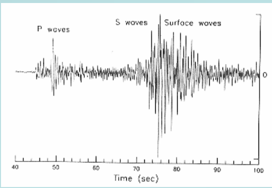
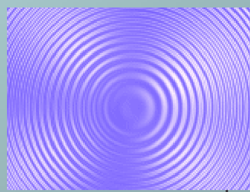
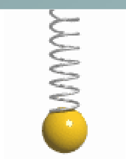
Oscilações são fenómenos naturais, da nossa experiência diária.



Os movimentos oscilatórios, diversos e mais ou menos complexos, são TODOS exprimíveis como uma soma de termos correspondentes ao movimento oscilatório mais simples – o **Movimento Harmónico Simples**

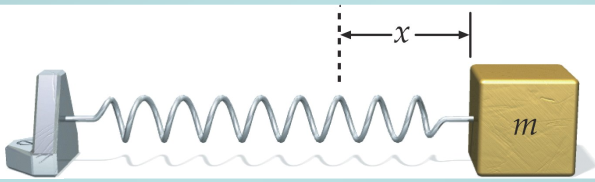


Movimento Harmónico Simples



Caracterizado pela lei de Hooke

$$\boldsymbol{F_x = -kx}$$



Consequências

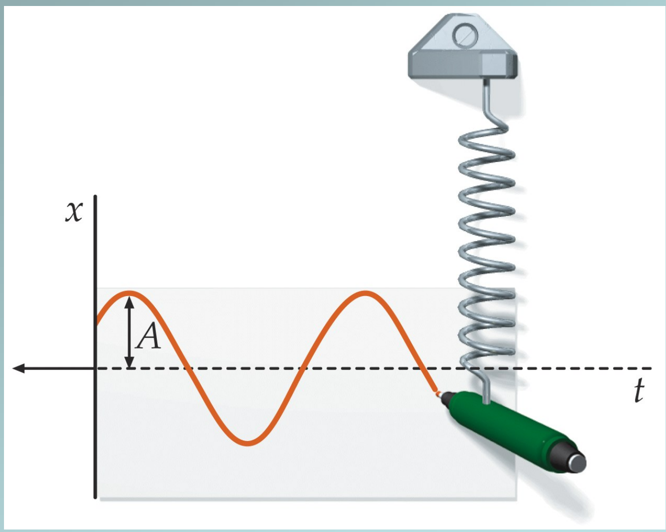
$$-kx = ma_x \quad \Leftrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- **Física**: aceleração oposta ao deslocamento (afastamento em relação ao ponto de equilíbrio)
- **Matemática**: segunda derivada de x proporcional ao simétrico de x

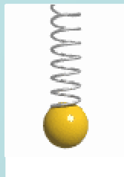
Reposição do estado de equilíbrio / energia mínima

Indica forma sinusoidal da solução

Movimento Harmónico Simples



$$x = A\cos\,(\omega t + \delta)$$



com

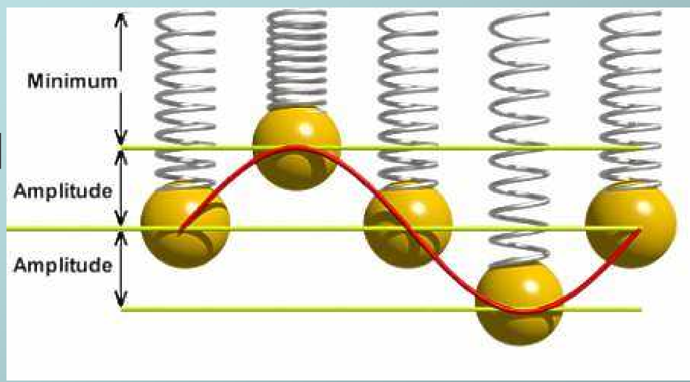
$$\omega = 2\pi f \quad \leftrightarrow \quad f = \frac{1}{T}$$

A Amplitude do movimento

δ Fase na origem (instante zero)

f Frequência

T Período



Movimento Harmónico Simples

A matemática dita $\rightarrow$

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Consequentemente

$$v = \frac{dx}{dt} = -\,\omega A\sin(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega A\sin(\omega t + \delta))$$

$$= -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$

$$= -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A física ... explica

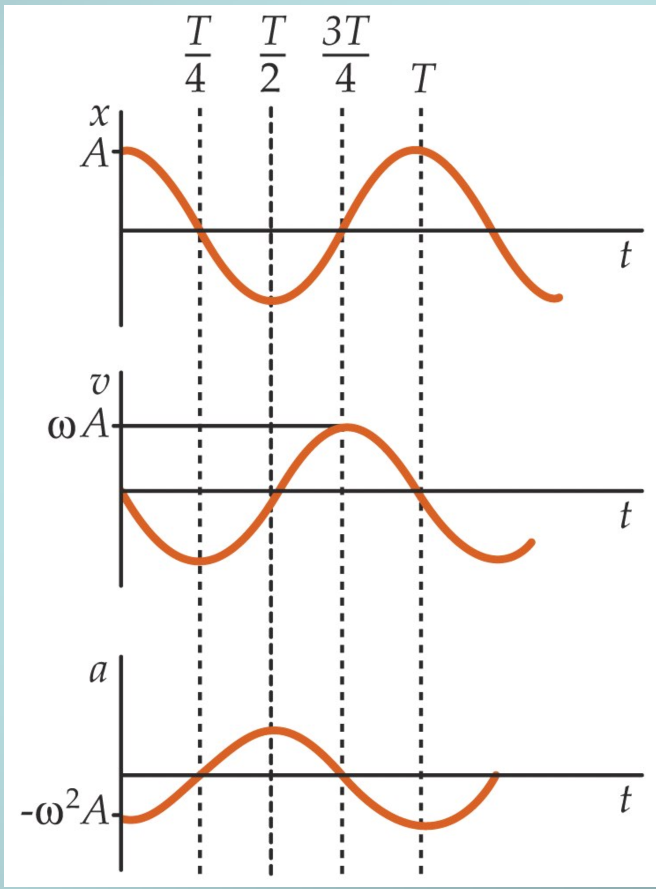
$$ma = -kx \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Movimento Harmónico Simples

Contas simples, com uma ferramenta básica, o EXCEL, permite ... "experimentar" o comportamento deste Movimento Harmónico Simples (MHS).

Assim se verifica ... isto →



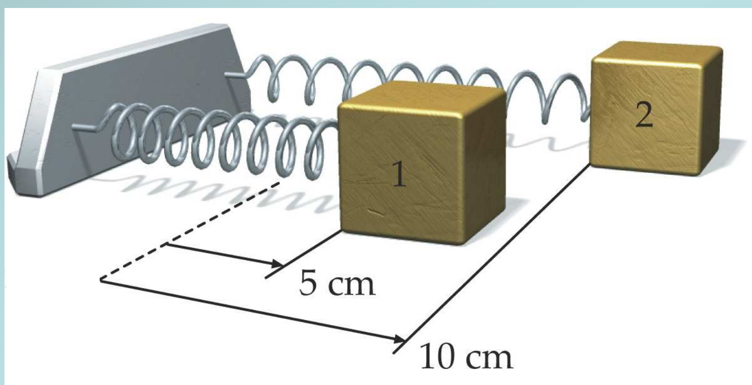
Movimento Harmónico Simples

Uma experiência (... experimental!)

2 molas iguais

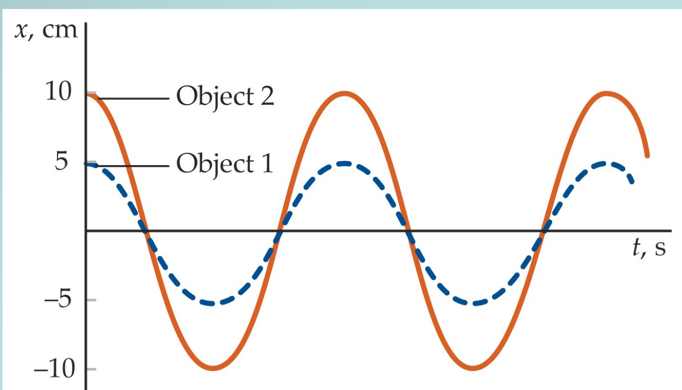
2 massas iguais

... deslocamentos diferentes



COMO OSCILARÃO ELAS?

Com frequências diferentes ? (*Argumentos pro e contra ?*)



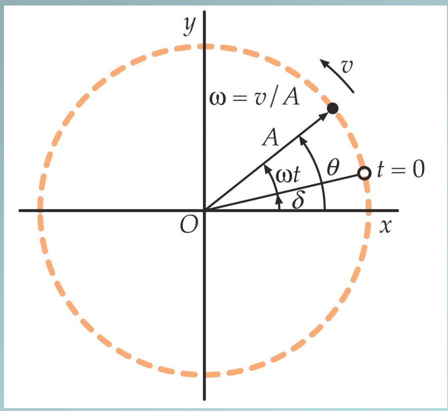
Naturalmente!
Como

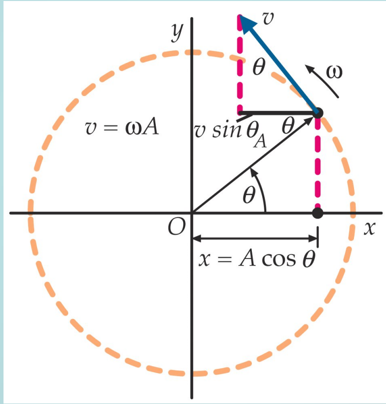
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

a frequência não depende da amplitude !

Movimento Harmónico Simples

Movimento Harmónico Simples *versus* Movimento Circular Uniforme





Projecção em xx´ $x = A\cos(\omega t + \delta)$ $v_x = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$

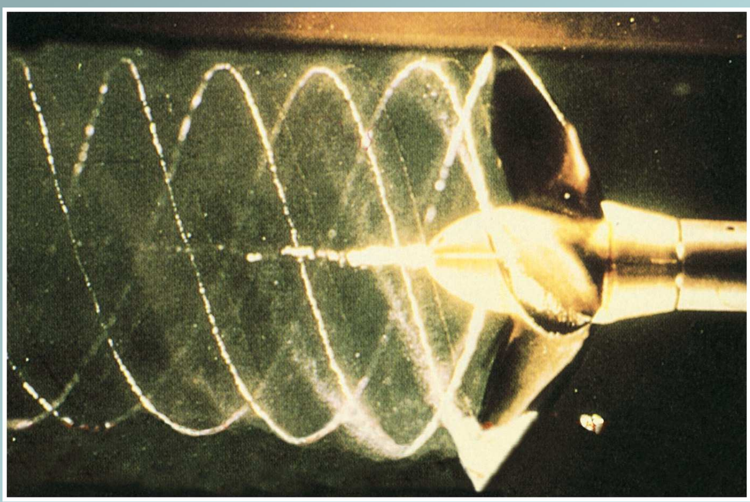
E se pensássemos na projecção segundo yy´?

$x = A\sin(\omega t + \delta)$ $v_x = \omega A\cos(\omega t + \delta)$

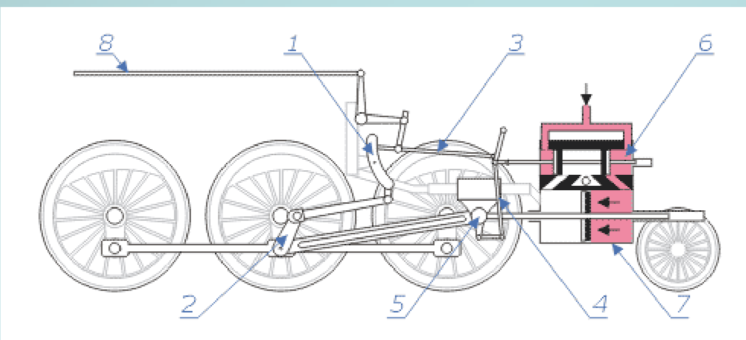
Que significado tem isso ?

Conclusão: a projecção de um **vector girante** (associado ao MCU) sobre um eixo é sempre um MHS

Movimento Harmónico Simples



A projecção de um MCU sobre um eixo é sempre um MHS



O sistema de biela e manivela é de ENORME UTILIDADE, por permiter transformar movimentos de vai-vem em movimentos circulares

MHS - Energia

ENERGIA POTENCIAL
por detrás da lei de Hooke

$$F = -kx \quad \leftrightarrow \quad \boxed{U = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

ENERGIA POTENCIAL
do MSH

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$

ENERGIA CINÉTICA
do MSH

$$K = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

... o Teorema de Pitágoras

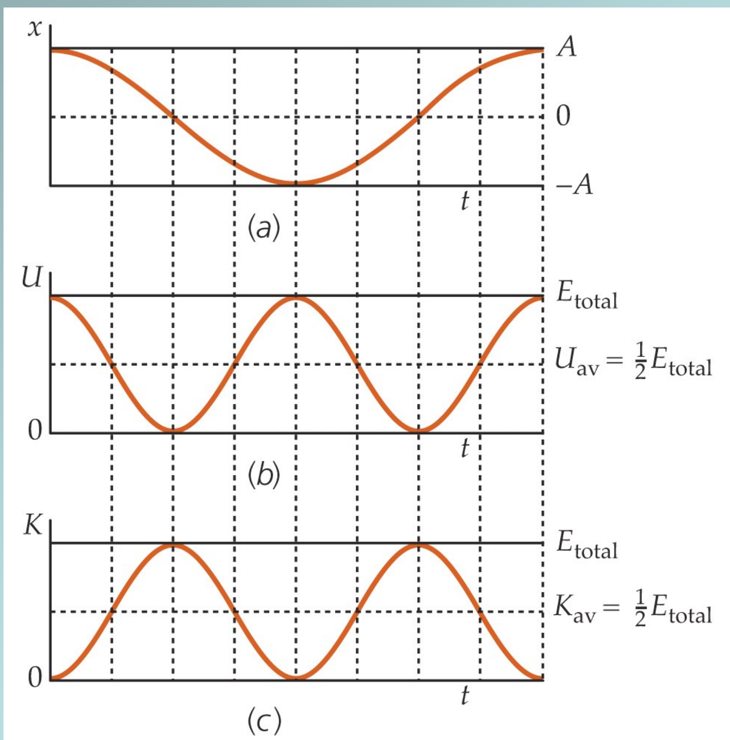
Com $\alpha = (\omega t + \delta)$ temos

$$E_{tot} = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2$$

A energia total no MHS é proporcional ao quadrado da amplitude

MHS - Energia

Gráficos – para ajudar à compreensão dos pormenores...



$$U_{med} = K_{med} = \tfrac{1}{2}E_{tot}$$

MHS e gravidade

Como oscila de facto um corpo suspenso duma mola ?

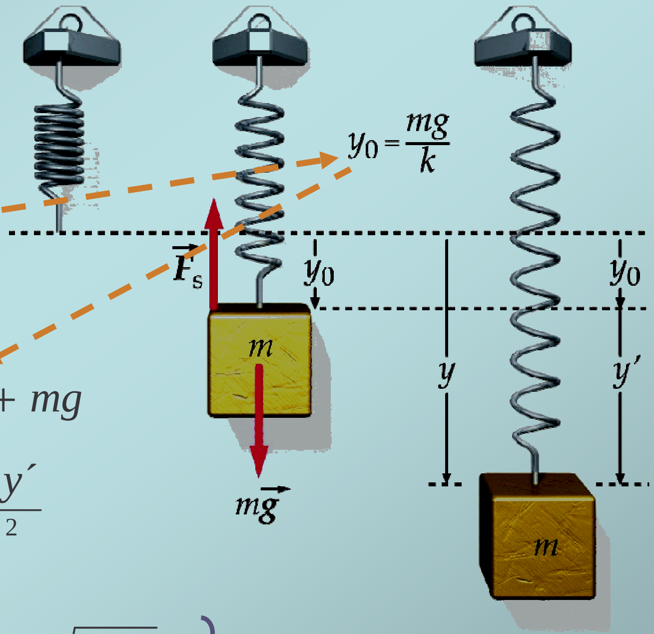
Recurso aos princípios básicos – o diagrama de corpo livre

$$\sum F_y = -ky + mg$$

y = afastamento em relação ao equilíbrio.

Suspenso o corpo, o ponto de equilíbrio passa a ser y_o

$$y \rightarrow y' + y_o$$



Resulta assim $$\sum F_y = -k(y' + y_o) + mg$$

$$\sum F_y = -ky' = m\frac{d^2 y'}{dt^2}$$

CONCLUSÃO

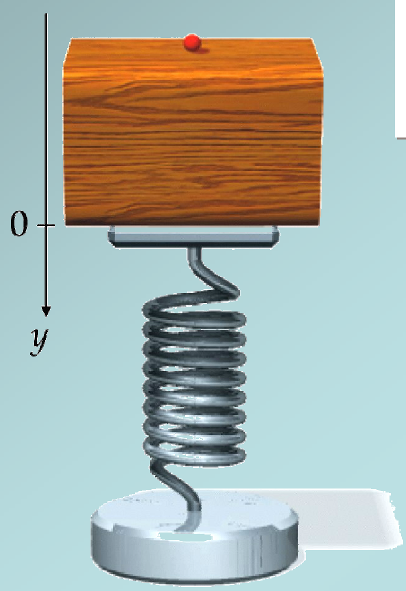
$$y' = A\cos(\omega t + \delta) \qquad \omega = \sqrt{k/m}$$

$$U = -\int F_y dy = -\int -ky' dy' = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

Passa-se tudo na mesma, num "referencial" deslocado!

MHS e gravidade

Um problema complexo ... tornado simples



Um bloco oscila com 4Hz e uma amplitde de 7 cm. No instante em que ele está no ponto mais baixo deposita-se sobre ele uma bolinha.

– Será que a bolinha abandona o bloco ?

– Se sim, em que posição ?

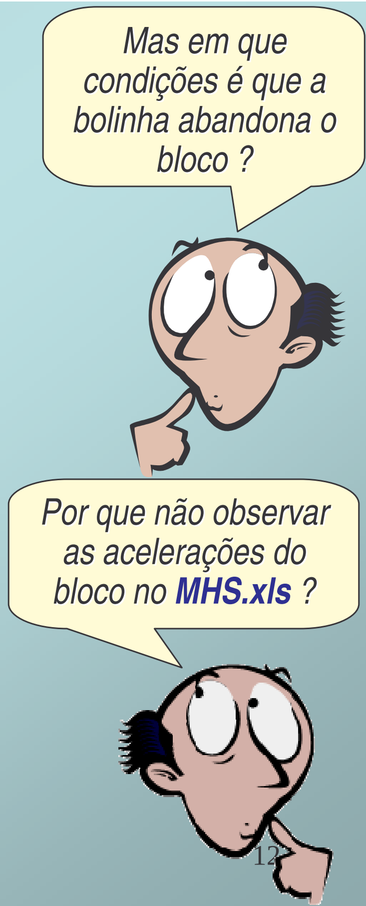
$$Se \; a_y > g \ldots$$

$$a_y = g = -\omega^2 y$$

$$g = -\omega^2 y$$

$$= -(2\pi f)^2 y$$

$$y = -\frac{g}{(2\pi f)^2} = \ldots = -1{,}55cm$$

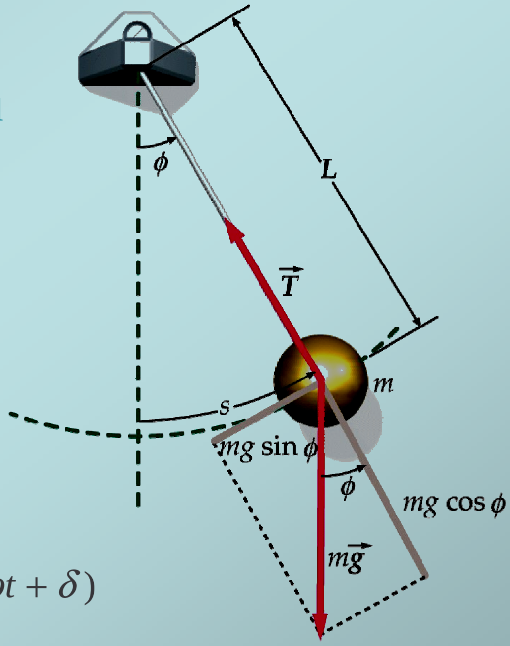


MHS e gravidade

PÊNDULO SIMPLES

massa, ligada por um fio de massa desprezável a um ponto fixo, oscila no plano vertical que passa por esse ponto

Forças presentes
$$\begin{cases} \vec{T} & \text{radial} \\ \vec{P} = m\vec{g} = -mg\ \sin\phi\ \hat{t} & \text{tangencial} \\ \qquad + mg\ \cos\phi\ \hat{r} & \text{radial} \end{cases}$$



$$-mg\ \sin\phi = m\frac{d^2 s}{dt^2} = m\frac{d^2 L\phi}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi$$

Para pequenos ângulos $\quad \sin\phi \cong \phi \ \Rightarrow\ \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\phi$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \qquad \text{com} \quad \omega = \sqrt{g/L} \quad \text{e} \quad \phi = \phi_o \cos(\omega t + \delta)$$

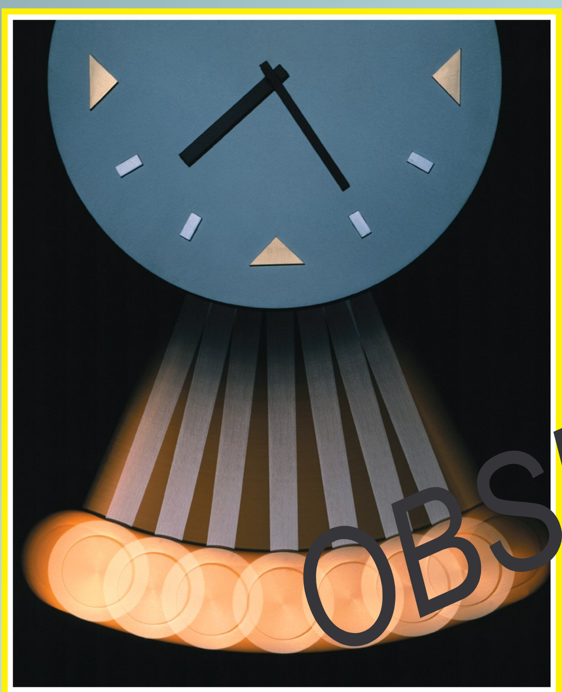
Consequentemente $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L/g}$

MHS e gravidade

PÊNDULO SIMPLES

massa, ligada por um fio de massa desprezável a um ponto fixo, oscila no plano vertical que passa por esse ponto

... EXECUTANDO PEQUENAS OSCILAÇÕES !!!

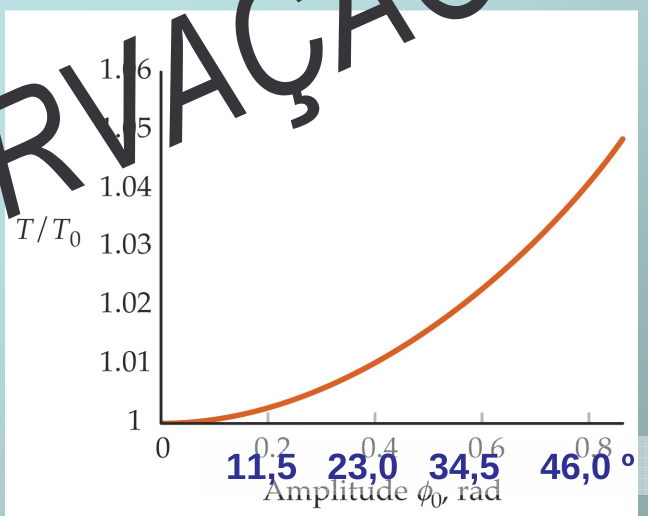


O isocronismo das pequenas oscilações está por detrás do relógio de pêndula ...

... mas tal isocronismo perde-se quando cresce a amplitude das oscilações !!!
Em rigor, tem-se

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\right]$$

To = 2π(L/g)$^{1/2}$



MHS e gravidade

PÊNDULO FÍSICO

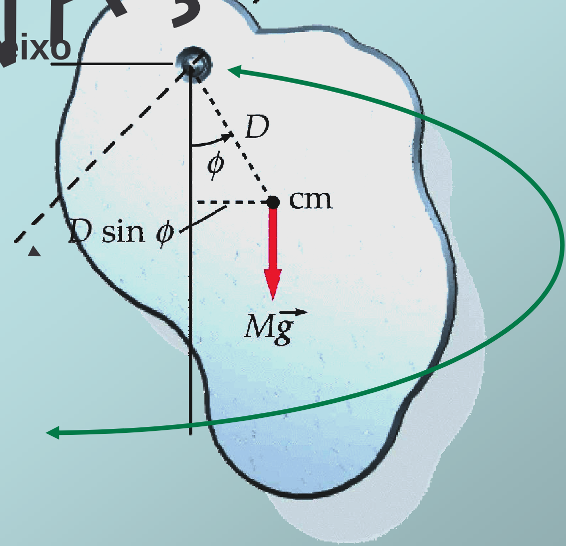
Aqui, só como curiosidade ... (não para avaliação !)

OBSERVAÇÃO

Em vez de $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L/g}$

temos agora

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$



Sendo

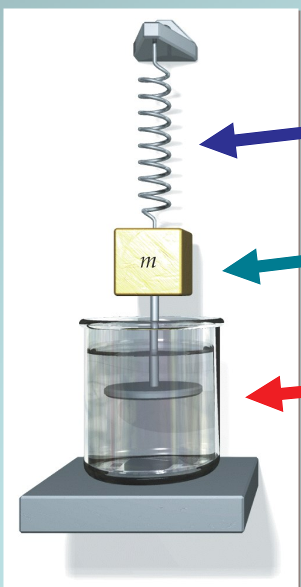
I=momento de inércia (relativo ao eixo de rotação)

D=distância desse eixo ao CM

Oscilações amortecidas

Aqui está **um tema** que é **bastante abrangente** !

Este sistema que nos serve de exemplo envolve partes individualizadas onde "armazenamos" ...



... energia **potencial**
na mola, dependendo da posição em relação à posição de equilíbrio

... energia **cinética**
na massa, dependendo da velocidade que a anima

... e energia **térmica**
no calor transferido para a massa líquida como agitação molecular

Entram portanto em jogo **forças dissipativas**
Consequência: E_{tot} não se conserva !

Oscilações amortecidas

Fisicamente o amortecimento resulta da força que o líquido, ao ser arrastado (***deslocado***), exerce sobre o disco.

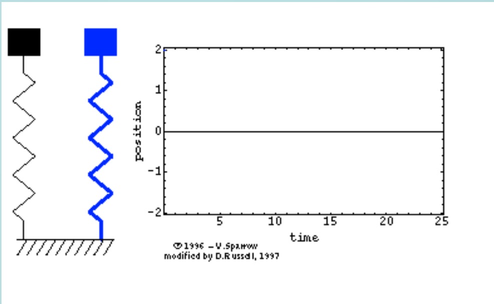
Essa força é proporcional à velocidade $\vec{F}_d = -b\vec{v} \quad \Rightarrow$

$$\vec{F}_H + \vec{F}_d = m\vec{a} \qquad \rightarrow \qquad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Solução desta equação diferencial de 2ª ordem

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \delta) \quad com \quad \omega' = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{b}{2m\omega_o}\right)^2}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

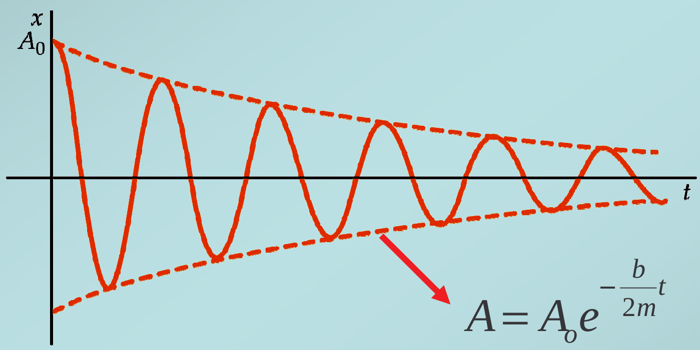


Trata-se portanto de
- uma oscilação
- com amplitude decrescente
- com frequência semelhante a ω_o (para pequenos amortecimentos)

Oscilações amortecidas

A amplitude do movimento diminui pois exponencionalmente

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \delta)$$



$$A = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}$$

O trabalho das forças dissipativas resulta na diminuição da energia mecânica. Ora a energia mecânica é proporcional ao quadrado da amplitude do movimento, logo:

$$A^2 = A_o^2 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = m/b$$

Amortecimento crítico $b_c = 2m\omega_o$

Sobreamortecimento

Com $\quad \omega' = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{b}{2m\omega_o}\right)^2}$

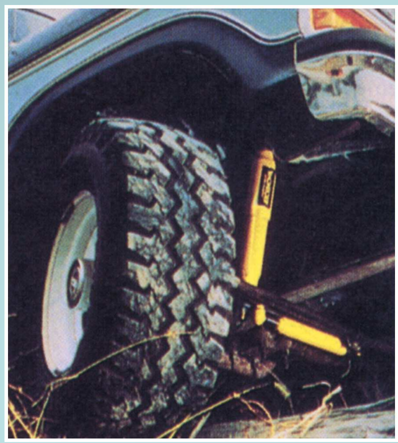
à medida que *b* aumenta, diminiu a frequência até atingir a **frequência nula** – o chamado **AMORTECIMENTO CRÍTICO**

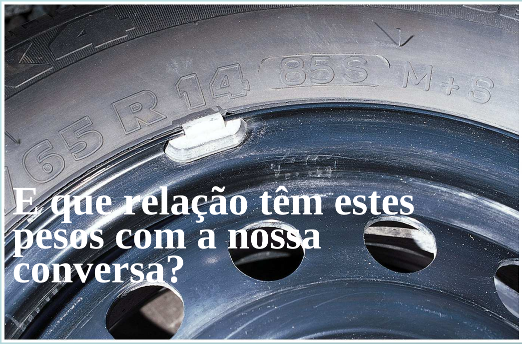
Oscilações amortecidas

Para que serve isto ?

ou

O que é (e para que serve) um amortecedor em bom estado ?

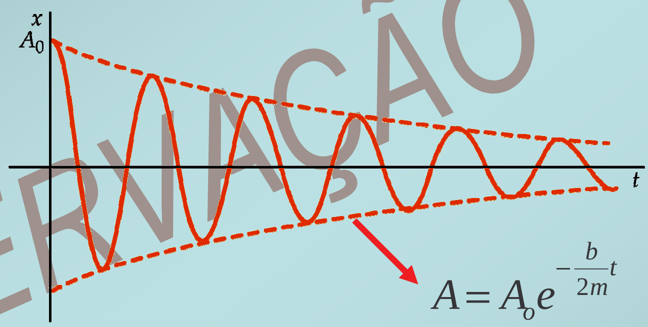




Oscilações amortecidas

Assim, uma vez que se verifica ser

$$A^2 = A_o^2 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = m/b$$



$$A = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}$$

obrigatoriamente a energia decrescerá segundo a mesma lei. De facto,

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 (A_o e^{-\frac{b}{2m}t})^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A_o^2 e^{-\frac{b}{m}t} = E_o e^{-t/\tau} \qquad com \quad \tau = m/b$$

Define-se o <u>**factor *Q***</u>, dado por ***Q*=*ω*$_o$*τ***, que traduz a <u>"qualidade" do amortecimento</u> e corresponde ao **inverso da fracção de nergia perdida por cada ciclo de oscilação**.

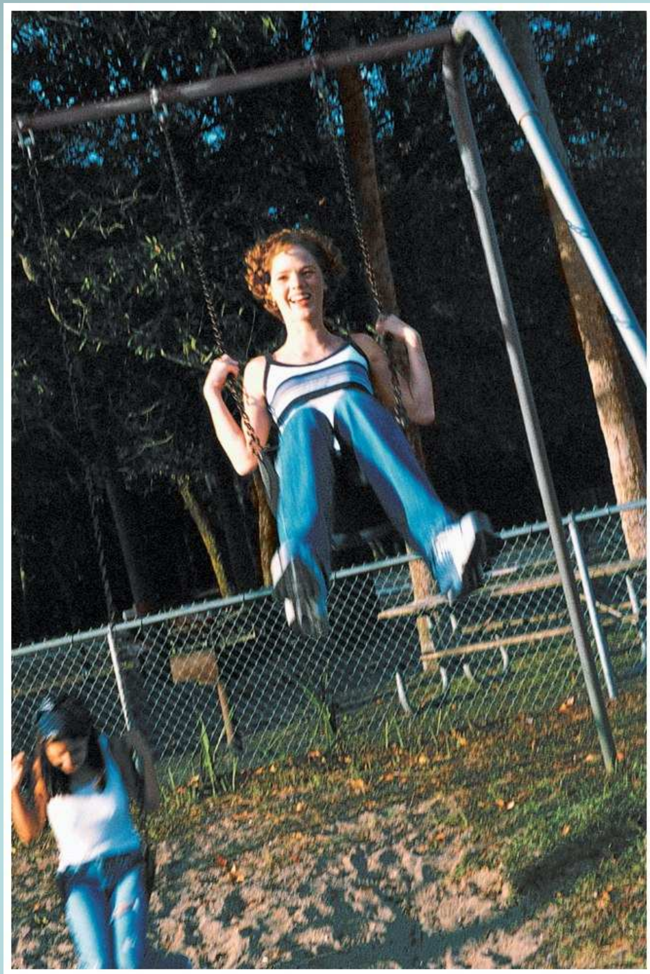
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}E_o e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}E_o e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}E \qquad \text{Substituindo agora} \begin{cases} dt & por \quad T \\ dE & por \quad \Delta E \end{cases} \text{resulta}$$

$$\left.\frac{|\Delta E|}{E}\right|_{ciclo} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_o \tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$Q = \frac{2\pi}{\left.\frac{|\Delta E|}{E}\right|_{ciclo}} \qquad ...desde \;\; que \;\; \frac{|\Delta E|}{E} << 1$$

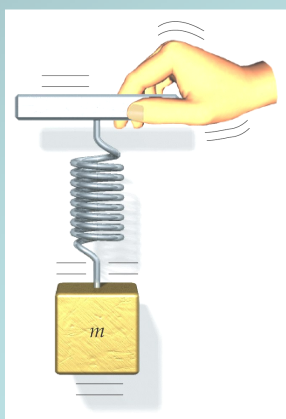
amortecimento moderado

Oscilações forçadas



Oscilações forçadas

Que resultará se provocarmos um movimento do ponto de apoio da mola para baixo e para cima, com frequência próxima de $\sqrt{k/m}$?

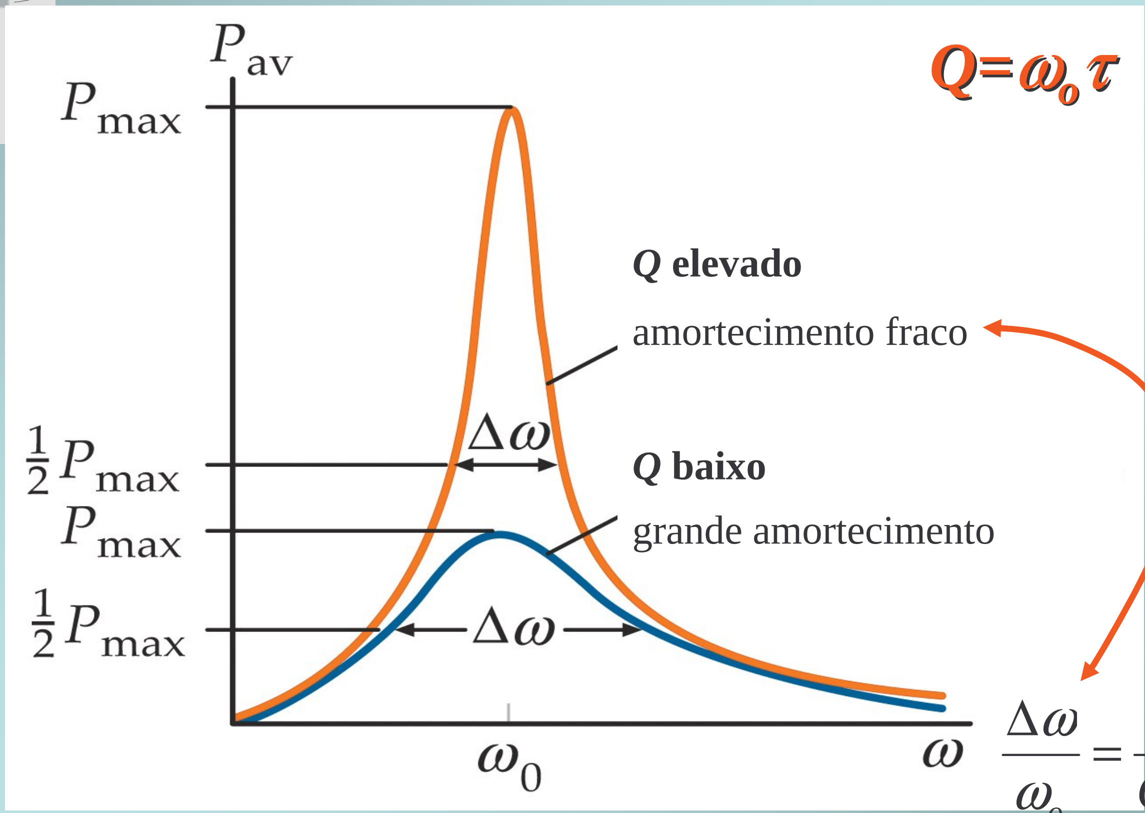


E se essa frequência for diferente da frequência "própria" do sistema mola-massa ?

Porque não experimentarmos ???

Oscilações forçadas

RESSONÂNCIA



$$Q=\omega_o\tau$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o}=\frac{1}{Q}$$

Oscilações forçadas

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F_0\cos\omega t$$

$F = - kx$

O sistema de frequência própria ω_o vê a sua oscilação modificada pela força exterior de frequência ω.

$$x=A\cos(\omega t-\delta)$$

O sistema movimenta-se com frequência ω (não com ω_o !)

$$\tan\delta=\frac{b\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

... oscila desfasado de δ em relação à força exterior

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2}}$$

... e com uma amplitude que depende de ω (e da diferença ω - ω_o)

EXEMPLO

m=1 kg
k=600 N/m
F_o=0,5 N