Fadiga dos Materiais Metálicos
Prof. Carlos Baptista

Cap. 1 INTRODUÇÃO

LEITURA 3: DILATAÇÃO E DISTORÇÃO

Para qualquer estado de tensão em um ponto (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}), a tensão hidrostática σ_h, também chamada de tensão normal média, é dada por:

$$\sigma_h = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1}{3} I_1$$

O tensor-tensão pode ser decomposto em uma parcela hidrostática σ_h e um desviador σ', de modo que $\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_h$ e assim por diante. O tensor é então escrito como:

$$[\sigma] = [\sigma_h] + [\sigma'] \text{ , onde: } [\sigma_h] = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} \text{ e } [\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_h & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_h & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_h \end{bmatrix}$$

Observa-se que, para a matriz do desviador [σ'], o primeiro invariante é dado por:

$$I'_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \left(\sigma_x - \sigma_h\right) + \left(\sigma_y - \sigma_h\right) + \left(\sigma_z - \sigma_h\right) = 0$$

Por outro lado, sabe-se que a deformação volumétrica é dada por:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = J_1$$

Define-se a deformação normal média ε_h como segue:

$$\varepsilon_h = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) = \frac{1}{3}\varepsilon_v = \frac{1}{3} J_1$$

O tensor-deformação também pode ser considerado como a soma de duas matrizes:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_h] + [\varepsilon']$$

Assim como no caso da tensão, verifica-se que, para o desviador da deformação, o primeiro invariante é nulo, o que significa um estado sem alteração de volume:

$$J'_1 = 0$$

A forma inversa da Lei de Hooke, por exemplo para σ_x, é dada por:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_v\right)$$

Definem-se as chamadas constantes de Lamè da seguinte forma:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \qquad \text{e} \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Como conseqüência, a Lei de Hooke é reescrita como segue:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v \quad \textbf{...} \quad \text{e assim por diante.}$$

Por outro lado, sabe-se também que:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1}{K}\sigma_h$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\sigma_h = K\varepsilon_v = 3K\varepsilon_h$$

A Lei de Hooke para σ_x pode então ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma_h = \sigma'_x + K\varepsilon_v = 2\mu\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_v$$

Da expressão acima, obtém-se:

$$\sigma'_x = 2\mu\varepsilon_x + (\lambda - K)\varepsilon_v$$

Substituindo-se na equação acima as definições de μ, λ e K, chega-se a:

$$\sigma'_x = 2G\varepsilon_x + \left[\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E}{3(1-2\nu)}\right]\varepsilon_v = 2G\varepsilon_x + \left[\frac{-E}{3(1+\nu)}\right]\varepsilon_v$$

Empregando-se a definição de G em termos de E e ν, e lembrando que $\varepsilon_v = 3\varepsilon_h$, vem:

$$\sigma'_x = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_h) = 2G\varepsilon'_x$$

Os resultados aqui obtidos podem ser resumidos pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \sigma_h &= 3K\varepsilon_h \\ \sigma'_x &= 2G\varepsilon'_x \\ \sigma'_y &= 2G\varepsilon'_y \\ \sigma'_z &= 2G\varepsilon'_z \end{aligned}$$

A interpretação física das equações acima é que, para qualquer estado de deformação [ε], a parcela que representa a dilatação ou variação do volume, [ε_h], está relacionada somente com a tensão hidrostática [σ_h], enquanto o desviador de deformação (distorção), [ε'], relaciona-se somente com o desviador da tensão [σ']. Essas equações fornecem uma nova representação da Lei de Hooke, que pode ser escrita como:

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon'] + 3K[\varepsilon_h]$$