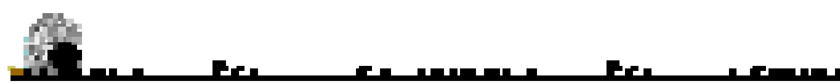
1ªAula do cap. 04

Movimento em 2 Dimensões 2-D

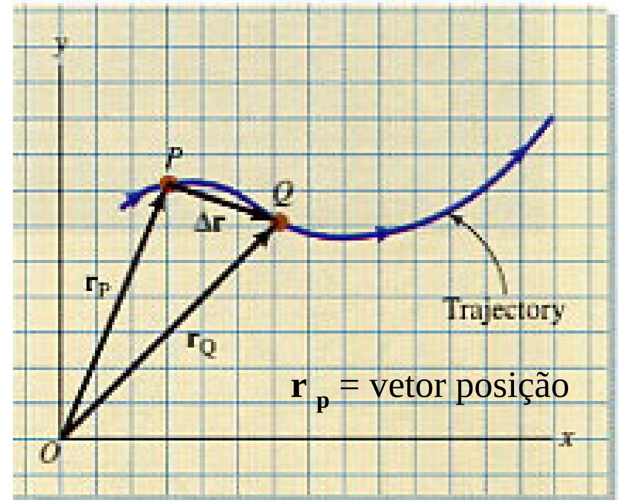
Introdução ao movimento em 2-D.
Vetor Posição e Deslocamento,
Velocidade e aceleração,
Princípio da Independência dos Movimentos,
Movimento em 2-D – Lançamento Horizontal,
Lançamento Oblíquo
Equações para “x(t)” e “y(t)”.



Referência:
Halliday, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 1.
Cap. 04 da 6ª ou 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

Posição e deslocamento

Trajetória é o caminho percorrido por um móvel.
Trajetória é o conjunto das posições ocupadas pelo móvel.



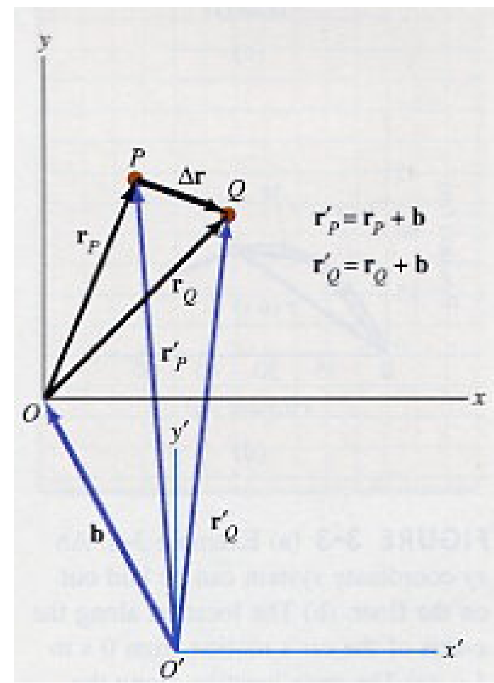
Deslocamento

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$$

Note que Δr não depende da origem

O vetor posição em 2-D fica dado por

$$\mathbf{r(t)} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$



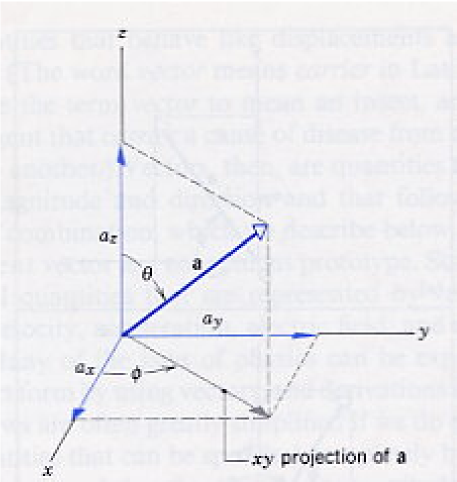
Posição e deslocamento

O vetor posição em 2D fica dado por

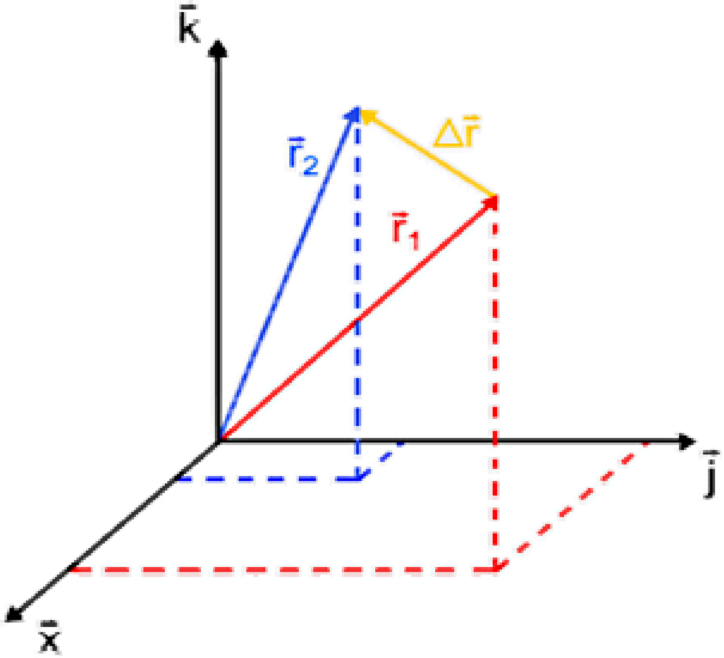
$$\mathbf{r(t)} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

No caso espacial 3-D temos:

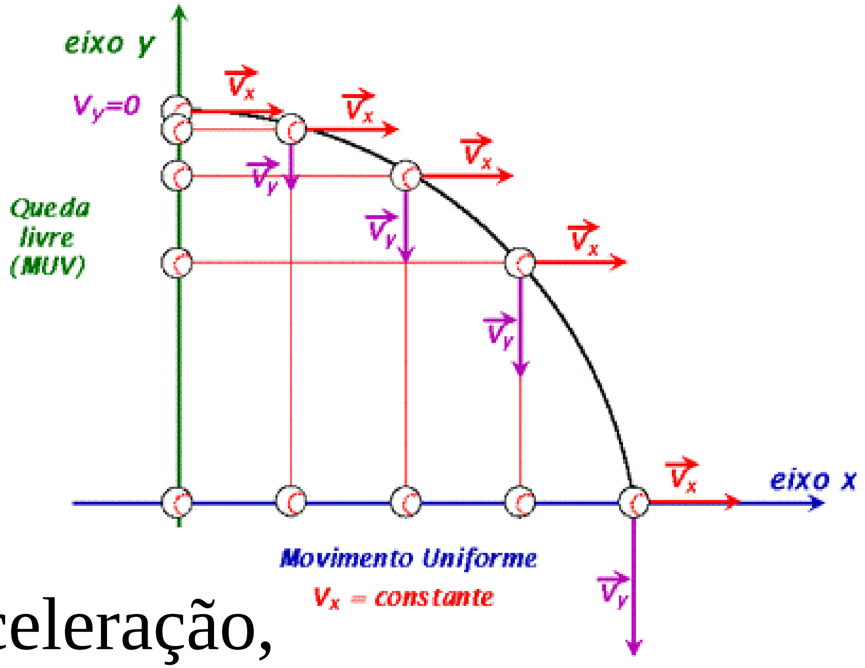
$$\mathbf{r(t)} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$



Deslocamento 3D



Lançamento Horizontal



Lançamento Horizontal

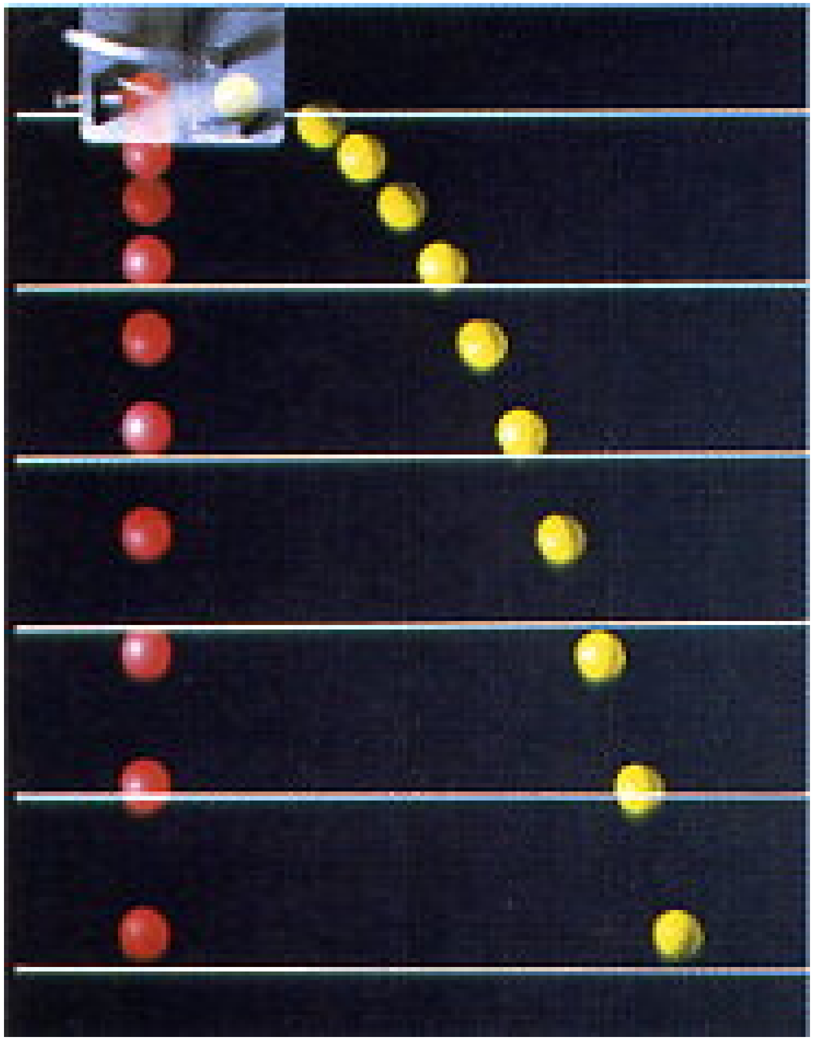
- Aceleração a_y constante,
- Plano formado pela

velocidade inicial e pelo vetor aceleração,

- Movimento fora do plano não é possível,
- Dois problemas unidimensionais independentes.

Lançamento Horizontal

O móvel que é lançado horizontalmente percorre uma trajetória parabólica, que pode ser construída utilizando-se a composição de dois movimentos independentes em “x” e “y”.



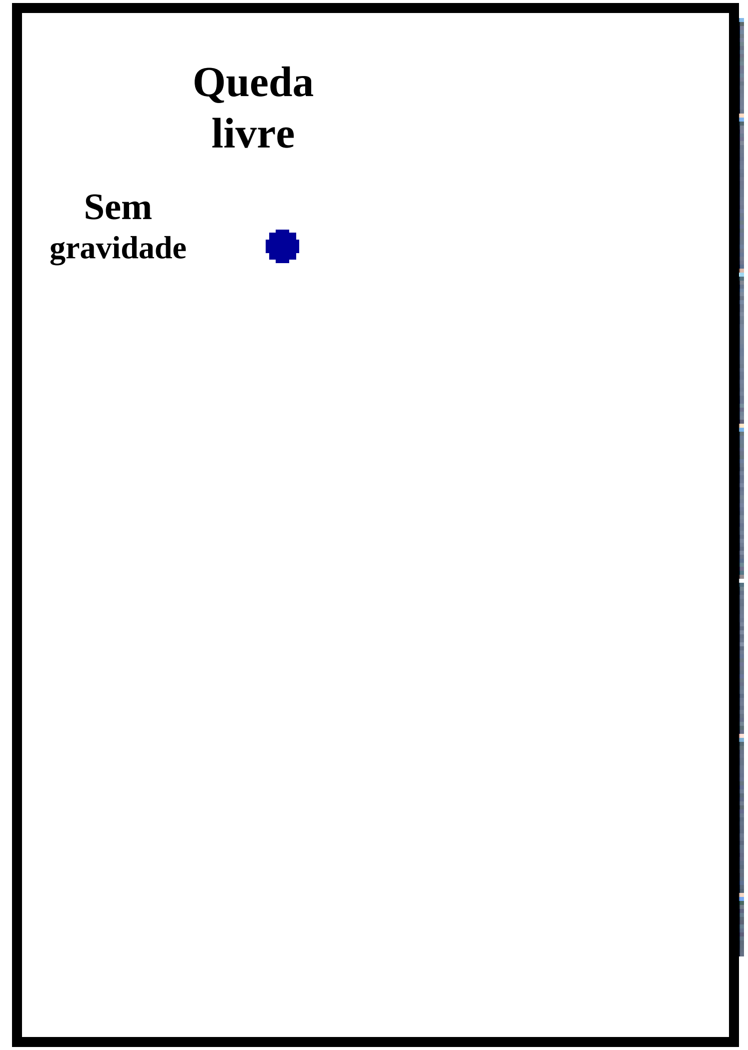
Tempo de queda depende da altura de queda.

Lançamento Horizontal

A coordenada y é independente da velocidade v_x,

Isto é ilustrado na figura onde duas bolas são jogadas sob ação da gravidade.
A vermelha é solta $v_{0y} = 0$ e a amarela tem velocidade inicial v_x.

Em cada instante elas tem a mesma altura!!



Lançamento Horizontal

Bola sai do penhasco com v_{0x} = 10 m/s na horizontal e componente v_{0y} = 0

componente x de r

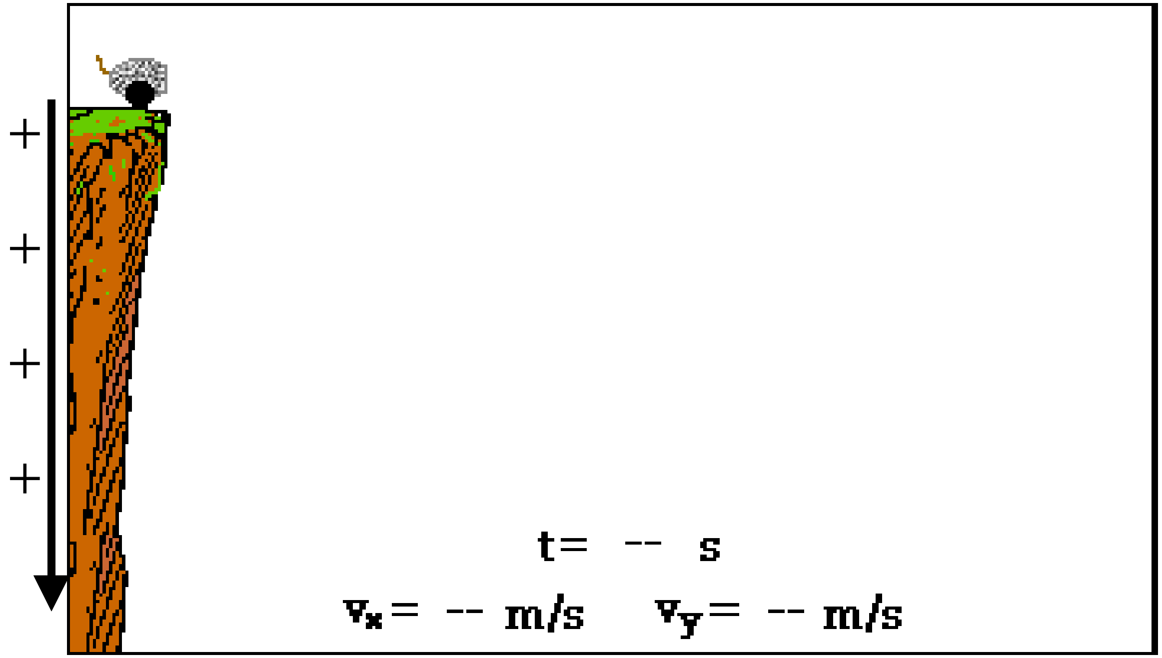
$$\mathbf{x = x_0 + v_{0x} t}$$

$$\mathbf{v_x = v_{0x}}$$

componente y de r

$$\mathbf{y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\mathbf{v_y = v_{0y} + g t}$$



Lançamento Horizontal

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$

A velocidade é

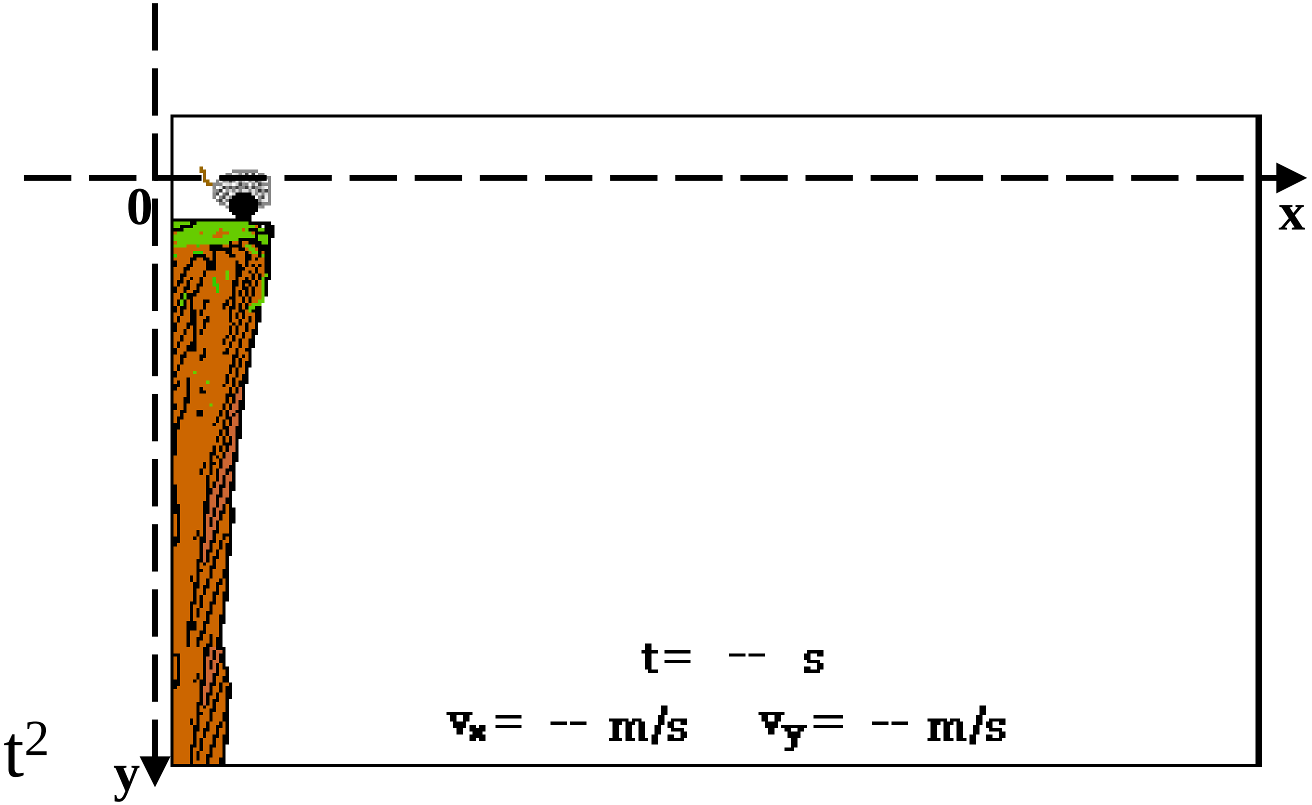
$v_x = 10$ m/s

$v_y = (9.8\ \text{m/s}^2)\ t$

A posição é

$x(t) = (10\ \text{m/s})\ t$

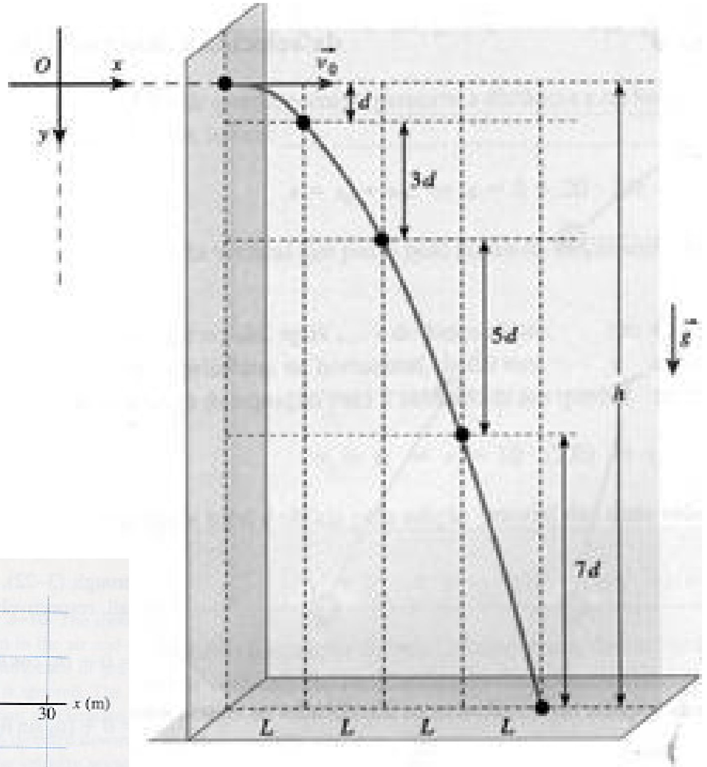
$y(t) = (4.9\ \text{m/s}^2)\ t^2$



Lançamento Horizontal

Bola sai do penhasco com $v_{0x} = 10$ m/s na horizontal e componente $v_{0y} = 0$

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$



A velocidade é

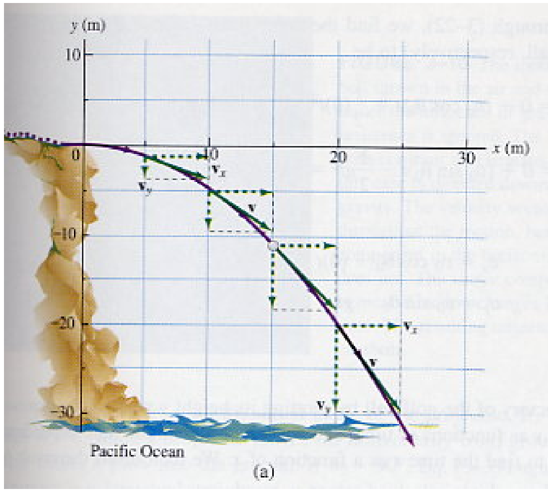
$v_x = 10$ m/s

$v_y = (9.8\ \text{m/s}^2)\ t$

A posição é

$x(t) = (10\ \text{m/s})\ t$

$y(t) = (4.9\ \text{m/s}^2)\ t^2$



Lançamento Horizontal

Vetores r, v e a para t = 1s e t = 2s. Enquanto a = g é constante r e v variam com o tempo.

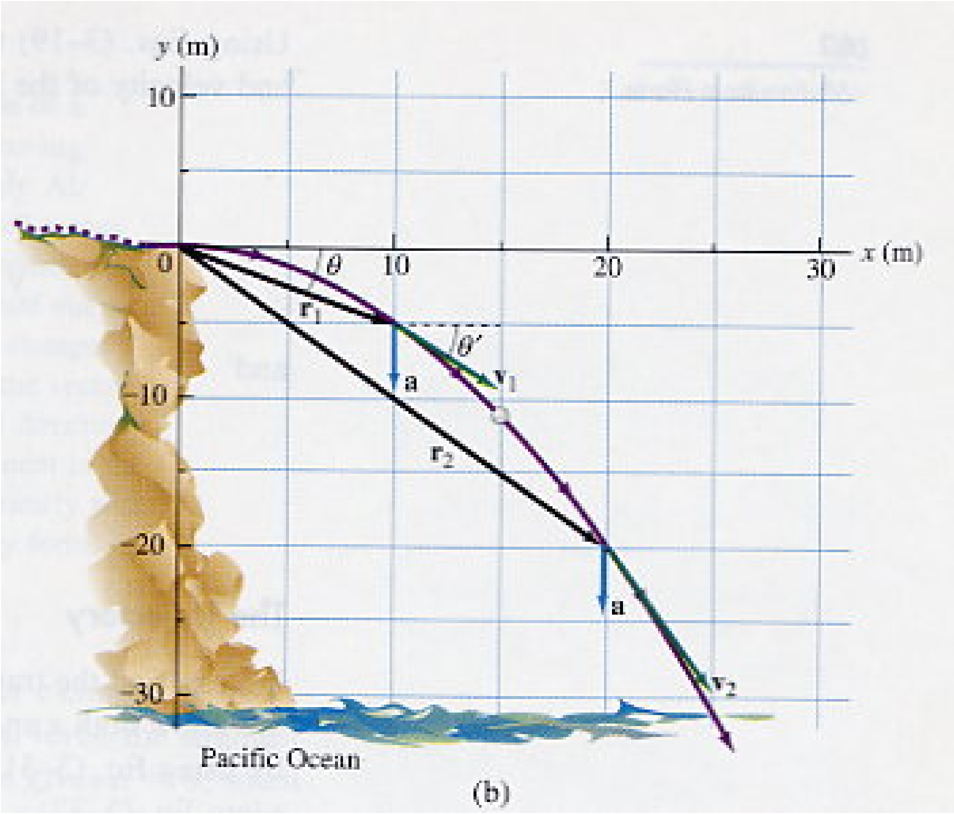
Como varia o ângulo dos vetores r e v?

vetor r:

$\tan \theta = y/x = (0.49\ s^{-1})t$

vetor v:

$\tan \theta' = v_y/v_x = (0.98\ s^{-1})t$

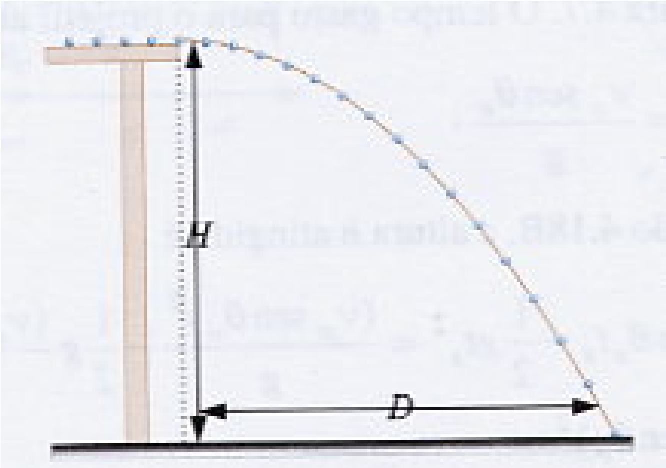


Alcance - Exemplo

Bola sobre a mesa e cai de altura H = 80 cm com velocidade inicial v_0 = 2.1 m/s. Qual a distância D onde ela atinge o piso?

A altura ***H*** é dada por

$$H = \frac{1}{2} g t_H^2, \Rightarrow t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$



A vel. horizontal se mantém constante

$$D = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$D = 2.1 m/s \sqrt{\frac{2x0.80m}{9.8 m/s^2}} = 85\,cm$$

Resumo

Nesse caso $a_y = |g|$.   Na direção x   v é constante MRU!

componente x de r $$\mathbf{x = x_0 + v_{0x} t}$$

componente x de v (constante) $$\mathbf{v_x = v_{0x}}$$

componente y de r $$\mathbf{y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2}$$

componente y de v $$\mathbf{v_y = v_{0y} + g t}$$

em t =0 $$\begin{cases} r_0 = x_0 i + y_0 j \\ v_0 = v_{0x} i + v_{0y} j \end{cases}$$

Movimento de Projéteis

Cap. 4 Lançamento Oblíquo.

Movimento de um projétil sob ação da gravidade,

Exemplo de lançamento oblíquo,

Altura máxima e alcance.

Movimento em 2-D

Equações independentes para x(t) e y(t).

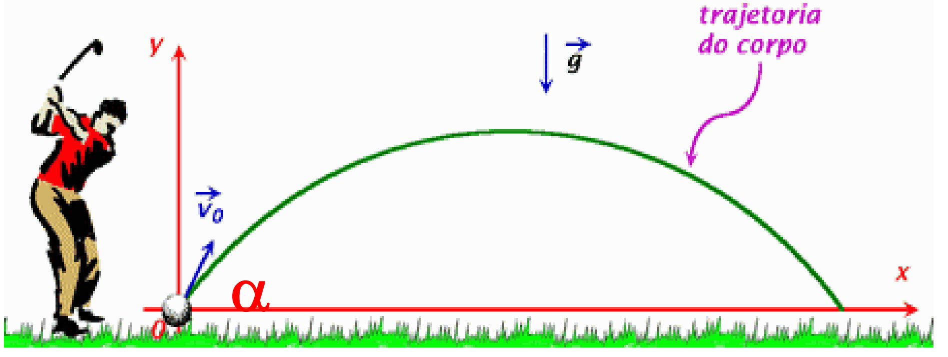
Exemplo de movimento em 2-D com aceleração em x e y.

Referência:

Halliday, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 1. Cap. 04 da 6ª ou 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

Lançamento Oblíquo

É o estudo do movimento de corpos, lançados com velocidade inicial v_0 e direção α com o eixo +x na superfície da Terra. Na figura a seguir vemos um exemplo típico de lançamento oblíquo realizado por um jogador de golfe.



Aplicando o princípio da simultaneidade e independência dos movimentos de Galileu. A projeção do movimento no eixo **x** e **y** resulta em dois movimentos:

- No eixo "y" a projeção da bola executa um movimento de aceleração constante e de módulo igual a g. Trata-se de um M.R.U.V. (lançamento vertical). Este movimento pode ser analisado na subida e/ou na descida.

- Em relação a horizontal, a projeção da bola executa um M.R.U.

Lançamento Oblíquo

Exemplo: Um projétil é disparado por um canhão sobre o solo de um campo horizontal com uma velocidade de módulo igual a 288km/h. Sabendo-se v_0 é o vetor velocidade inicial forma com o solo um ângulo de 60º. Desprezando a resistência do ar, determine:

a) o tempo gasto pelo projétil para atingir a altura máxima;

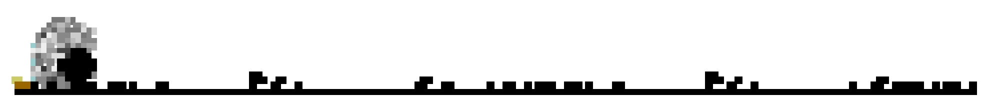
b) o tempo gasto pelo projétil para retornar ao solo;

c) o alcance do projétil;

d) a altura máxima atingida pelo projétil;

e) qual o módulo da velocidade do projétil 2s após o disparo.

Neste exemplo adote $|g| = 9,8\ ms^{-2}$

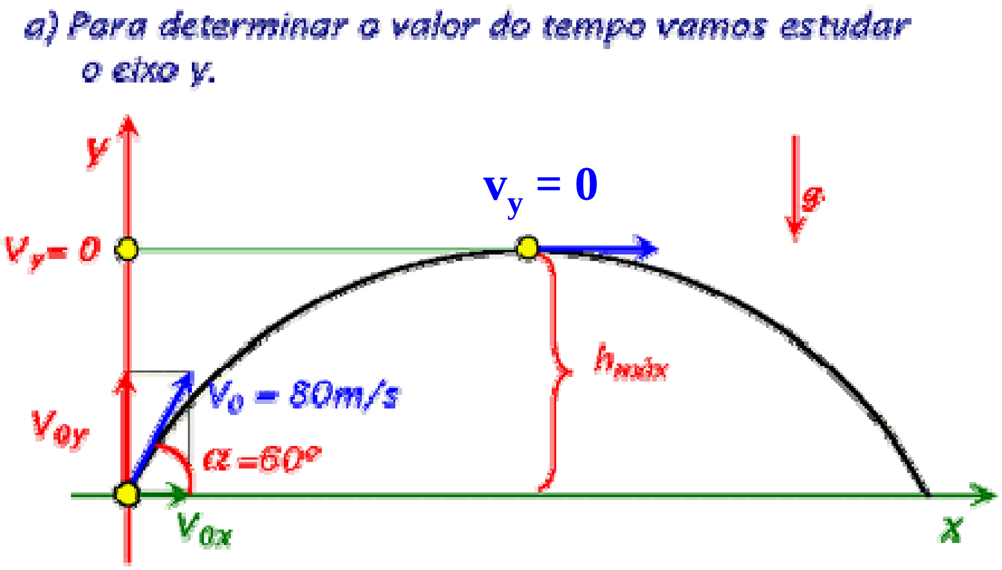


Lançamento Oblíquo

Sabendo-se v_0 288km/h e que o ângulo α = 60º.

a) o tempo gasto pelo projétil para atingir a altura máxima;

b) o tempo para o projétil retornar ao solo.



$v_y = v_{0y} + \mathbf{gt}$

$0 = 69{,}28 - 9{,}8\mathbf{t}$

$69{,}28 = 9{,}8\mathbf{t}$

$69{,}28/ 9{,}8 = \mathbf{t}$

$\mathbf{t_s}$ = 7,0 s para subir

$v_{0y} = v_0$ sen 60º = 80m/s. 0,866 = v_{0y} = 69,28 m/s

$v_y = v_{0y} + \mathbf{g}t$

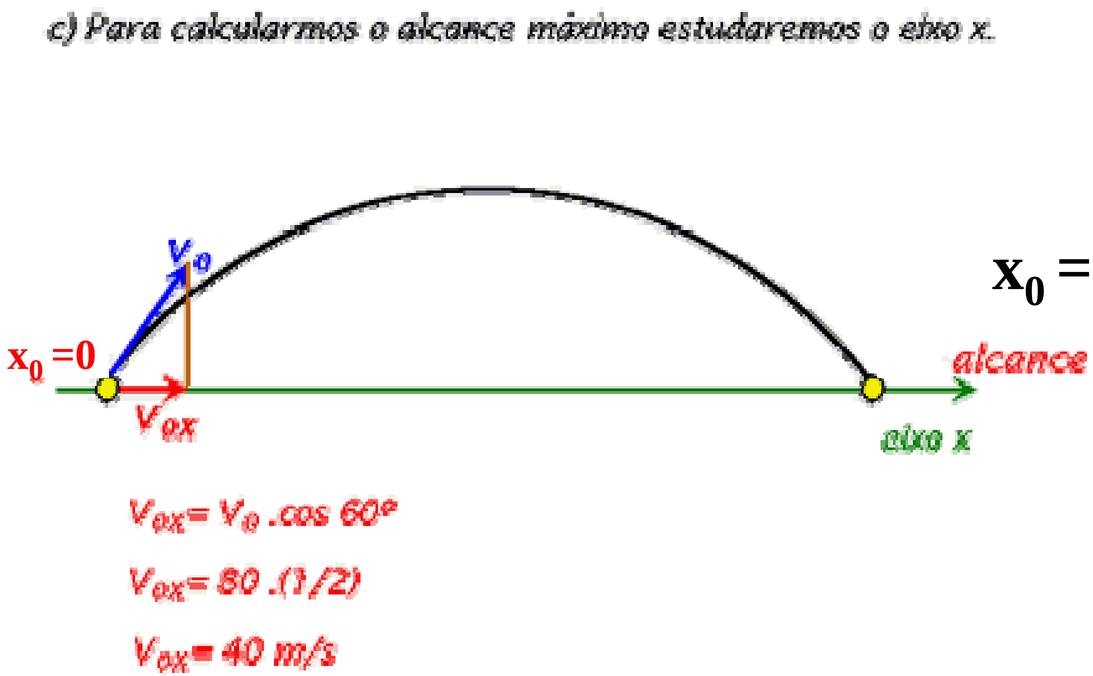
b) Tempo total = 14 s

Lançamento Oblíquo

Sabendo-se v_0 288km/h e que o ângulo α = 60º.

c) o alcance do projétil;

Tempo total = 14 s



$$x(t) = x_0 + v_{0x}.t$$

$$x_0 = 0 \text{ e } v_{0x} = v_x = \text{constante}$$

$$x(14s) = 40m/s.t$$

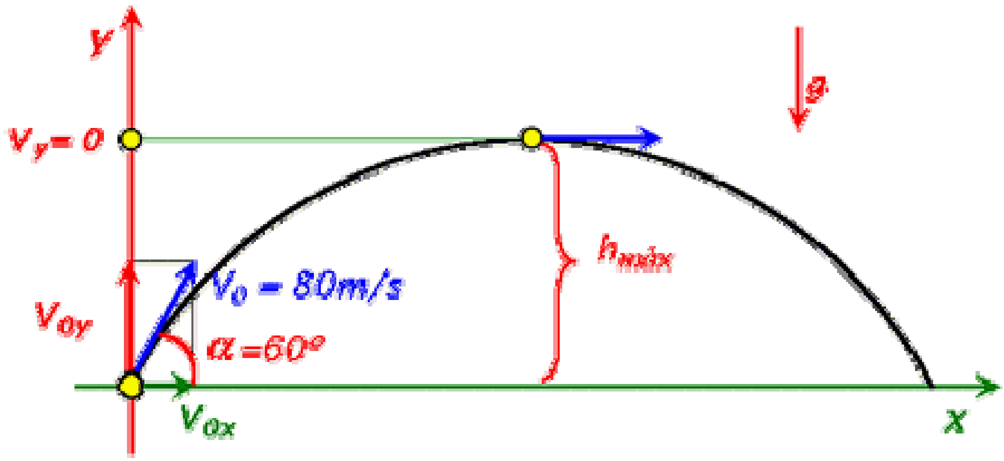
$$x(14s) = 40m/s.14s$$

$$x(14s) = 560m$$

Lançamento Oblíquo

Sabendo-se v_0 288km/h e que o ângulo α = 60º.

d) a altura máxima atingida pelo projétil;



$x_0 = 0$ e $v_{0x} = v_x$ =constante

$y_0 = 0$ e $v_{0y} = 69{,}28$ m/s

na altura máxima $v_y = 0$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2g.\Delta y$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}.t + ½\, g.t^2$$

ou

$$0^2 = 69{,}28^2 + 2(-9{,}8).\Delta y$$

$$0^2 = 4799{,}71 + 2(-9{,}8).\Delta y$$

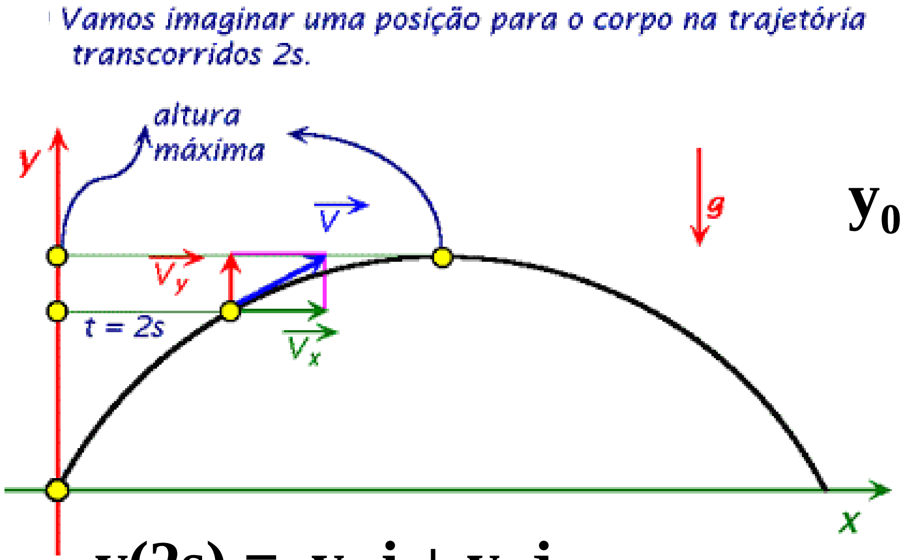
$$-4799{,}71 = 2(-9{,}8).\Delta y$$

$$h_{máx} = 244{,}88 \text{ m} = \Delta y$$

Lançamento Oblíquo

Sabendo-se v_0 288km/h e que o ângulo α = 60º.

e) qual o módulo da velocidade do projétil 2s após o disparo.



$$x_0 = 0 \text{ e } v_{0x} = v_x = 40 \text{ m/s}$$

$$y_0 = 0 \text{ e } v_{0y} = 69{,}28 \text{m/s} \quad \text{na } h_{máx} \; v_y = 0$$

$$v_y = v_{0y} + .g.t$$

$$v_y = 69{,}28 - 9{,}8(2s)$$

$$v_y = 49{,}68 \text{ m/s}$$

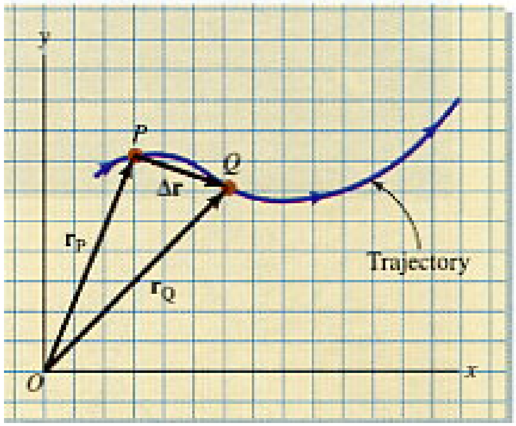
$$v(2s) = v_x\, i + v_y\, j$$

$$v(2s) = 40\text{m/s } i + 49{,}68\text{m/s } j$$

$$|v(2s)|^2 = (40)^2 + (49{,}68)^2 \qquad |v(2s)| = 63{,}78 \text{ m/s} \qquad 51{,}16º$$

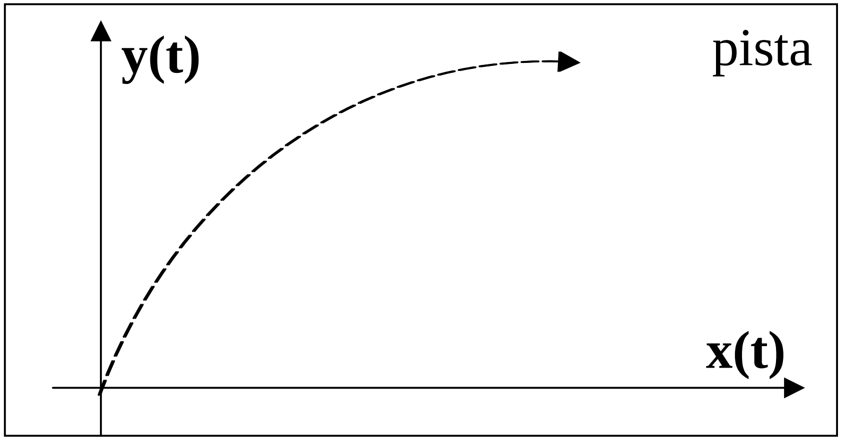
Movimento em 2 D

O vetor posição em 2-D fica dado por



$$\mathbf{r(t)} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Funções de movimento independente para x(t) e y(t)



Movimento em 2 D

Exemplo: Um ponto no carrinho tem equações:

$$x(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \text{ e}$$
$$y(t) = d_1 t^2 + d_2 t + d_3$$

$c_1 = 0.2$ m/s^2	$d_1 = -1.0$ m/s^2
$c_2 = 5.0$ m/s	$d_2 = 10.0$ m/s
$c_3 = 0.5$ m	$d_3 = 2.0$ m

$$\mathbf{x(t) = 0{,}5 + 5\,t + 0{,}2\,t^2 \quad e \quad y(t) = 2 + 10\,t - 1{,}0\,t^2}$$

Movimento em 2 D

Exemplo:

$$\mathbf{x(t) = 0{,}5 + 5\ t + 0{,}2\ t^2} \quad \mathbf{e}$$
$$\mathbf{y(t) = 2 + 10\ t - 1{,}0\ t^2}$$

em $t = 3$ s, $x(3) = 17$ m e $y(3) = 23$ m

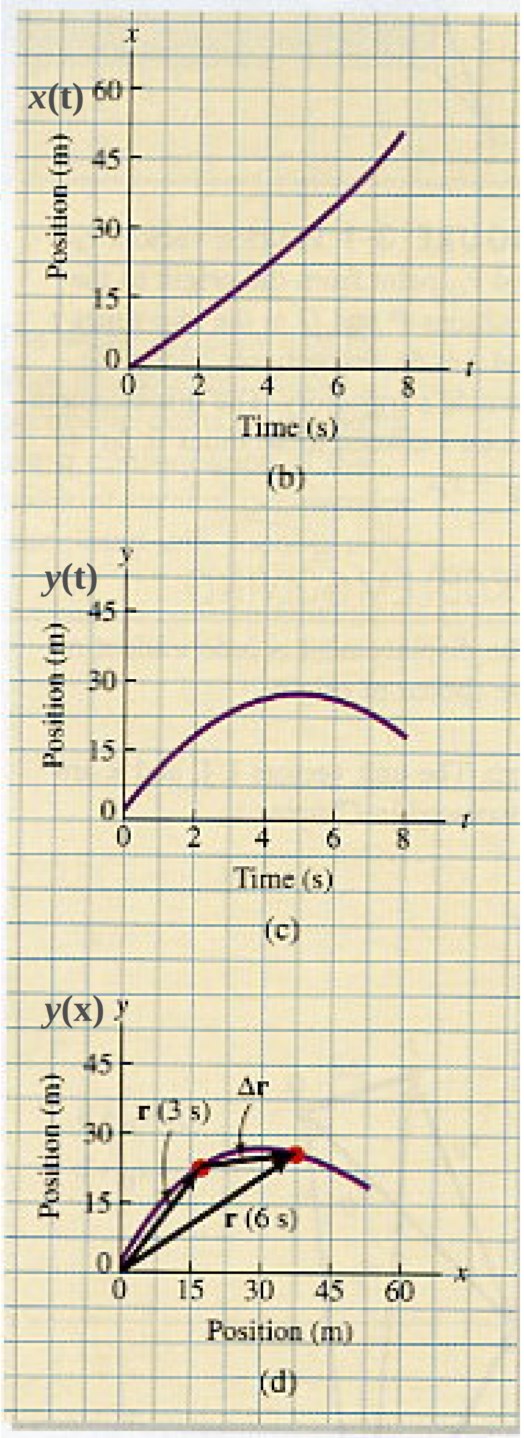
em $t = 6$ s, $x(6) = 38$ m e $y(6) = 26$ m

$\mathbf{r}(3) = (17\mathbf{i} + 23\mathbf{j})$ m

$\mathbf{r}(6) = (38\mathbf{i} + 26\mathbf{j})$ m

Deslocamento:

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(6) - \mathbf{r}(3) = (21\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m

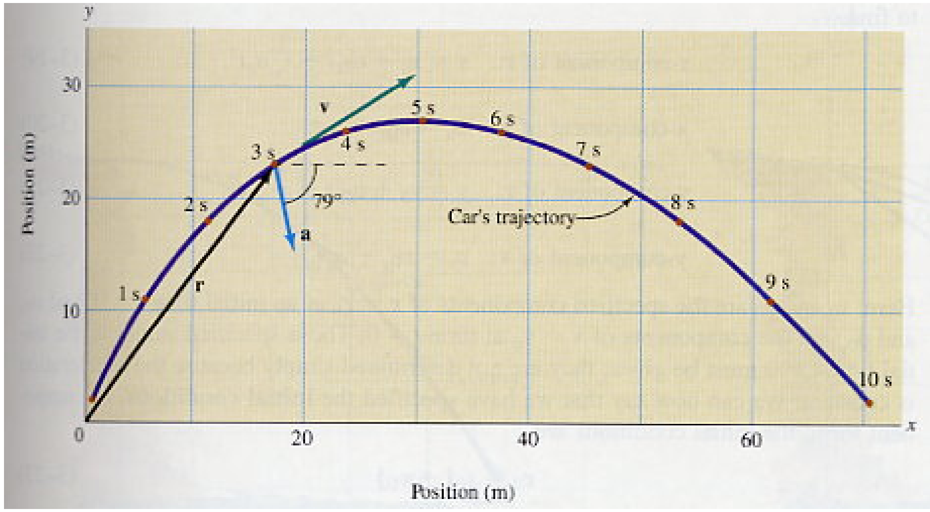


Movimento em 2 D

Similar ao caso de 1-D,
a velocidade média

Velocidade Instantânea

$$v_{med} = \frac{r(t+\Delta) - r(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$



a velocidade instantânea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

em termos de componentes

$$v = v_x i + v_y j$$

$$v = \frac{d\, r(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j$$

ou

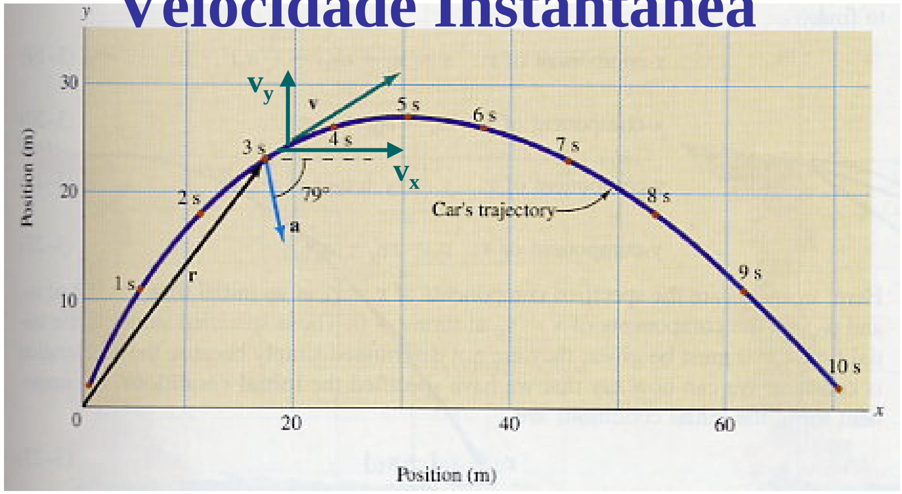
Movimento em 2 D

Velocidade instantânea em termos de componentes

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(c_1t^2 + c_2t + c_3\right) = 2c_1t + c_2$$

$$V_y = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(d_1t^2 + d_2t + d_3\right) = 2d_1t + d_2$$

Velocidade Instantânea



em t =3 s

$$\frac{dx}{dt} = 2\left(0.2\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(3\mathrm{s}\right) + 5.0\,\mathrm{m/s} = 6.2\,\mathrm{m/s}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\left(-1.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(3\mathrm{s}\right) + 10.0\,\mathrm{m/s} = 4.0\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v(3s)} = \left(6{,}2\ \mathbf{i} + 4{,}0\ \mathbf{j}\right)\mathrm{m/s}$$

$$|\mathbf{v(3s)}|^2 = (6{,}2)^2 + (4{,}0)^2$$

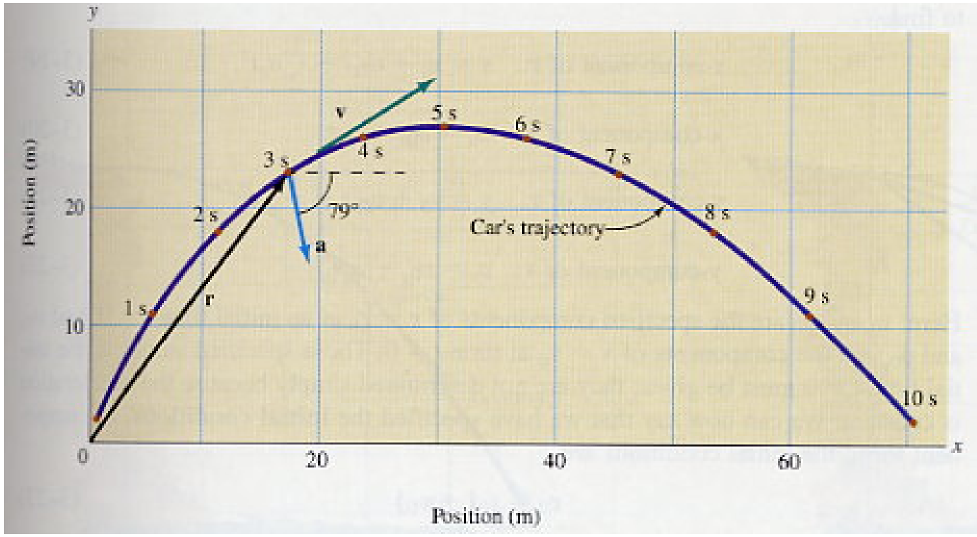
$$|\mathbf{v(3s)}| = 7{,}37\ \mathrm{m/s}$$

Direção de v(3s) = 32,8º

Aceleração Instantânea

Similar ao caso de 1-D, a aceleração média

$$\mathbf{a}_{med} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{t}+\Delta) - \mathbf{v}(\mathbf{t})}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{t}}$$



A aceleração instantânea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\ r(t)}{dt^2}$$

em termos de componentes

$$a = \frac{d\ v(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j$$

ou

$$a = a_x i + a_y j$$

Aceleração Instantânea

O vetor aceleração

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2c_1 t + c_2\right) = 2c_1$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2d_1 t + d_2\right) = 2d_1$$

Note que a aceleração é constante

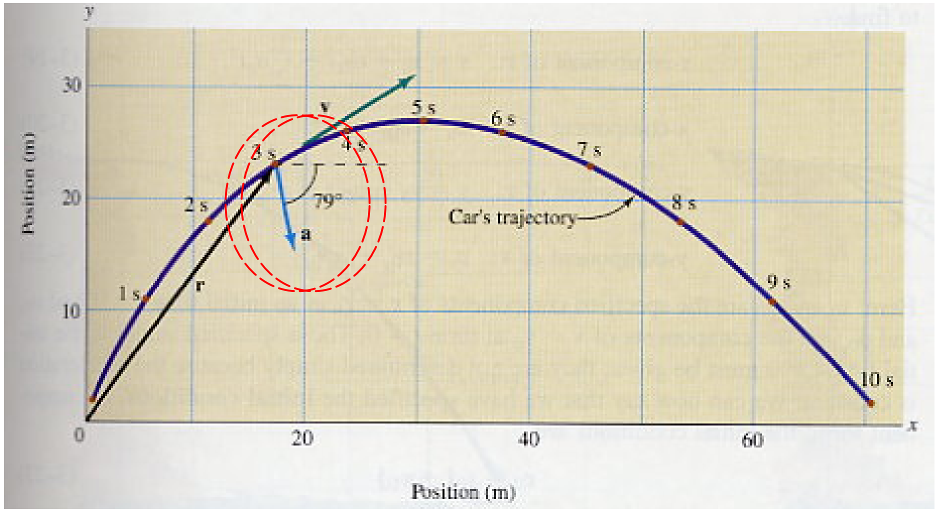
$$\mathbf{a} = \mathbf{2c_1 i + 2d_1 j}$$

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{0{,}4i + 2{,}0j}\right)\mathbf{m/s^2}$$

magnitude

$$a = |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\sqrt{4.2\ \mathrm{m/s^2}} = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$$



tan θ = a_y/a_x = 5,0

θ = -79º

Ângulo de a com +***x***

Movimento em 2 D

componente x de r $$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

componente x de v $$v_x = v_{0x} + a_x t$$

componente y de r $$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

componente y de v $$v_y = v_{0y} + a_y t$$

em t =0

$$r_0 = x_0 i + y_0 j$$

$$v_0 = v_{0x} i + v_{0y} j$$

$$\mathbf{r(t) \;=\; (0{,}5 + 5\,t + 0{,}2\,t^2\,)i \;+\; (2 + 10\,t - 1{,}0\,t^2)j}$$