da Sobrecarga (mm)	Extensão do Retardo (mm)	Duração do Retardo (10^3 ciclos)
NT750	14	0,60	250
	20	0,75	102
NT800	14	0,75	205
	20	0,80	65
NT850	14	1,60	360
	20	1,00	135

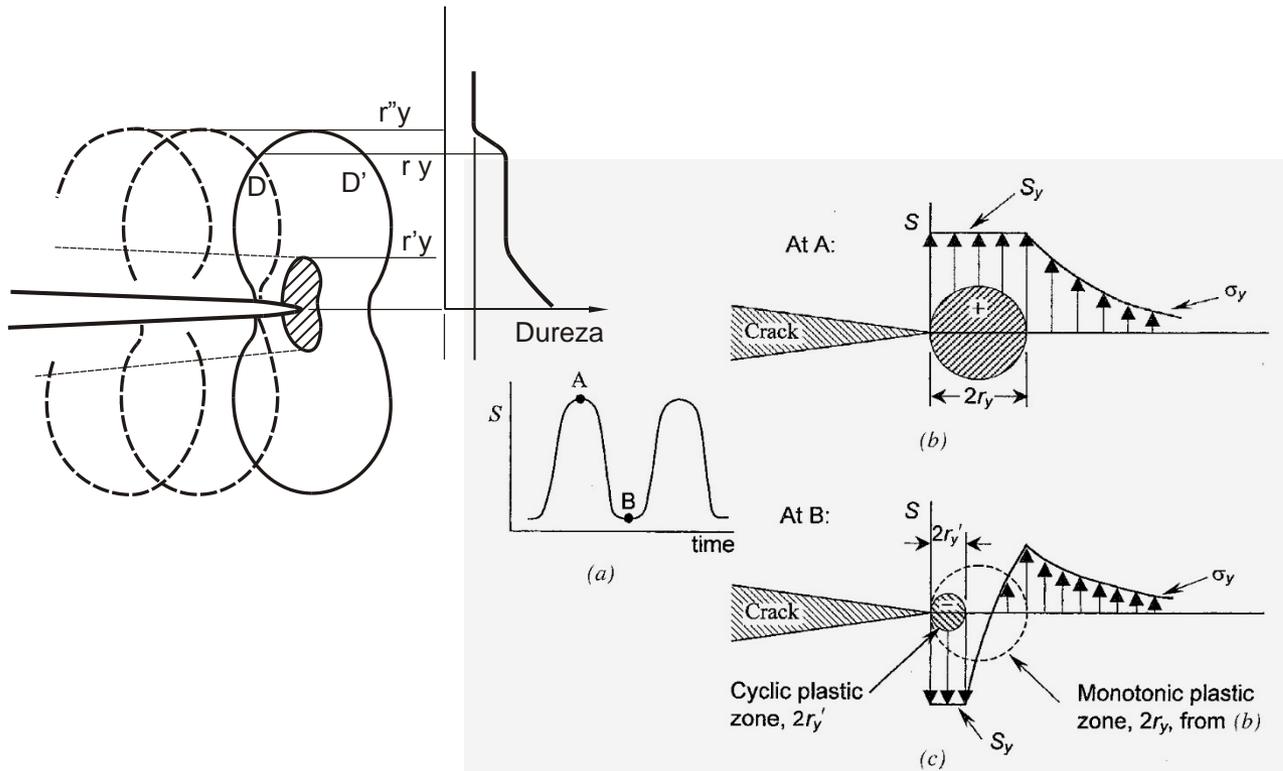
Modelo Willenborg

Material	Aplicação da Sobrecarga (mm)	Extensão do Retardo (mm)	Duração do Retardo (10^3 ciclos)
NT750	14	0,36	100
	20	0,88	70
NT800	14	0,34	78
	20	0,81	51
NT850	14	0,45	129
	20	1,11	89

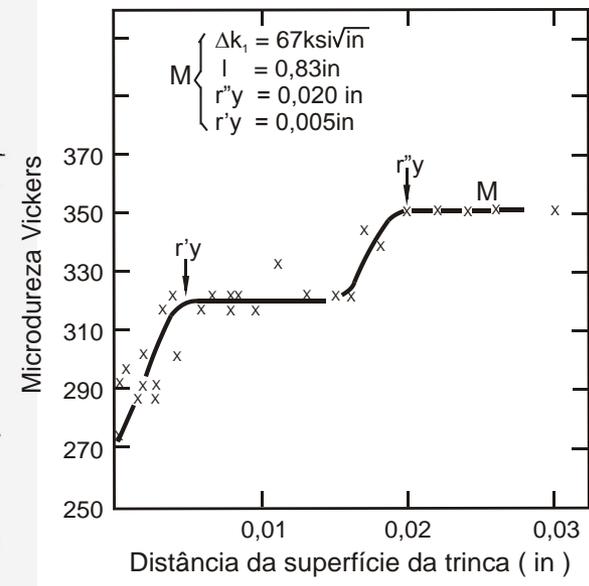
A ZONA PLÁSTICA CÍCLICA

Quando a peça com trinca é submetida a tensões cíclicas

- Rice (1967) mostrou que uma zona plástica reversa (ou cíclica) está presente
- Forma-se durante o descarregamento (compressão na ponta da trinca)
- O tamanho da z.p. cíclica é cerca de $\frac{1}{4}$ da z.p. monotônica
- Várias técnicas experimentais para identificar a zona plástica (ex. microdureza)



Microdureza na ponta da trinca em aço Maraging



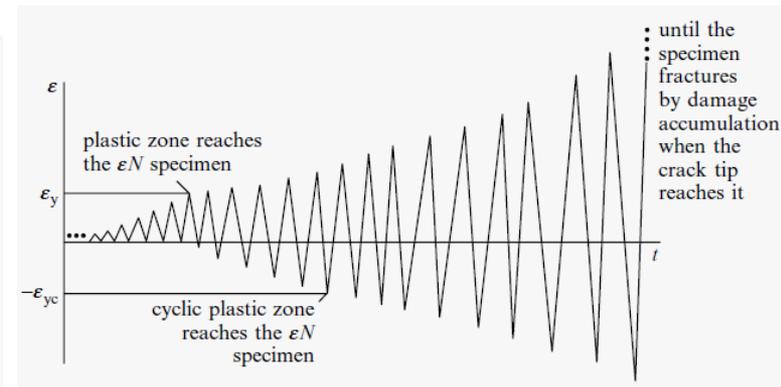
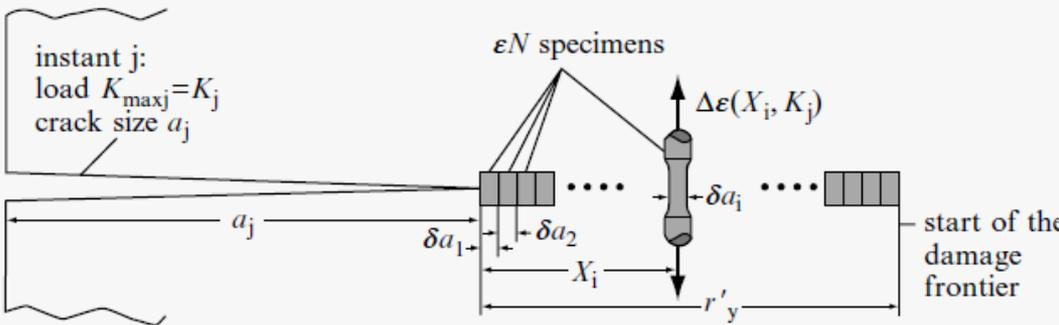
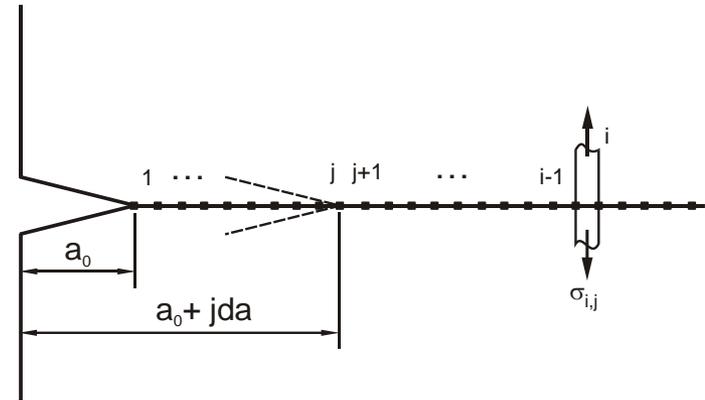
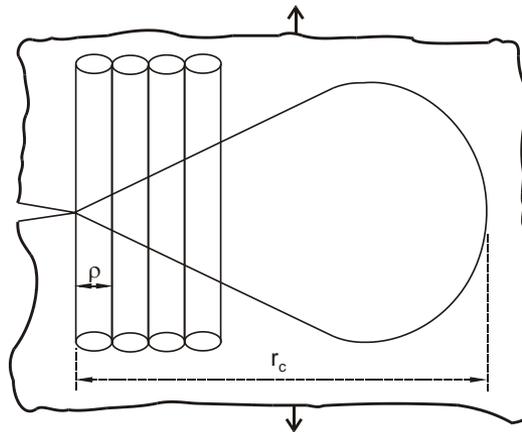
MODELOS PREDITIVOS PARA PROPAGAÇÃO DA TRINCA

Aplicação da mecânica do dano

- Possibilidade de determinar o crescimento da trinca usando modelos de vida total
- Parte-se da distribuição de tensão e deformação à frente da trinca
- A região à frente da trinca é discretizada, e modelos de dano podem ser usados

Baptista & Pastoukhov, 2003

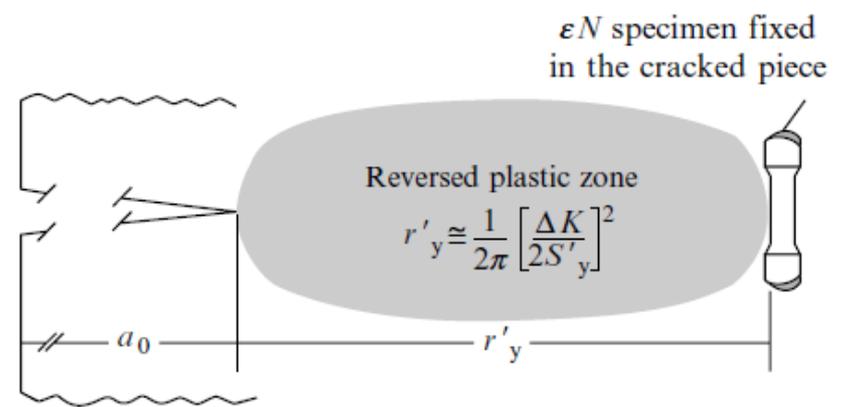
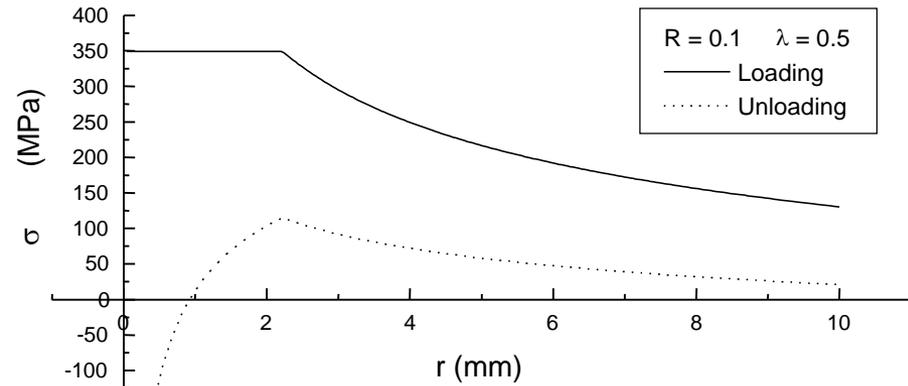
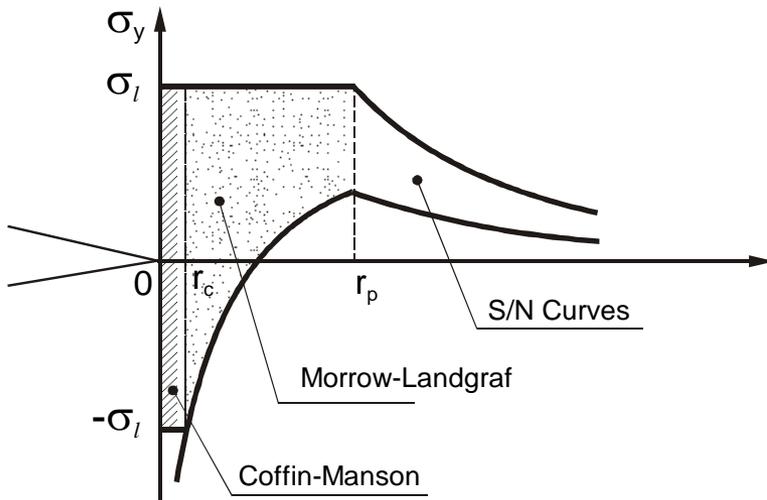
Durán et al., 2003



MODELOS PREDITIVOS PARA PROPAGAÇÃO DA TRINCA

Aplicação da mecânica do dano (cont.)

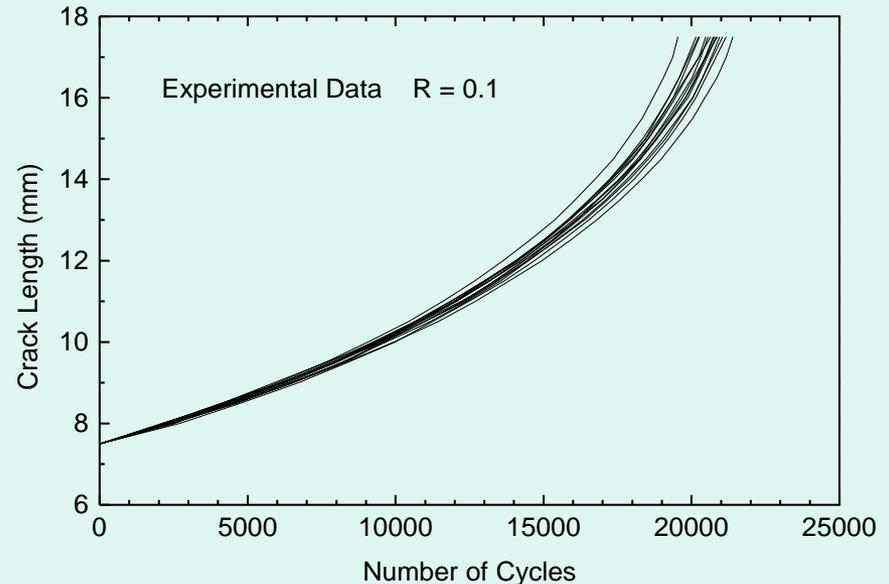
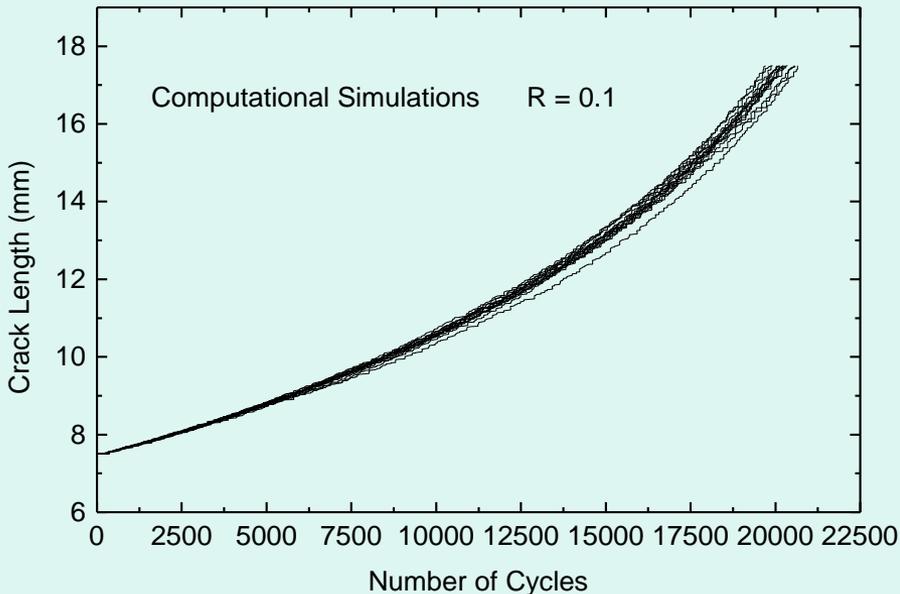
- Determinação da distribuição de tensões à frente da trinca
- Modelos de vida em fadiga



MODELOS PREDITIVOS PARA PROPAGAÇÃO DA TRINCA

Aplicação da mecânica do dano (cont.)

- Aplicação de análises estatísticas às previsões do crescimento da trinca
- Comparação com resultados experimentais





FIM DA PARTE 4