

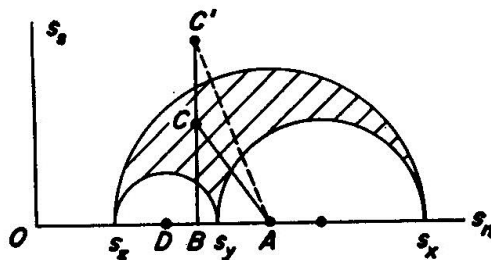
Cap. 1 INTRODUÇÃO

LEITURA 2: DEMONSTRAÇÃO DO CÍRCULO DE MOHR 3-D

Sejam conhecidas as tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 atuando nos planos definidos pelos eixos x , y e z , sendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Considere os componentes da tensão num plano inclinado qualquer, dado pela sua direção η , com cossenos diretores l , m , n . Serão usadas as seguintes relações:

- (1) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- (2) $T^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2$
- (3) $T^2 = \sigma^2 + \tau^2$
- (4) $\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$
- (5) $\tau = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 \right]^{1/2}$

Demonstração de que a tensão num plano qualquer cai dentro do círculo maior: Para qualquer plano oblíquo, vamos provar que o par (σ, τ) forma um ponto dentro do círculo maior na figura abaixo. Suponha um par (σ, τ) , onde σ é representado pelo segmento OB da figura abaixo, e a tensão cisalhante τ seja dada pela altura OC. Se o ponto C não cair dentro do círculo maior, então poderá estar em C'. Na figura, A é o centro do círculo maior e D é o centro do círculo menor. Para provar que o ponto cai dentro do círculo maior, devemos mostrar que o segmento AC é **menor** que o raio do círculo maior.



Da definição do centro de um círculo de Mohr, temos que: $OA = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

Sabendo que $OB = \sigma$, obtemos: $AB = -\sigma + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)$

Sabemos também que a tensão cisalhante τ é dada por BC (ou BC'). Pelo teorema de Pitágoras, vem:

$$(AC)^2 = \tau^2 + \left(-\sigma + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2$$

O raio do círculo maior vale: $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)$

Nosso objetivo é provar que: $\tau^2 + \left(-\sigma + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 \leq \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4}$

Desenvolvendo: $\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}{4} \leq \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4}$

Usando a relação (3) e desenvolvendo os quadrados:

$$T^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1^2}{4} + \frac{2\sigma_1\sigma_3}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4} \leq \frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{2\sigma_1\sigma_3}{4} + \frac{\sigma_3^2}{4}$$

Ficamos com: $T^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1\sigma_3}{2} \leq -\frac{\sigma_1\sigma_3}{2}$

Rearranjando, vem: $T^2 + \sigma_1\sigma_3 \leq \sigma(\sigma_1 + \sigma_3)$

Usando agora as relações (2) e (4), ficamos com:

$$\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 + \sigma_1\sigma_3 \leq \sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3)l^2 + \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)m^2 + \sigma_3(\sigma_1 + \sigma_3)n^2$$

Desenvolvendo a expressão acima, alguns termos se cancelam e ficamos com:

$$\sigma_2^2 m^2 + \sigma_1\sigma_3 \leq \sigma_1\sigma_3(l^2 + n^2) + \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)m^2$$

Da relação (1), obtemos $(l^2 + n^2) = (1 - m^2)$ e substituímos na expressão acima, que fica:

$$\sigma_2^2 m^2 + \sigma_1\sigma_3 \leq \sigma_1\sigma_3(1 - m^2) + \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)m^2$$

Rearranjando: $\sigma_2^2 m^2 \leq -\sigma_1\sigma_3 m^2 + \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3)m^2$

Desenvolvendo: $\sigma_2^2 m^2 \leq (-\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3)m^2$

Dividindo por m^2 e rearranjando: $\sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3 \leq -\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_1$

Obtemos: $\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_3) \leq \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_3)$

E finalmente: $\sigma_2 \leq \sigma_1$, que é evidentemente verdadeiro!

Concluimos que o ponto C fica dentro do círculo maior.

Falta demonstrar que ele fica fora dos círculos menores! Isto é feito tomando-se o ponto D (centro do círculo $\sigma_2\sigma_3$) e mostrando que o segmento DC é maior que o raio do círculo $\sigma_2\sigma_3$.

Ou seja: $DC \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)$

Para desenvolver, use: $(DC)^2 = (DB)^2 + (BC)^2$