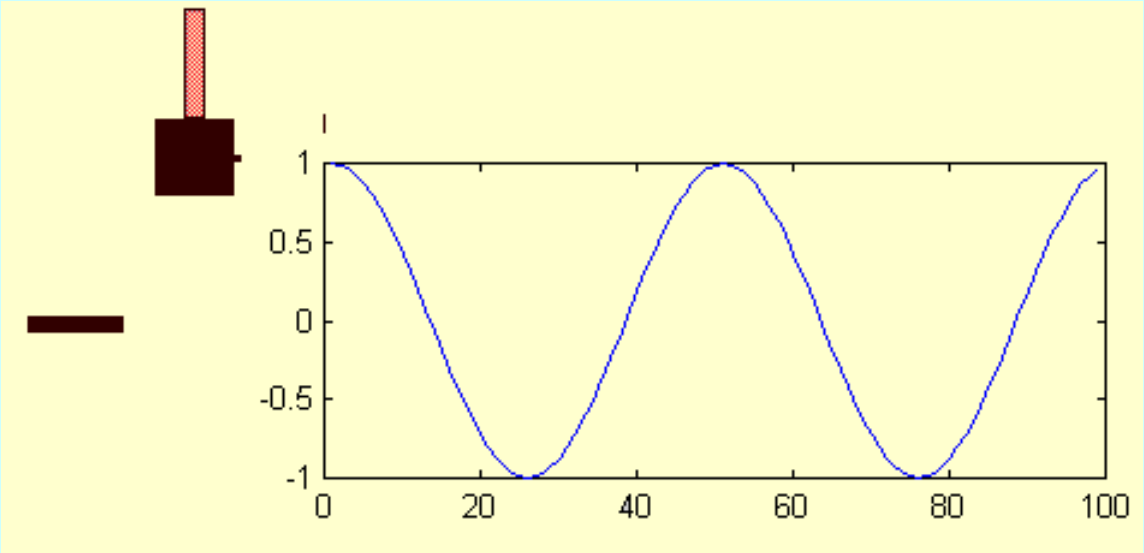
Movimento Harmônico Simples

Introdução

Oscilar significa mover-se de um lado para outro, movimentar-se alternadamente em sentidos opostos, mover-se, tornando a passar (ao menos aproximadamente) pelas mesmas posições.
Periódico significa que se repete com intervalos regulares.

Movimento Harmônico Simples (1D) pode ser definido como aquele em que a posição obedece a equação:

$$\vec{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi)\hat{i}$$



Período

Para a fase $\phi = 0$:

$$A\cos(\omega t) = A\cos[\omega(t+T)]$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Velocidade, Aceleração

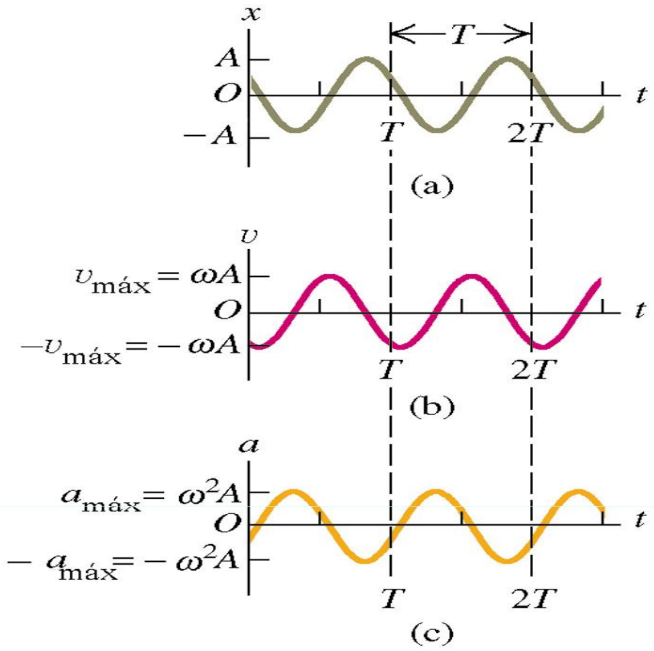


FIGURA 13.9 (a) gráfico de x contra t para um movimento harmônico simples. Neste gráfico, $\phi = \pi/3$. (b) Gráfico de v contra t para o mesmo movimento. Note que este gráfico é deslocado de uma fração de $\frac{1}{4}$ de ciclo do gráfico de x contra t. (c) Gráfico de a contra t para o mesmo movimento. Note que este gráfico é deslocado de uma fração de $\frac{1}{4}$ de ciclo do gráfico de v contra t e deslocado de uma fração de $\frac{1}{2}$ de ciclo do

$$\vec{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi)\hat{i}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \phi)\hat{i}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)\hat{i}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{x}(t)$$

Força

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 x\hat{i}$$

Movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula de massa m sujeita a uma força que é proporcional ao deslocamento da partícula, mas com sinal contrário.

$$\vec{F} = -k\vec{x} \Rightarrow k = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

A Equação (13.11) explica a razão pela qual cada tipo de diapasão produz uma altura de som diferente. Quanto menor for a massa *m* de cada dente do garfo do diapasão, maior será a freqüência da oscilação e maior será a altura do som produzido pelo diapasão.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

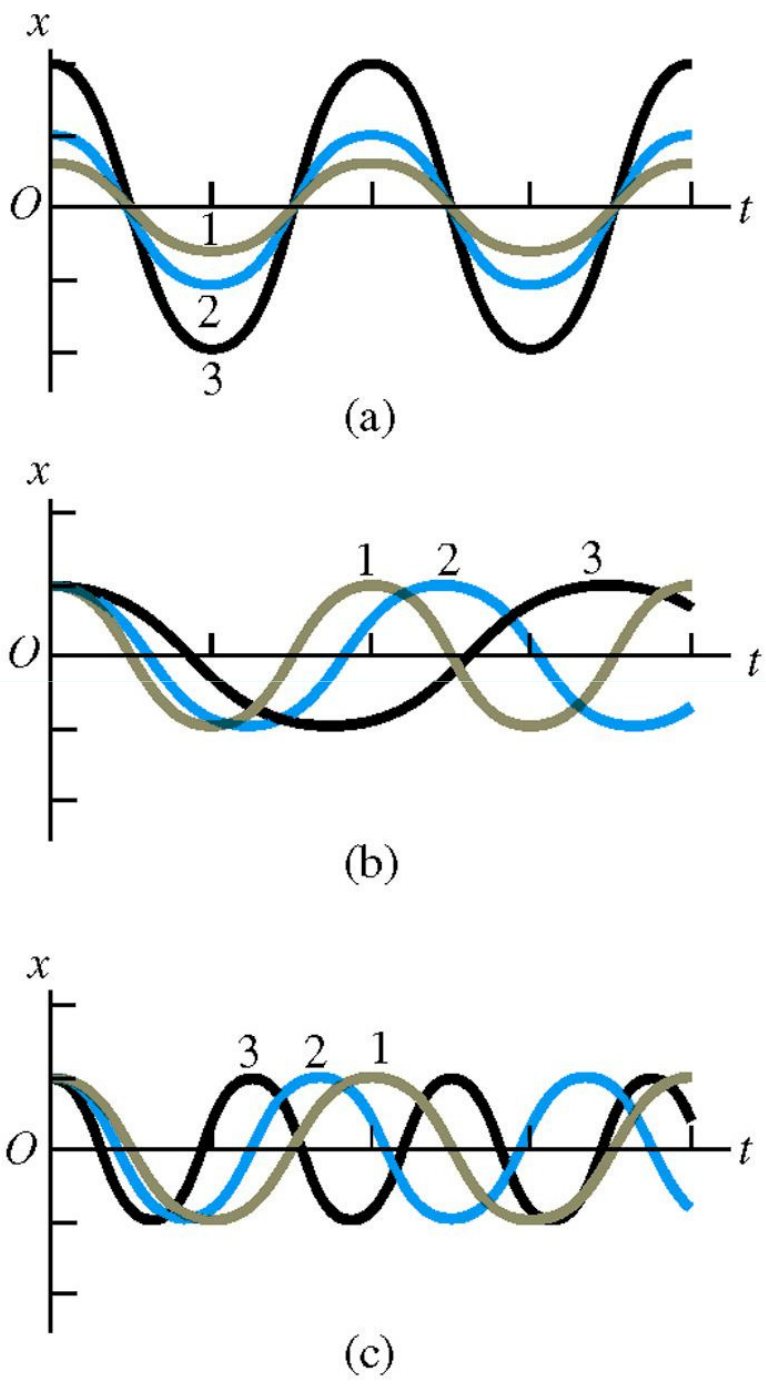


FIGURA 13.7 Variações em um movimento harmônico simples. Todos os casos indicados são para $\phi = 0$. (a) A amplitude A cresce da curva 1 até a curva 3, enquanto permanecem constantes a massa m e a constante da mola k. (b) A massa m cresce da curva 1 até a curva 3, enquanto permanecem constantes A e k. (c) A constante da mola k cresce da curva 1 até a curva 3, enquanto permanecem constantes A e m.

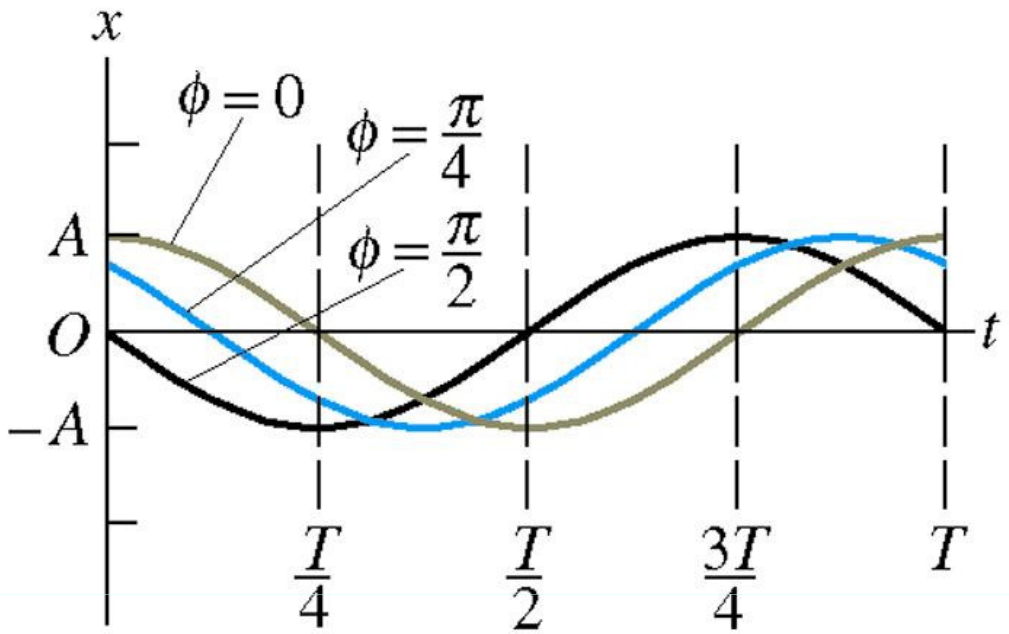
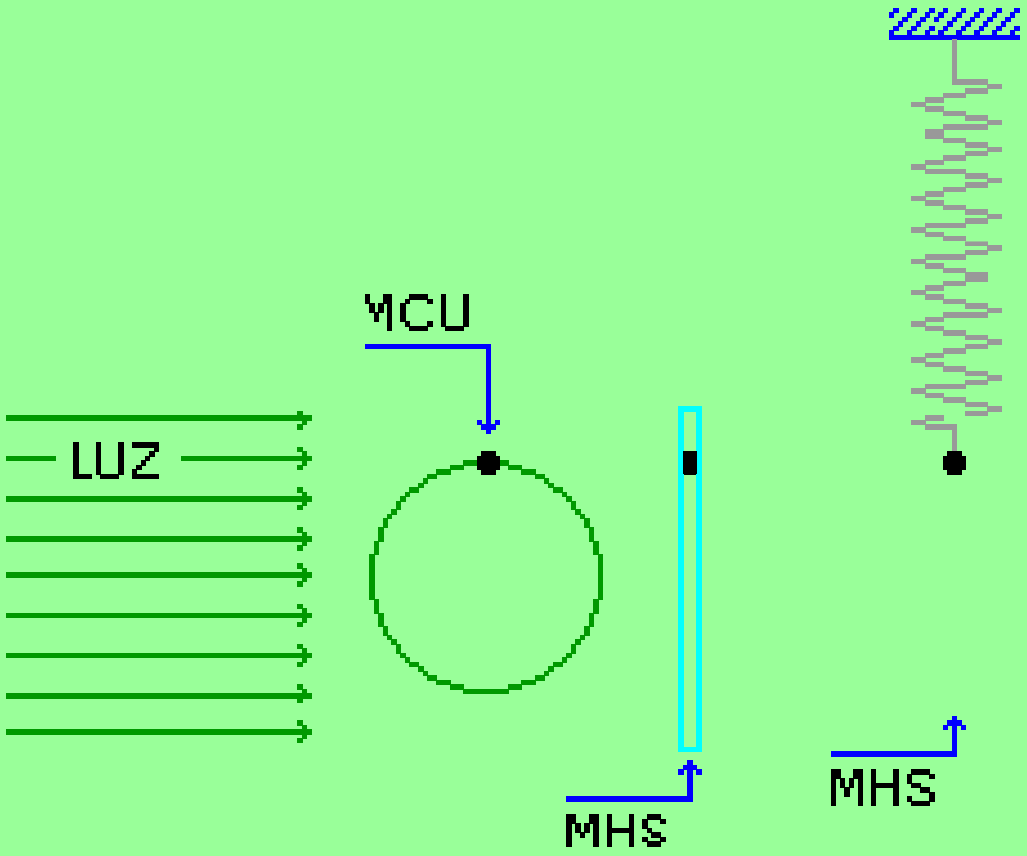


FIGURA 13.8 Posição em função do tempo para movimentos harmônicos simples com mesma freqüência e amplitude, mas com fases diferentes: $\phi = 0$ (curva superior), $\phi = \pi/4$ (curva do meio), $\phi = \pi/2$ (curva inferior).

Movimento Harmônico X Circular Uniforme



Fasores

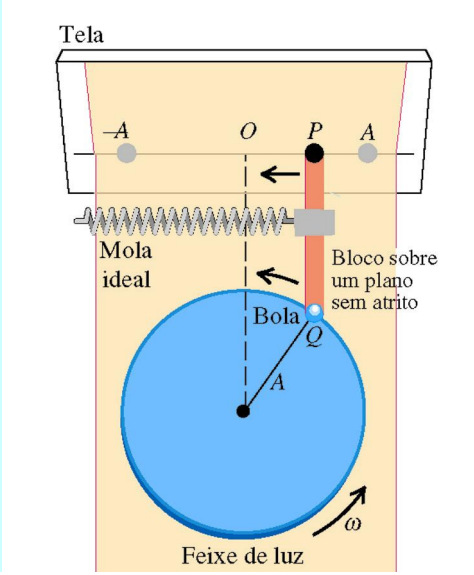
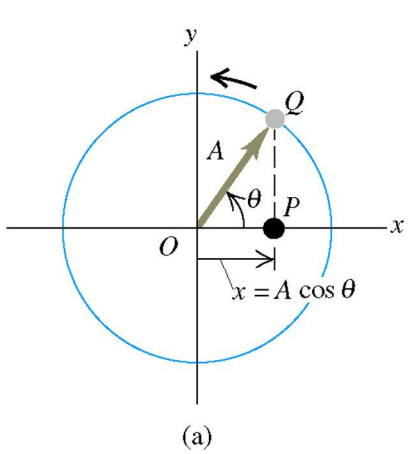
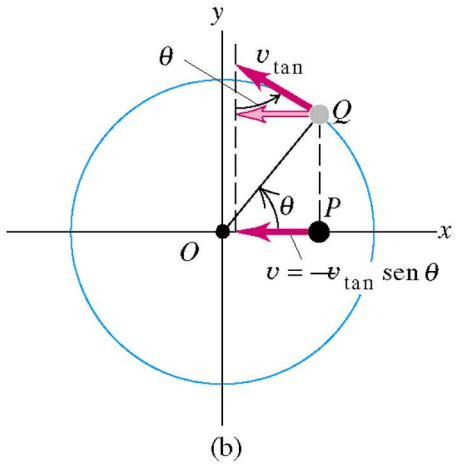


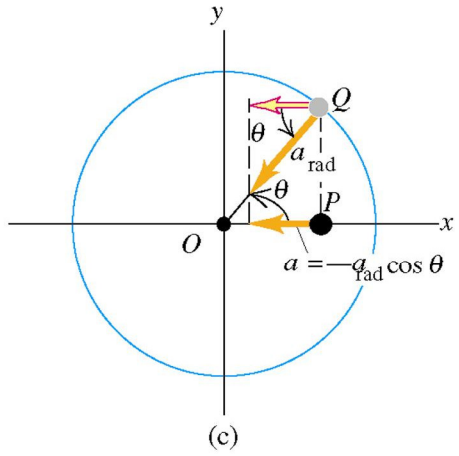
FIGURA 13.4 (a) A coordenada da sombra da bola no ponto P varia ao longo do eixo Ox à medida que a bola Q gira com movimento circular uniforme em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. (b) e (c) A velocidade e a aceleração do ponto P são, respectivamente, os componentes x do vetor velocidade e do vetor aceleração do ponto Q.



(a)



(b)



(c)

Energia no MHS

De forma análoga ao sistema massa-mola:

$$U(t) = \frac{k(\vec{x})^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)}{2}$$

$$K(t) = \frac{m(\vec{v}^2)}{2} = \frac{kA^2 sen^2(\omega t + \phi)}{2}$$

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{kA^2}{2}$$

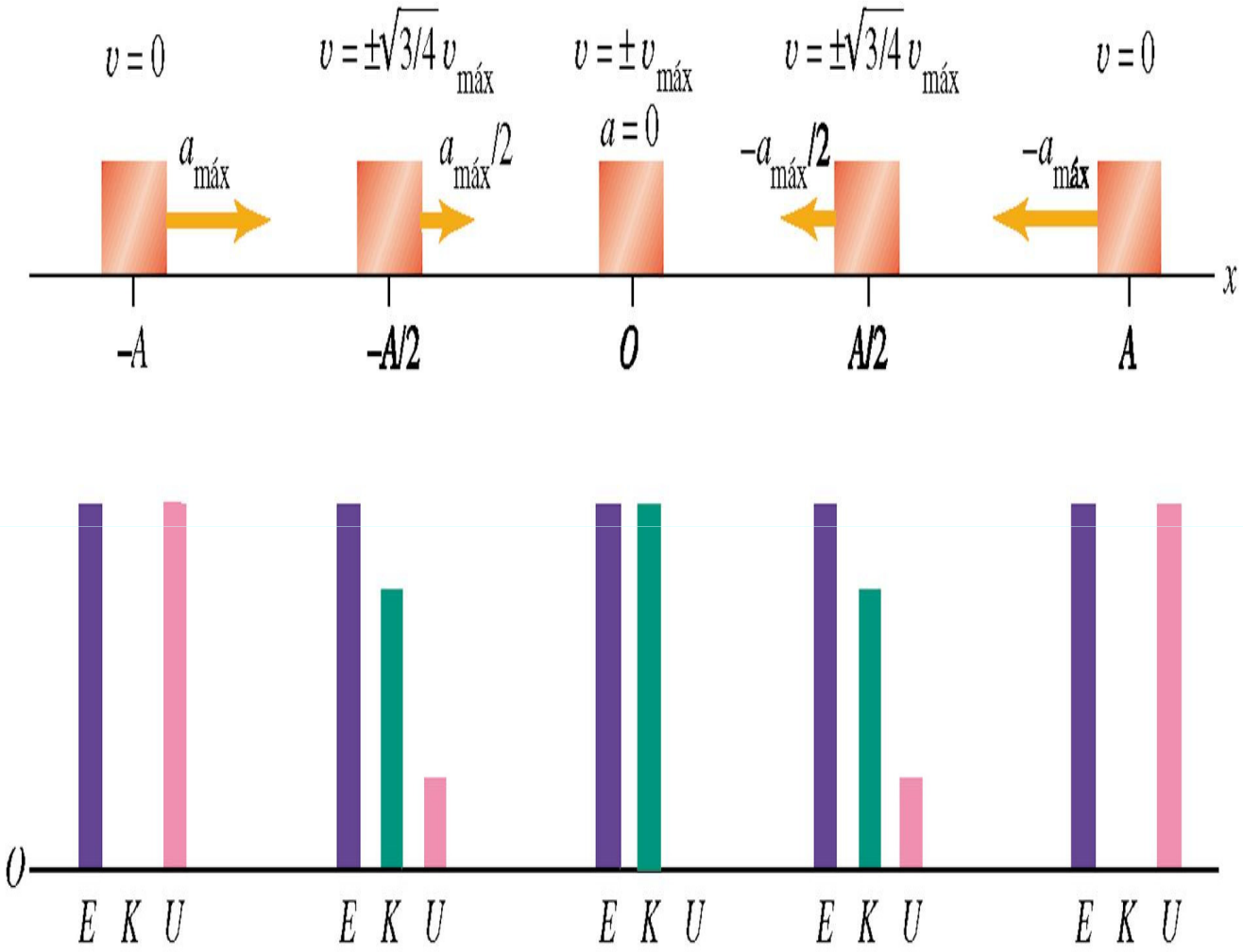


FIGURA 13.10 No movimento harmônico simples a energia mecânica total E é constante; à medida que o corpo oscila ocorre continuamente a transformação da energia potencial U em energia cinética K e vice-versa.

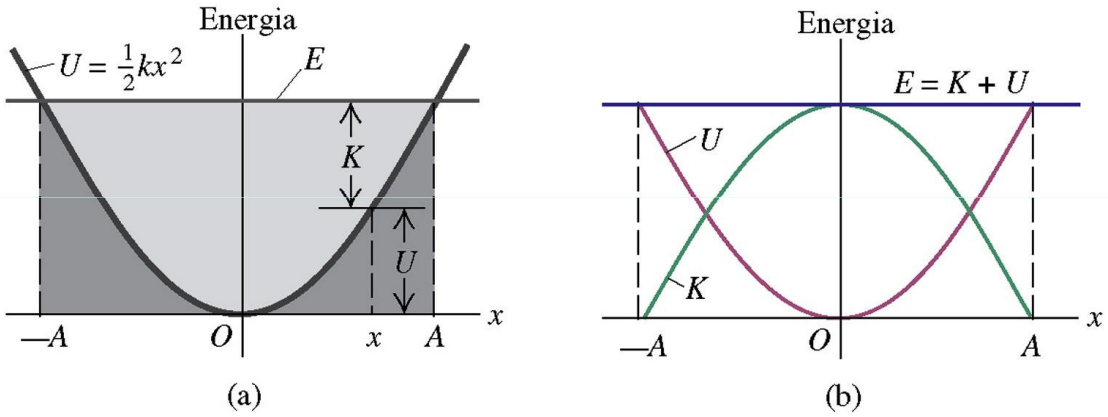


FIGURA 13.11 Energia cinética K, energia potencial U e energia mecânica total E em função da posição no MHS. Para cada ponto x a soma dos valores de K e de U é sempre igual ao valor constante E.

MHS Angular

$$\vec{\tau} = -k\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

$$-k\theta\hat{\theta} = I\vec{\alpha}$$

$$\vec{\theta} = A\cos(\omega t + \phi)\hat{\theta}$$

$$\vec{\omega} = -A\omega sen(\omega t + \phi)\hat{\theta}$$

$$\vec{\alpha} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)\hat{\theta}$$

$$\vec{\alpha} = -\omega^2\vec{\theta}(t)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

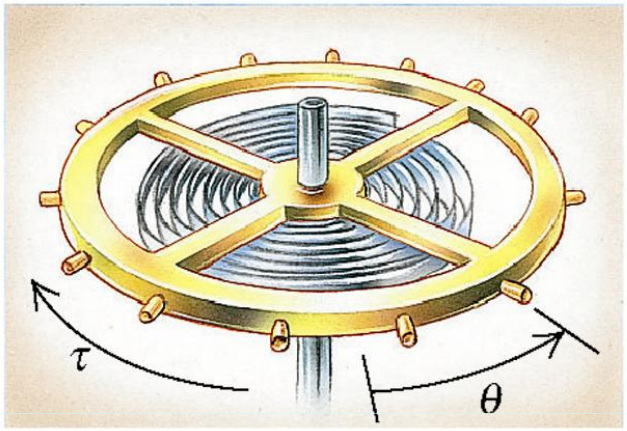


FIGURA 13.16 A roda catarina de um relógio mecânico. A mola helicoidal exerce um torque restaurador proporcional ao deslocamento angular a partir da posição de equilíbrio. Logo, o movimento é um MHS.

Pendulo Simples

$$\vec{F} = -mgsen\theta\hat{\theta}$$

Não linear, não é harmônico simples.

Mas, para θ pequeno, sen(θ) ->θ:

$$F \approx -mg\theta = -\frac{mg}{L}x$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{g}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

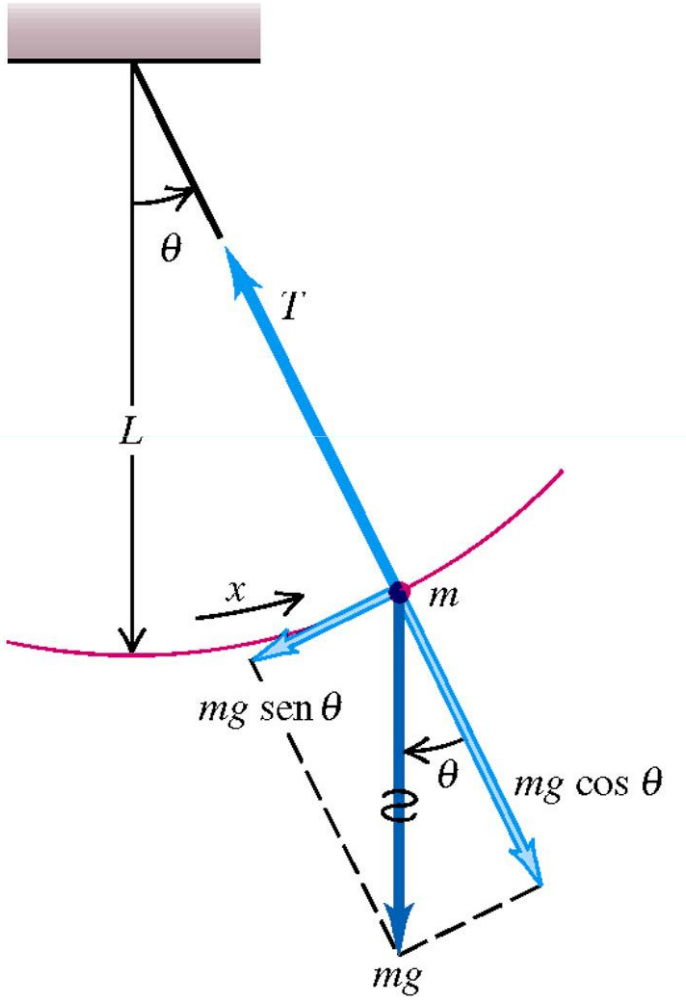


FIGURA 13.18 Forças que atuam sobre o peso de um pêndulo simples.

Pêndulo Físico

$$\tau = -mgdsen\theta \approx -(mgd)\theta$$

$$(mgd)\theta = I\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{mgd}{I}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad w = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

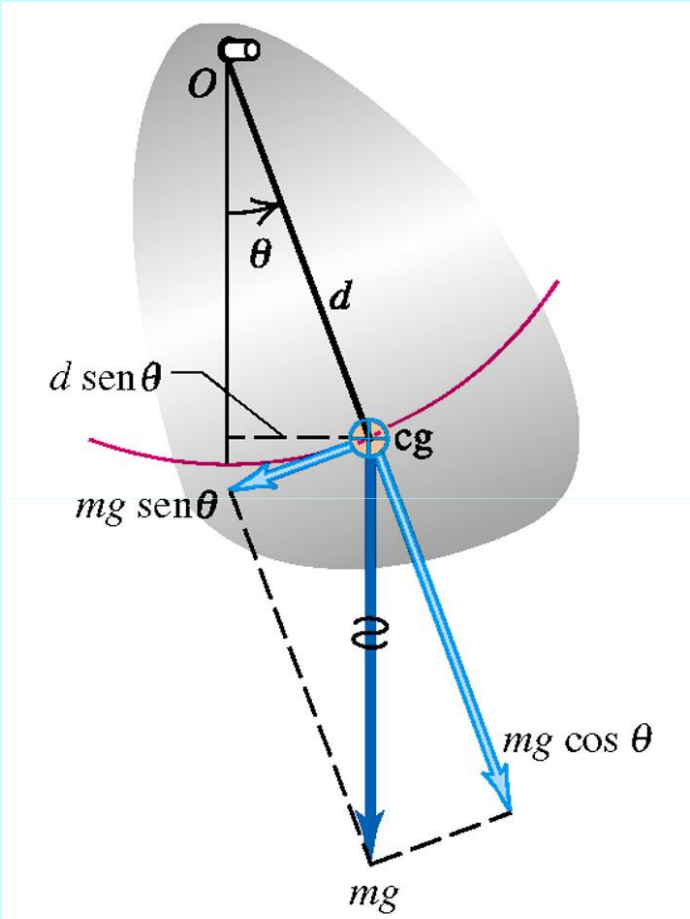


FIGURA 13.20 Dinâmica de um pêndulo físico.

Oscilações Amortecidas

$$-b\vec{v} - k\vec{x} = m\vec{a}$$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + b\frac{d\vec{x}}{dt} + k\vec{x} = 0$$

$$\vec{x}(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)\hat{i}$$

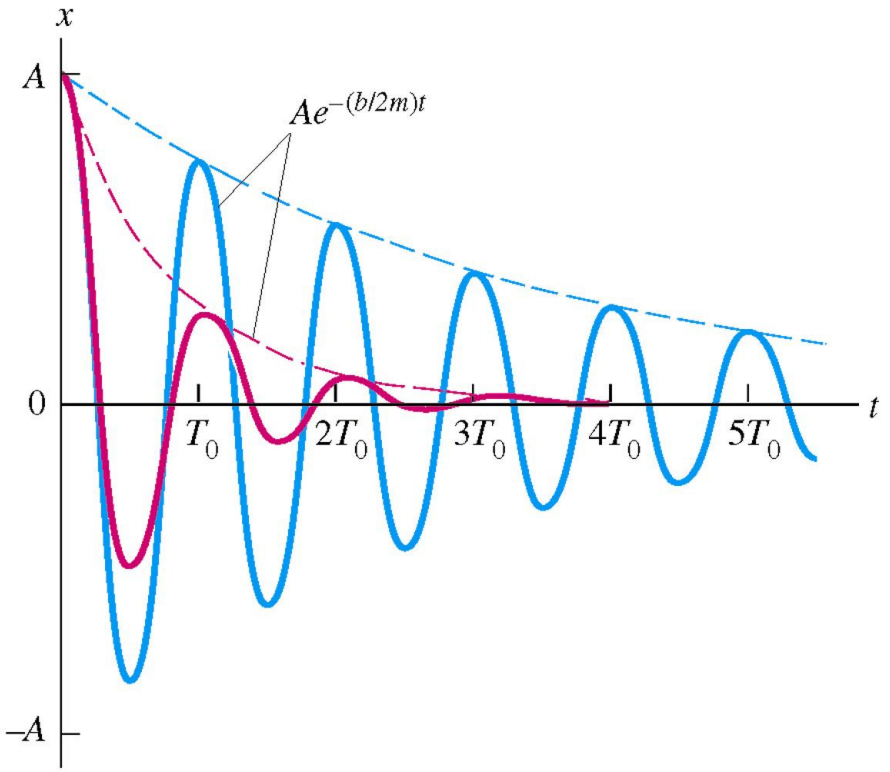
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Oscilações Amortecidas

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{kA^2}{2}$$ Nas não amortecidas.

$$E(t) \approx \frac{kA^2 e^{-bt/m}}{2}$$ Se o amortecimento for pequeno.

FIGURA 13.22 Gráfico da Equação (13.42), mostrando o movimento harmônico amortecido, para um ângulo de fase $\phi = 0$. O período, quando não existe nenhum amortecimento ($b = 0$), é T_0. A curva oscilante superior mostra o amortecimento quando $b = 0{,}1\sqrt{km}$, e a curva inferior mostra o amortecimento quando $b = 0{,}4\sqrt{km}$. Quanto maior for o valor de b, a amplitude diminui mais fortemente. Um exame cuidadoso dos pontos de interseção entre as curvas e o eixo Ot revela que o período cresce ligeiramente com o aumento do valor de b. O amortecimento crítico é dado por $b = 2\sqrt{km}$.



$$\vec{x}(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)\hat{i}$$

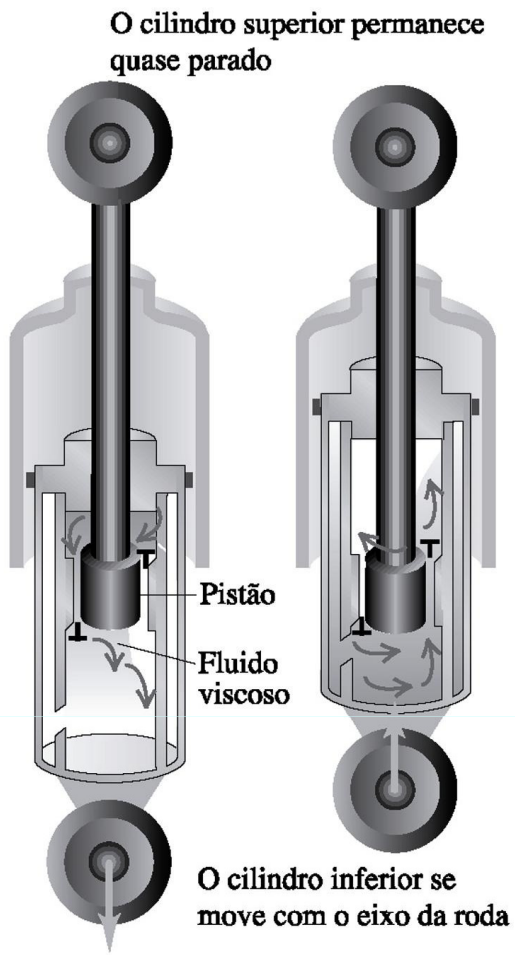
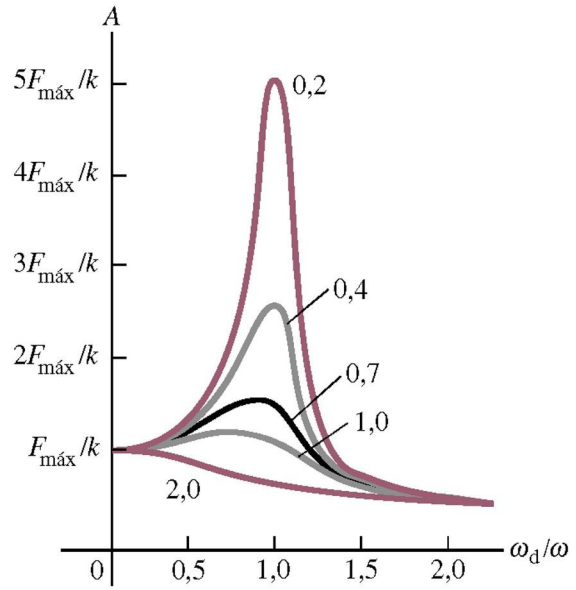


FIGURA 13.23 Amortecedor de um carro. A parte superior, conectada ao pistão, está presa ao chassi do carro; a parte inferior, conectada ao cilindro inferior, está presa ao eixo da roda. O fluido viscoso produz uma força de amortecimento que depende da velocidade relativa entre as duas extremidades da unidade. Isto ajuda a controlar a trepidação e oscilação da roda.

Oscilações Forçadas e Ressonância

FIGURA 13.24 Gráfico da amplitude A da oscilação forçada de um oscilador harmônico amortecido em função da freqüência angular ω_d da força propulsora. O eixo horizontal indica a razão entre a freqüência angular ω_d e a freqüência angular $\omega = \sqrt{k/m}$ da oscilação natural não amortecida. Os números ao lado das curvas indicam os valores das grandezas adimensionais $b/\sqrt{km}$, que caracterizam a quantidade do amortecimento. A curva com o pico mais elevado possui $b = 0{,}2\sqrt{km}$, a curva seguinte possui $b = 0{,}4\sqrt{km}$, e assim por diante. À medida que b aumenta o pico torna-se mais largo e a amplitude se torna menor e se desloca para freqüências menores. Quando b for maior do que $\sqrt{2km}$, o pico desaparece completamente.



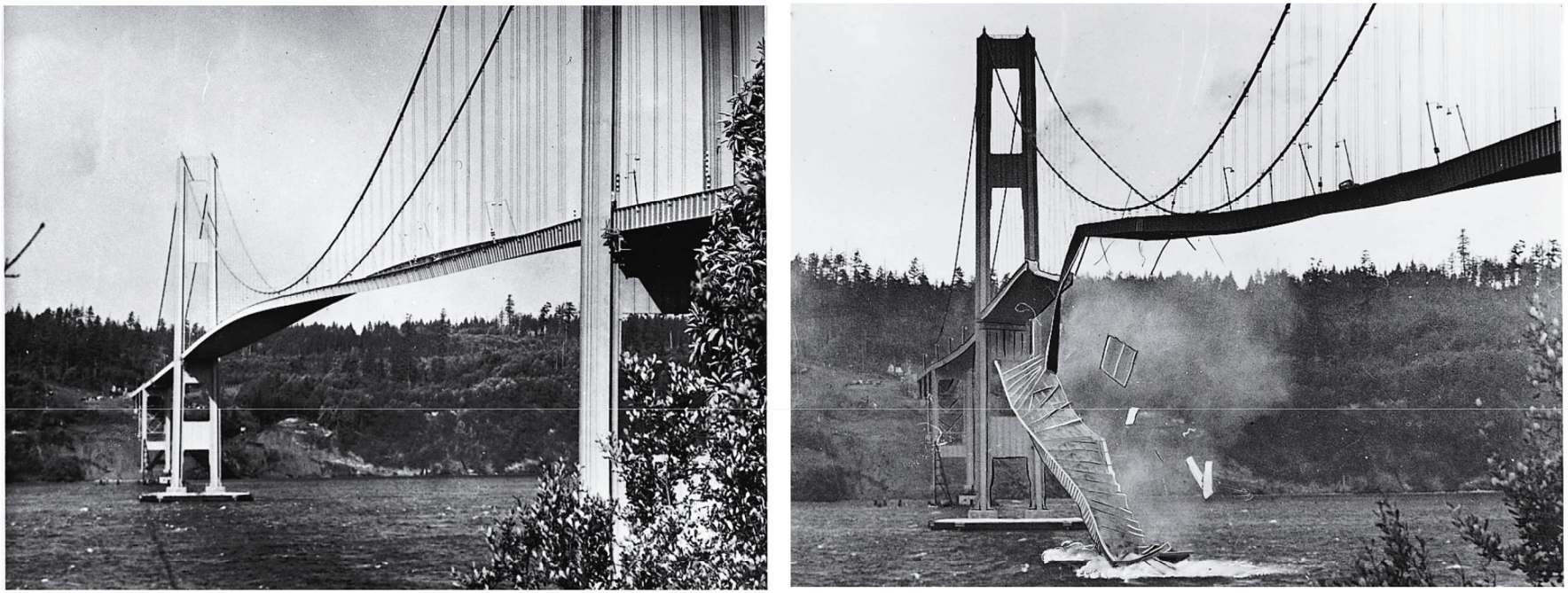


FIGURA 13.25 A ponte *Tacoma Narrows* foi destruída quatro meses e seis dias depois da sua inauguração. O vão principal, com 853,44 m de comprimento e 11,89 m de largura, possuía nos dois lados vigas protetoras de aço de 2,44 m de altura. A amplitude máxima das vibrações de torção foram de 35° e a freqüência de ressonância foi igual a aproximadamente 0,2 Hz.