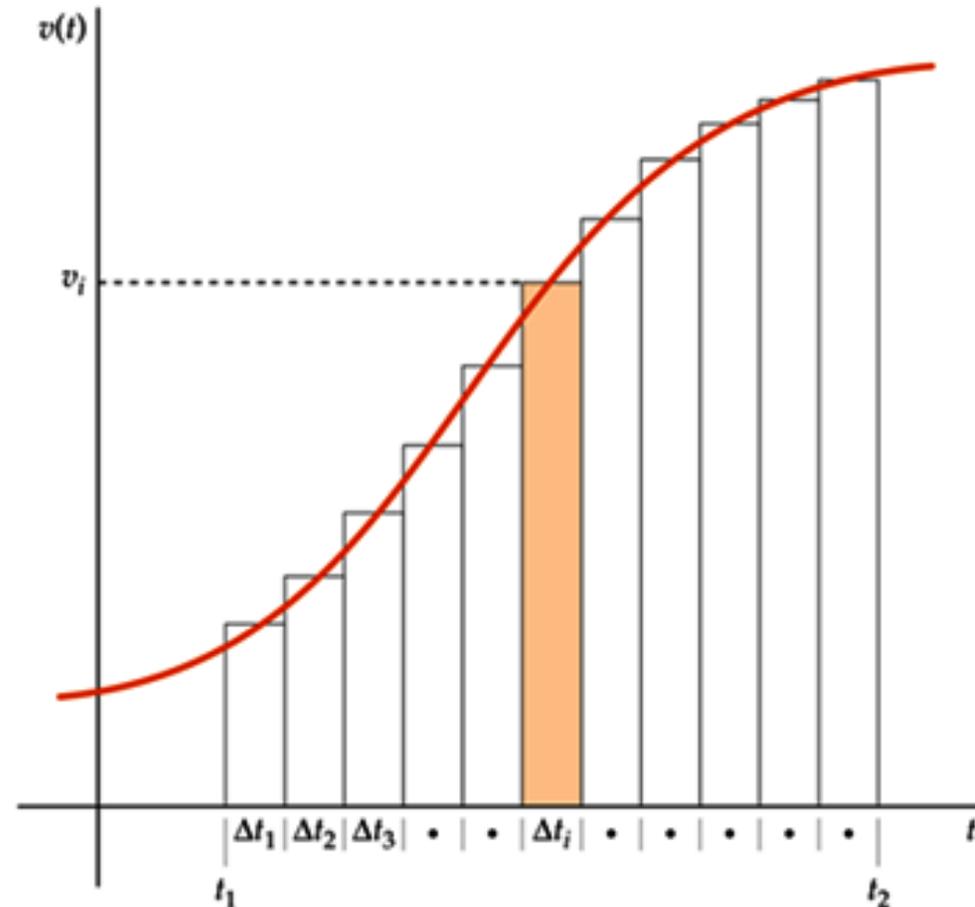


3ª Aula do Cap. 2

DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE E DA POSIÇÃO POR INTEGRAÇÃO.

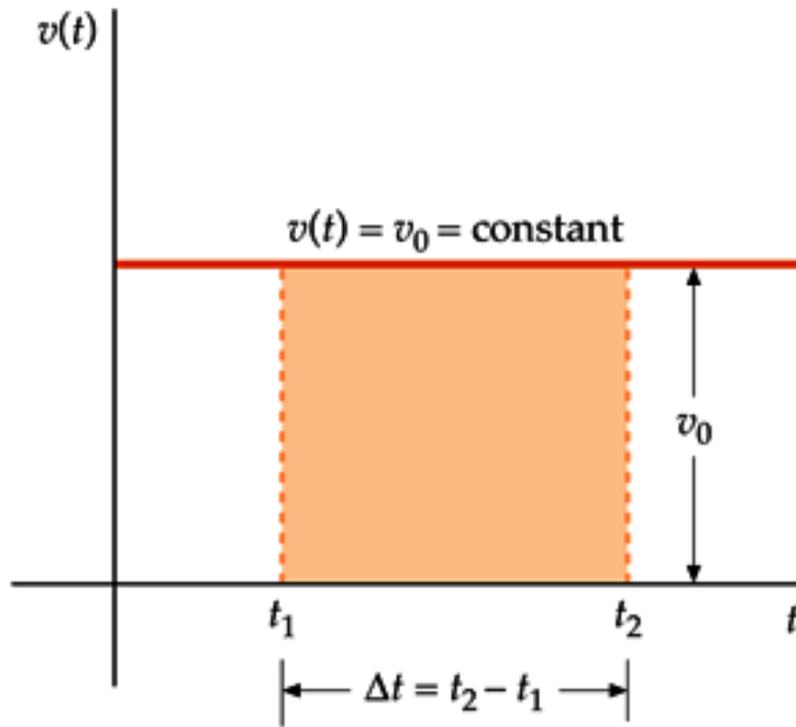
Referência:

- **Halliday**, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 1. Cap. 07 da 7ª. ed. RJ. LTC.



Velocidade e posição por integração

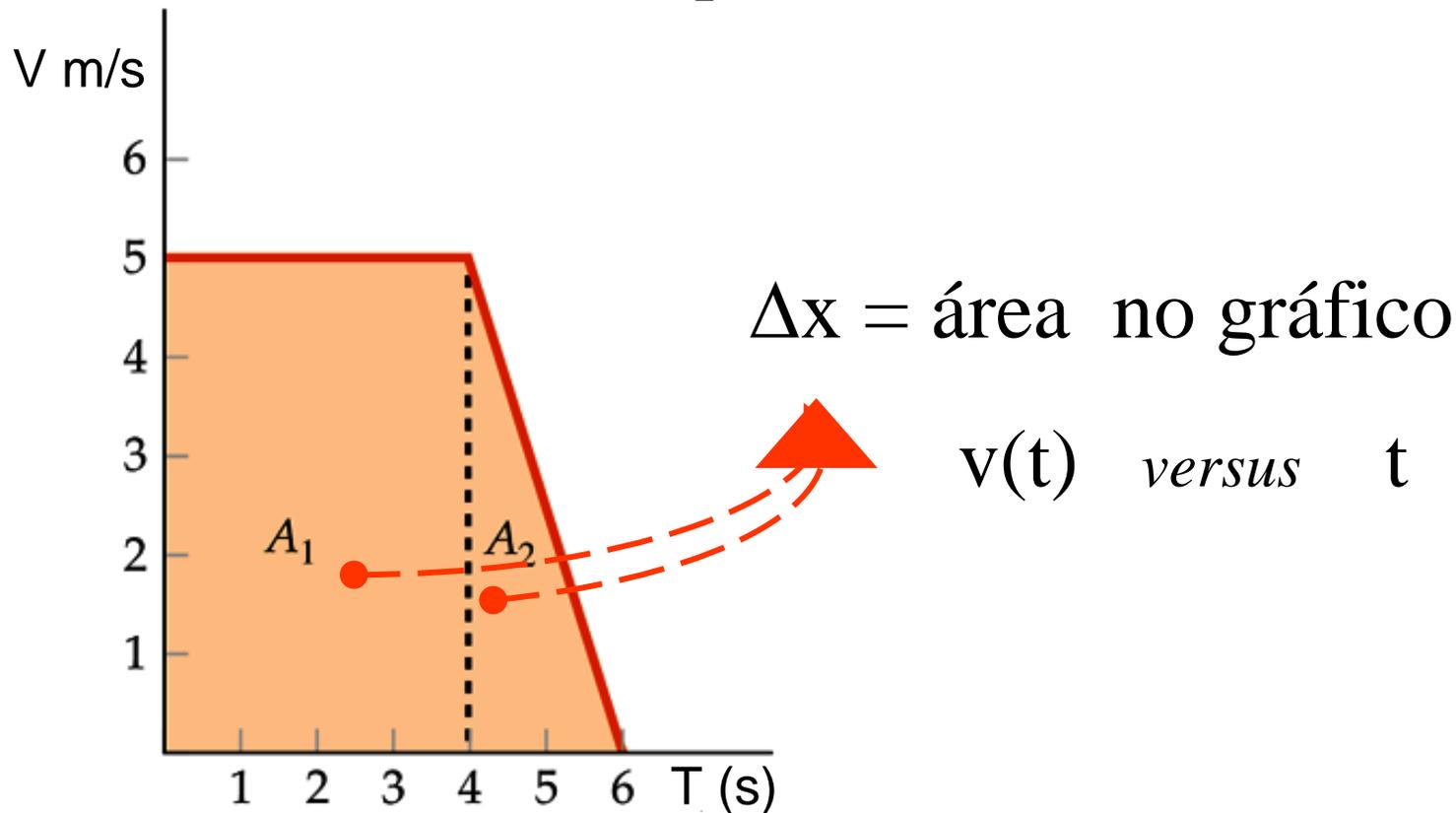
O deslocamento Δx durante o intervalo de tempo Δt é representado pela área sombreada no gráfico ao lado *v versus t*.



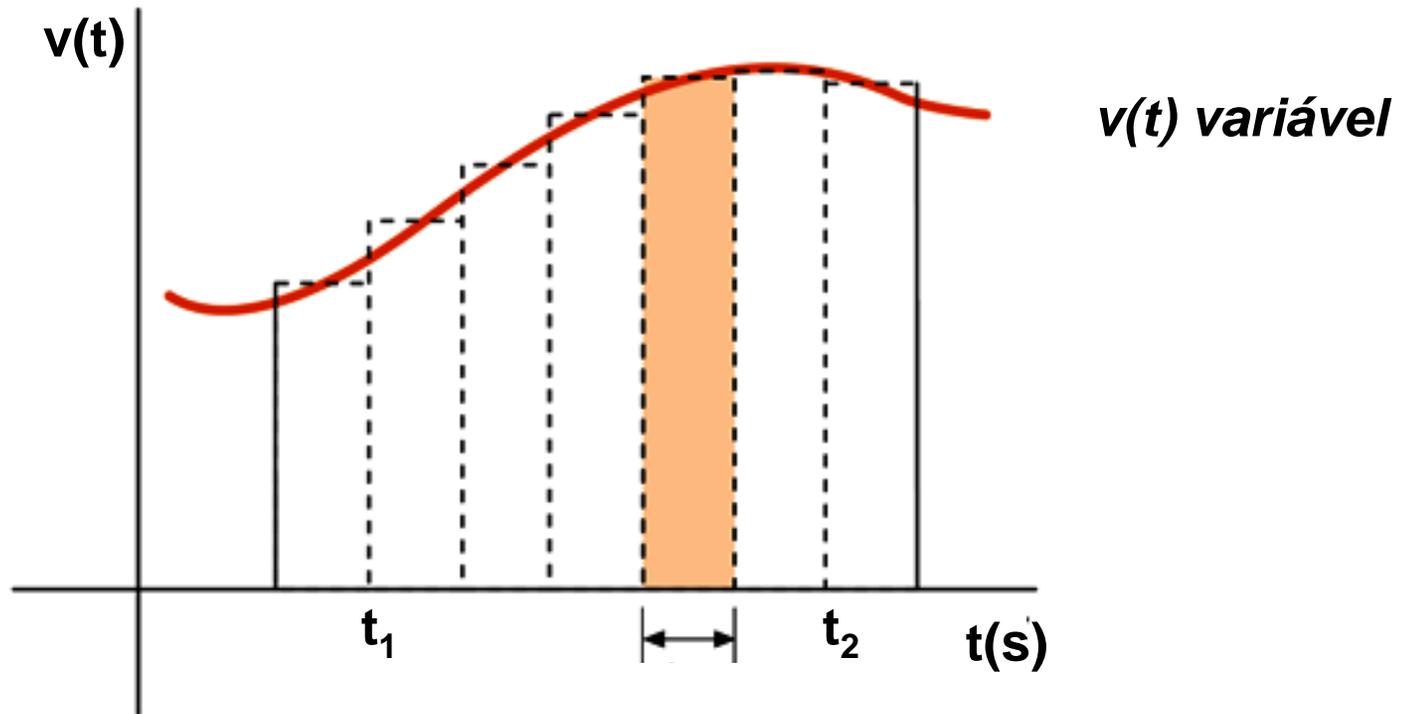
Shaded area = $v_0 \Delta t = \Delta x$

Velocidade e posição por integração

A velocidade de uma partícula em função do tempo é dada conforme a figura abaixo. Calcular o deslocamento da partícula entre $t = 0$ até $t = 6$ m.



A área sob a curva é o deslocamento



A área sob a curva entre os pontos t_1 e t_2 , será dada pela soma das áreas dos retângulos.

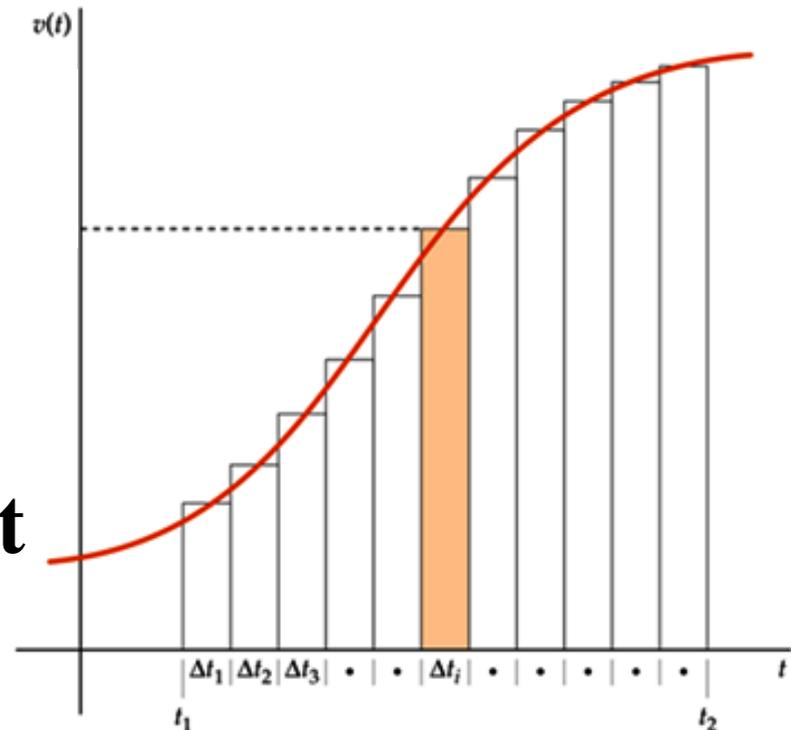
$$\Delta X = \sum v \Delta t$$

A determinação da área sob a curva é aproximada pela divisão do intervalo de tempo em pequenos intervalos.

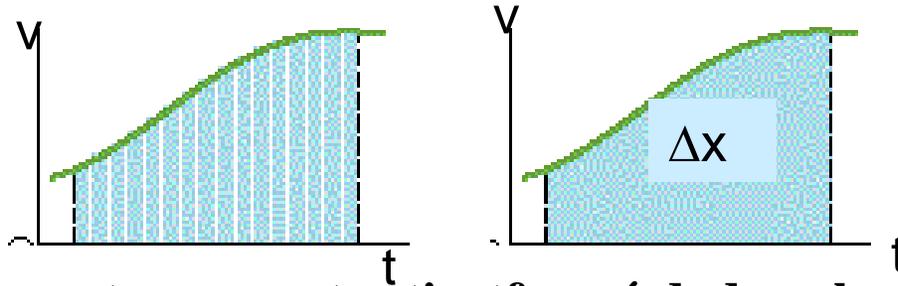
A aproximação será tão exata quanto maior for o número de retângulos em que se divide a área, cada qual com largura Δt . No limite de os intervalos de tempo tenderem a zero, a soma é igual à área subtendida pela curva, que por sua vez mede o deslocamento. Este limite é a *INTEGRAL* da função e se escreve:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt$$

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t_i} v \, \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} v(t) \, dt$$



Conceito de integral

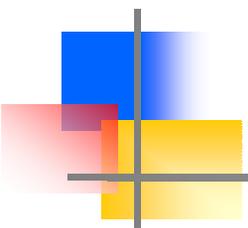


A área sob a curva entre os pontos t_i e t_f , será dada pela soma das áreas dos retângulos. Quando o número de retângulos é muito grande, a soma passa à integral, no limite que o intervalo Δt , se torna um infinitésimo.

A área sob a curva, é a integral da função nos limites considerados.

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt$$

$$\int_0^t t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$



Velocidade por integração

$$\vec{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

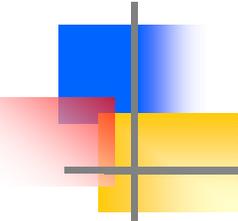
A constante de integração $\mathbf{C} = \mathbf{v}_0$ é igual à velocidade inicial.

Posição por integração

A constante de integração $\mathbf{C} = \mathbf{x}_0$ é igual à posição inicial.

$$\int_0^t t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt$$



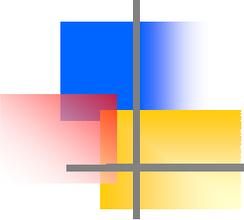
Velocidade e posição por integração

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt \quad \longrightarrow \quad \int_{t_i}^{t_f} t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Integral indefinida

$$\int t^2 dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} = \frac{t^3}{3}$$

$$\int (t^4 + t^2) dt = \frac{t^{4+1}}{4+1} + \frac{t^{2+1}}{2+1} = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}$$



Limites da integração

Integral definida

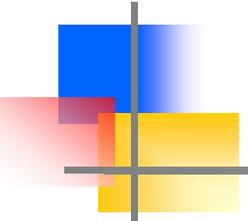
Substituir o limite superior menos limite inferior

$$\int_{0,5}^3 t \, dt = \frac{t^{1+1}}{1+1} = \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0,5}^3 = \left(\frac{3^2}{2} \right) - \left(\frac{0,5^2}{2} \right) = 4,5 - 0,125 = 4,375$$

Limite Final

$$\int_1^3 t^4 \, dt = \frac{t^{4+1}}{4+1} = \left. \frac{t^5}{5} \right|_1^3 = \left(\frac{3^5}{5} \right) - \left(\frac{1^5}{5} \right) = 243 - 0,2 = 242,8$$

Limite inicial



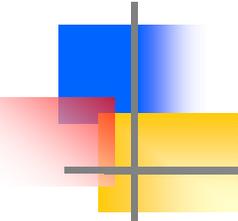
Posição por integração

A velocidade de um móvel é dada por:

$$v(t) = (2t + 3t^2) \text{ m/s},$$

onde x está em metros e t em segundos.

- Determine a posição do corpo em $t = 2$ s sabendo que quando $t_0=0$ $x_0(0) = 6$ m.
- qual o deslocamento no intervalo $t = 2$ s e $t = 4$ s ?



Posição por integração

$$\int (2t + 3t^2) dt = \frac{2t^{1+1}}{1+1} + \frac{3t^{2+1}}{2+1} = \frac{2t^2}{2} + \frac{3t^3}{3}$$

$$\Delta x = \int_2^4 (2t + 3t^2) dt = \left[2 \frac{t^2}{2} \right]_2^4 + \left[3 \frac{t^3}{3} \right]_2^4 = 68 \text{ m}$$

Substituir o limite superior “4” menos limite inferior “2”.