Fadiga dos Materiais Metálicos
Prof. Carlos Baptista

Cap. 4 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR FADIGA

LEITURA 1: CAMPO ELÁSTICO PRÓXIMO À PONTA DA TRINCA

Qualquer solução do campo de tensões para um dado problema em elasticidade deve satisfazer às equações de equilíbrio e de compatibilidade. Com este propósito, Airy introduziu uma forma de descrever campos de tensão bidimensionais usando uma função $\phi(x, y)$, tal que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Um campo de tensões assim definido sempre satisfaz às equações de equilíbrio, mas somente irá satisfazer à equação de compatibilidade se a função-tensão ϕ for uma solução da equação bi-harmônica:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \text{ou:} \qquad \nabla^4 \phi = 0$$

Há diferentes maneiras de resolver o campo de tensões nas vizinhanças da ponta de uma trinca. A solução baseada na técnica de variável complexa é considerada clássica na teoria da elasticidade.

Números complexos: Rafael Bombelli, continuando os estudos a partir da solução encontrada por Tartaglia e publicada por Cardano para resolver a equação cúbica, considerou que $\sqrt{-1}$ era um número e desenvolveu uma técnica para equações cúbicas nas quais a "fórmula de Cardan" resultava na raiz quadrada de um número negativo. Posteriormente, Euler utilizou a letra i para simbolizar $\sqrt{-1}$, dando origem à unidade imaginária. A forma algébrica de um número complexo é dada por:

$$z = x + yi \ , \quad \text{onde:} \quad x = \mathrm{Re}(z) \quad \text{e} \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

Equações de Cauchy-Riemann: Uma função complexa $f(z)$ é dita **analítica** num domínio D se $f(z)$ é definida e derivável em todos os pontos de D. As equações de Cauchy-Riemann constituem um critério importante para verificar se uma função complexa é analítica. Seja então $f(z)$ dada por:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Pode-se demonstrar que a função $f(z)$ é analítica num domínio D se e somente se as derivadas parciais de u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ ,$$

ou então:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x}$$

Equação de Laplace: Nas equações de Cauchy-Riemann, a parte real ou a parte imaginária de *f(z)* pode ser eliminada. Por exemplo, as equações acima podem ser diferenciadas como segue:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f(z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f(z)}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f(z)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \operatorname{Im} f(z)}{\partial x \partial y}$$

de onde obtemos:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f(z)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \nabla^2 \operatorname{Re} f(z) = 0$$

Uma relação idêntica pode ser obtida para Im *f(z)* ao se eliminar Re *f(z)*. Em outras palavras, dizemos que tanto a parte real como a parte imaginária de uma função analítica $f = u + iv$ satisfazem à equação de Laplace, o que constitui uma das principais razões para a grande importância prática da teoria de funções complexas:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

As soluções da equação de Laplace são chamadas de funções harmônicas. Então, a parte real e a parte imaginária de uma função analítica são funções harmônicas. Se duas funções harmônicas u e v satisfazem às equações de Cauchy-Riemann num domínio D, dizemos que v é uma função harmônica conjugada de u em D.

Função-tensão complexa de Westergaard: Em 1939, Westergaard introduziu um tipo específico de função-tensão ϕ de Airy, usando uma função-tensão complexa analítica $\Phi(z)$, da qual assume-se que suas integrais de primeira e segunda ordem existam:

$$\phi = \operatorname{Re} \overline{\overline{\Phi}}(z) + y \operatorname{Im} \overline{\Phi}(z) \text{ , onde: } \overline{\Phi}(z) \text{ e } \overline{\overline{\Phi}}(z) \text{ são primitivas de } \Phi(z)$$

Para que a função ϕ definida acima seja uma função-tensão de Airy, ela deve satisfazer à equação bi-harmônica. Uma vez que $\overline{\overline{\Phi}}(z)$ é uma função analítica (porque sua derivada existe), é óbvio que a primeira parte da equação acima, $\operatorname{Re} \overline{\overline{\Phi}}(z)$, é uma função harmônica que satisfaz à equação de Laplace e também à equação bi-harmônica (isto porque $\Phi(z)$ também satisfaz à equação de Laplace). Pode-se demonstrar que a segunda parte da função-tensão acima também satisfaz à equação bi-harmônica (essa demonstração é dada em Janssen et al, "Fracture Mechanics"). Sabendo então que a função ϕ definida em termos da função complexa $\Phi(z)$ qualifica-se como uma função-tensão de Airy, podemos escrever os componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} em termos dessa função complexa.

Por exemplo, para σ_x temos:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\,\bar{\bar{\Phi}}(z) + \frac{\partial}{\partial y}\,y\,\mathrm{Im}\,\bar{\Phi}(z)\right\}$$

usando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\,\bar{\bar{\Phi}}(z) + \mathrm{Im}\,\bar{\Phi}(z) + y\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\,\bar{\Phi}(z)\right\}$$

que pode ser desenvolvida como:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\mathrm{Im}\,\bar{\Phi}(z) + \mathrm{Im}\,\bar{\Phi}(z) + y\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\,\Phi(z)\right\} = \mathrm{Re}\,\Phi(z) + y\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\,\Phi(z)$$

e finalmente:

$$\sigma_x = \mathrm{Re}\,\Phi(z) - y\,\mathrm{Im}\,\Phi'(z)$$

Os componentes σ_y e τ_{xy} são obtidos de forma análoga:

$$\sigma_y = \mathrm{Re}\,\Phi(z) + y\,\mathrm{Im}\,\Phi'(z)$$

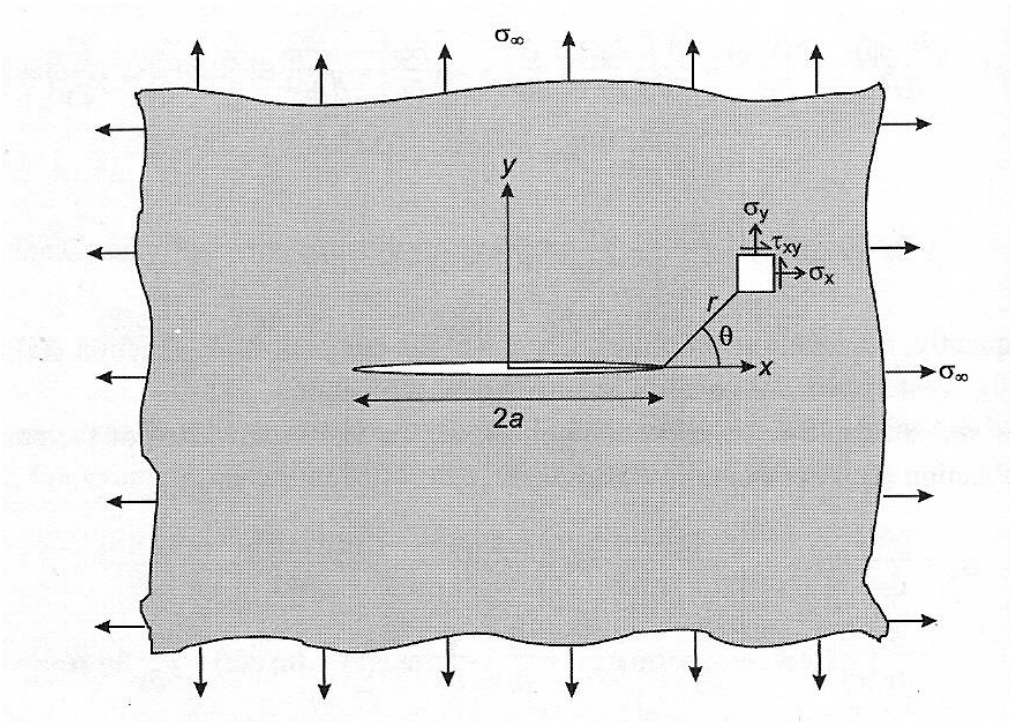
$$\sigma_x = -y\,\mathrm{Re}\,\Phi'(z)$$

As expressões para σ_x, σ_y e τ_{xy} dadas acima têm um caráter geral, ou seja, elas dão os componentes de tensão para qualquer função complexa de Westergaard. A solução para o campo de tensões correspondente a um problema bidimensional particular é encontrada escolhendo-se a função $\Phi(z)$ de forma que todas as condições de contorno sejam satisfeitas. Note que o uso de uma função complexa de Westergaard limita as condições de contorno para os problemas que podem ser resolvidos. Das equações acima verifica-se facilmente que para $y = 0$ é necessário que $\sigma_x = \sigma_y$ e $\tau_{xy} = 0$.

<u>Placa carregada biaxialmente:</u> Considere agora uma placa infinita contendo uma trinca de comprimento $2a$, conforme mostrado na figura a seguir. A placa é carregada biaxialmente em tração por uma tensão σ_∞ . As condições de contorno para este problema são:

i.	$\sigma_y = 0$	para $-a < x < a$ e $y = 0$;
ii.	$\sigma_x \rightarrow \sigma_\infty$ e $\sigma_y \rightarrow \sigma_\infty$	para $x \rightarrow \pm\infty$ e/ou $y \rightarrow \pm\infty$;
iii.	$\sigma_y \rightarrow \infty$	para $x = \pm a$ e $y = 0$.

A primeira condição vem do fato de que os flancos da trinca são superfícies livres. A segunda condição estabelece que a uma distância infinita da trinca as tensões sejam iguais à tensão aplicada. A última condição considera o efeito concentrador de tensão de uma trinca. Na ponta de uma trinca afiada (raio zero) a tensão σ_y torna-se singular.



Precisamos encontrar uma função $\Phi(z)$ tal que σ_x e σ_y, definidos de acordo com as equações anteriores, satisfaçam as condições de contorno. Um exemplo é a função dada por:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{1 - a^2/z^2}}$$

As condições de contorno serão agora verificadas.

i. Se $y = 0$, então $z = x$ e portanto:

$$\Phi(z) = \Phi(x) = \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{-1\left(a^2/x^2 - 1\right)}} = -i\frac{\sigma_\infty}{\sqrt{a^2/x^2 - 1}}$$

Assim, como $|x| < a$ ao longo dos flancos da trinca, a função $\Phi(z)$ é puramente imaginária, ou seja, sua parcela real é nula. Segue direto que $\sigma_y = 0$.

ii. Para $x \rightarrow \pm\infty$ e/ou $y \rightarrow \pm\infty$; ou seja, $|z| \rightarrow \infty$, a função complexa assume o valor $\Phi(z) = \sigma_\infty$. Como agora a parcela imaginária da função é nula, temos:

$$\sigma_x = \sigma_y = \mathrm{Re}\,\Phi(z) = \sigma_\infty$$

iii. Nas pontas da trinca ($x = \pm a$ e $y = 0$), temos $z = \pm a$ e portanto $\Phi(z) \rightarrow \infty$, de onde segue que $\sigma_y = \mathrm{Re}\,\Phi(z) \rightarrow \infty$.

Se transladarmos a origem do sistema de coordenadas para a ponta da trinca (em $z = a$) e introduzirmos a variável $\eta = z - a$, obteremos uma nova forma da função complexa $\Phi(z)$, que será mais fácil de usar. A função torna-se (note que o sufixo foi omitido de σ_∞):

$$\Phi(\eta) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - a^2 / (a+\eta)^2}} = \frac{\sigma(a+\eta)}{\sqrt{(a+\eta)^2 - a^2}}$$

Próximo à ponta da trinca, ou seja, $|\eta| << a$, a função-tensão pode ser aproximada da seguinte forma (a aproximação é o primeiro termo de uma expansão em série infinita):

$$\Phi(\eta) \approx \frac{\sigma a}{\sqrt{2a\eta}} = \sigma\sqrt{\frac{a}{2\eta}}$$

Usando a aproximação acima, uma nova mudança pode ser feita para uma representação em coordenadas polares *(r, θ)* com origem na ponta da trinca. A variável η é escrita como $\eta = r\exp(i\theta)$ e a função-tensão fica:

$$\Phi(\eta) = \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}}\exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\right) = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\right)$$

A equação acima só é válida para $r << a$, devido à aproximação feita na função-tensão. Partindo dessa expressão, emprega-se álgebra simples para encontrar $\mathrm{Re}\,\Phi(\eta)$, $\mathrm{Re}\,\Phi'(\eta)$ e $\mathrm{Im}\,\Phi'(\eta)$, necessários para se determinar os componentes de tensão. Substituindo-se os valores encontrados nas expressões σ_x, σ_y e τ_{xy} obtém-se:

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

Essas expressões mostram que todos os componentes de tensão tendem ao infinito na ponta da trinca ($r = 0$), o que é conhecido como “singularidade $1/\sqrt{r}$”, e são produtos da posição geométrica por um fator $\sigma\sqrt{\pi a}$. A magnitude das tensões elásticas próximas à ponta da trinca é determinada por este fator, que é denominado Fator Intensidade de Tensão, K_I.