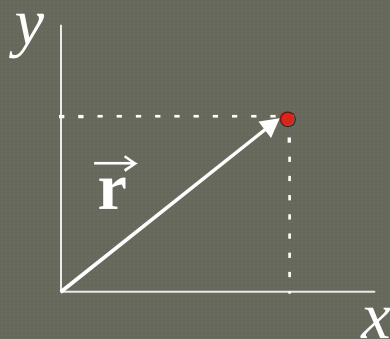


Física 1

3 – Movimento em Duas e Três Dimensões

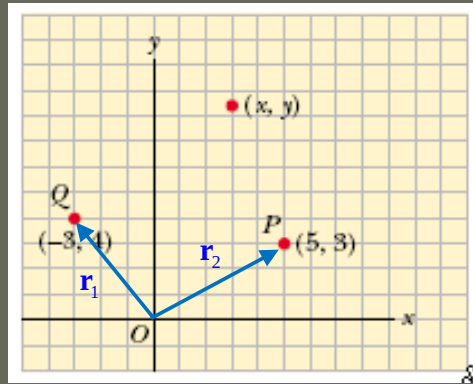
Posição

Posição de objetos no plano



Posição

Posição de objetos no plano



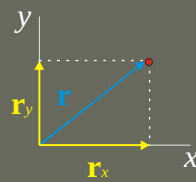
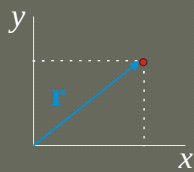
$$\mathbf{r}_1 = -3 \text{ m } \mathbf{i} + 4 \text{ m } \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2 = 5 \text{ m } \mathbf{i} + 3 \text{ m } \mathbf{j}$$

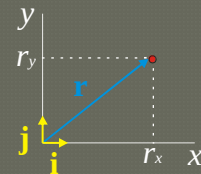
©2002 by John Wiley & Sons

Posição

Posição de objetos no plano



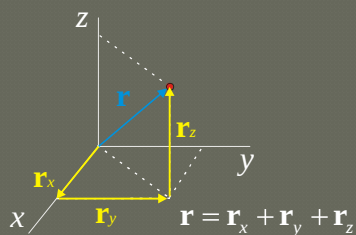
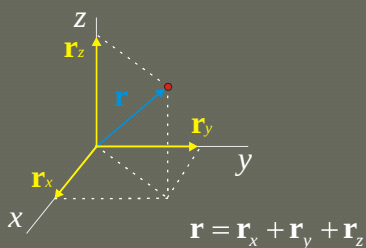
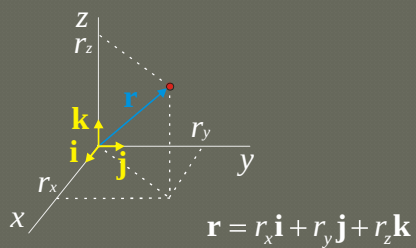
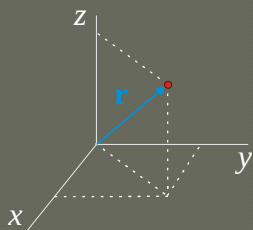
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_y$$



$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j}$$

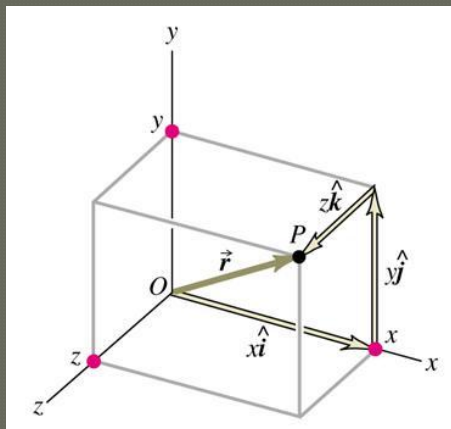
Posição

Posição de objetos no espaço



Posição

Posição de objetos no espaço

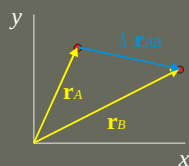
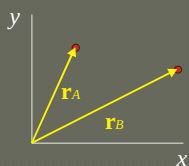
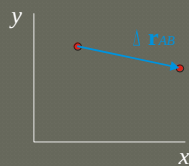
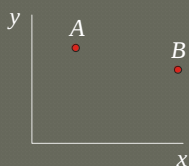


$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$$

Deslocamento

Definição

Deslocamento de um ponto A a um ponto B é a diferença entre a posição de B e a posição de A.



$$\Delta \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$\Delta \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B$$

Velocidade média

Definição:

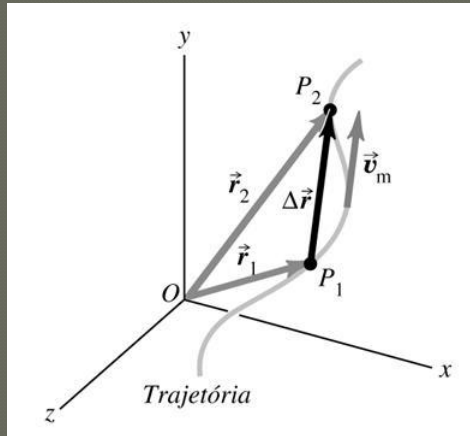
A velocidade média com que um móvel vai do ponto A ao ponto B é a razão entre o deslocamento de A até B e o tempo gasto para ir de A até B.

$$\mathbf{v}_{m,AB} = \frac{\Delta \mathbf{r}_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{t_B - t_A}$$

Ou simplesmente...

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Deslocamento e velocidade média



$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

O vetor velocidade média possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento.

©2004 by Pearson Education

Velocidade instantânea

Definição:

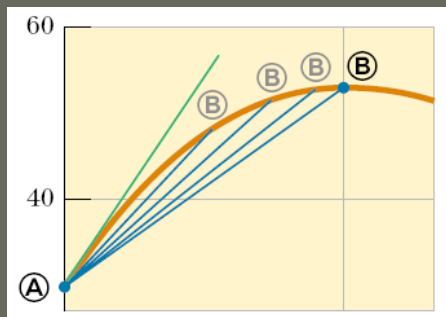
A velocidade instantânea num ponto é o limite da razão entre um deslocamento feito a partir do ponto e o intervalo de tempo decorrido no deslocamento, quando o intervalo de tempo tende a zero.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_{t+\Delta t} - \mathbf{r}_t}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é a **derivada primeira** da função $\mathbf{r}(t)$ em relação a t .

Velocidade instantânea

Num gráfico de $\mathbf{r}(t) = f(t)$, a velocidade instantânea numa posição $\mathbf{r}$ corresponde à declividade da reta tangente ao ponto da curva naquela posição.

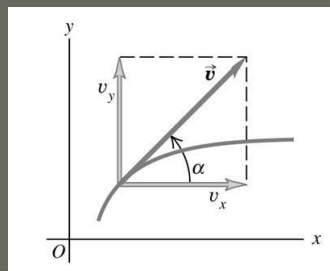
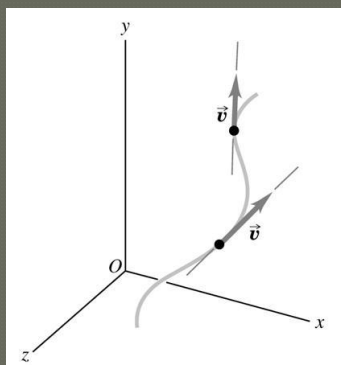


$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_{t+\Delta t} - \mathbf{r}_t}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

©2002 by John Wiley & Sons

Velocidade instantânea

A velocidade instantânea $\mathbf{v}$ em cada ponto é tangente à trajetória no referido ponto.



$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

©2004 by Pearson Education

Aceleração média

Definição:

$$\mathbf{a}_{m,AB} = \frac{\Delta \mathbf{v}_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A}{t_B - t_A}$$

Ou simplesmente...

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Aceleração instantânea

Definição:

A aceleração instantânea num ponto é o limite da razão entre uma variação de velocidade feita a partir do ponto e o intervalo de tempo decorrido nessa variação, quando o intervalo de tempo tende a zero.

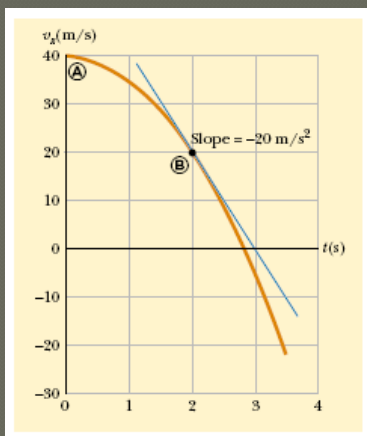
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{t+\Delta t} - \mathbf{v}_t}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ é a **derivada primeira** da função $\mathbf{v}(t)$ em relação a t .

$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ é a **derivada segunda** da função $\mathbf{r}(t)$ em relação a t .

Aceleração instantânea

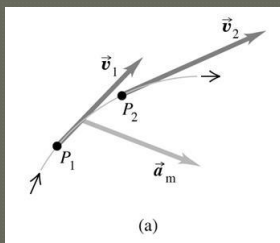
Num gráfico de $\mathbf{v}(t) = f(t)$, a aceleração instantânea num instante t corresponde à declividade da reta tangente ao ponto da curva naquele instante.



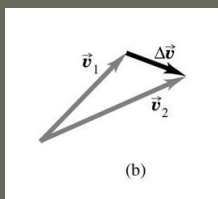
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_{t+\Delta t} - \mathbf{v}_t}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

©2002 by John Wiley & Sons

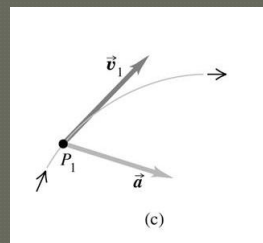
Aceleração média e aceleração instantânea



$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$



$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

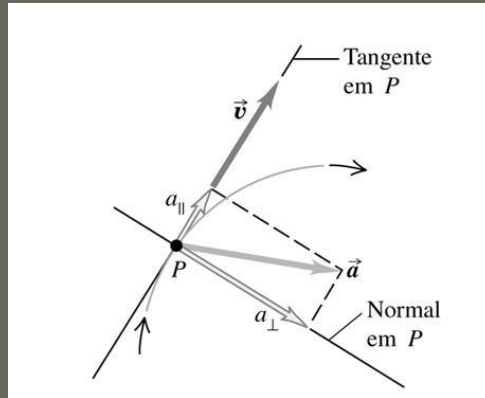


$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

©2004 by Pearson Education

Aceleração

Componentes do vetor aceleração



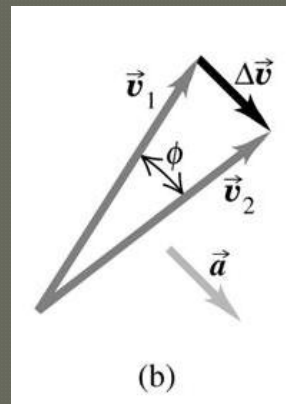
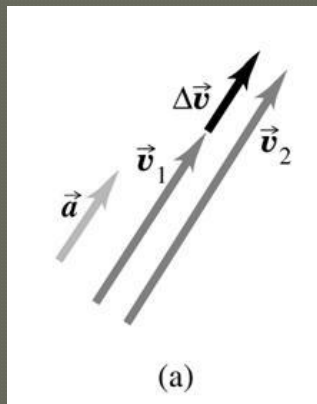
$a_{\parallel}$ → Componente da aceleração paralela ao vetor velocidade.

$a_{\perp}$ → Componente da aceleração perpendicular ao vetor velocidade.

©2004 by Pearson Education

Aceleração

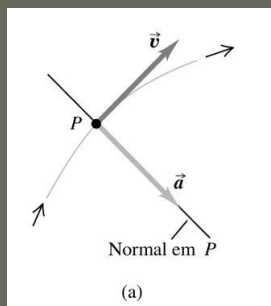
Direção e sentido do vetor aceleração



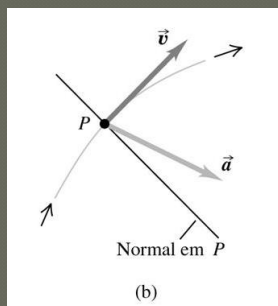
©2004 by Pearson Education

Aceleração

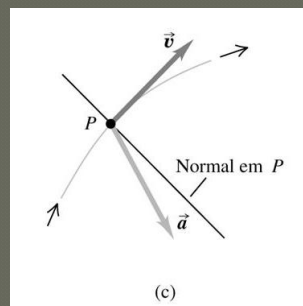
Direção e sentido do vetor aceleração



Velocidade escalar
constante



Velocidade escalar
crescente

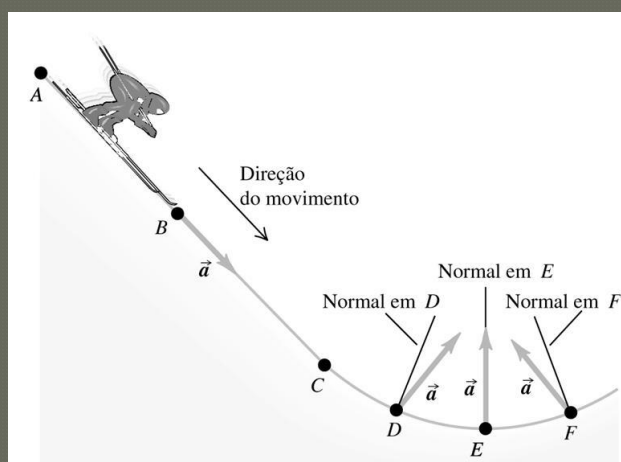


Velocidade escalar
decrecente

©2004 by Pearson Education

Aceleração

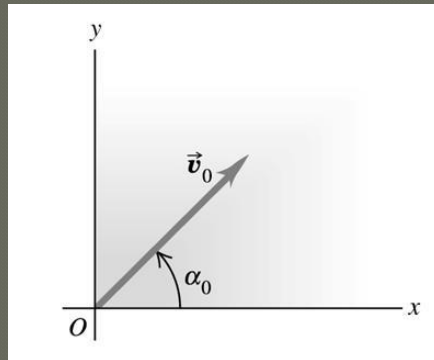
Aceleração ao longo de um percurso



©2004 by Pearson Education

Movimento de um projétil

Características



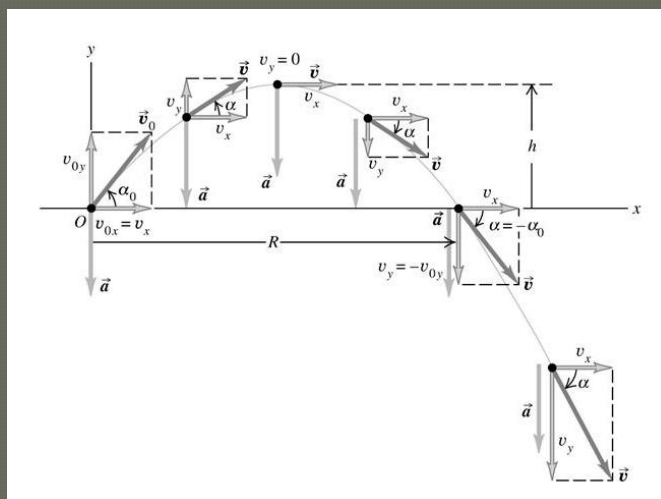
$$\downarrow \mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

©2004 by Pearson Education

- O lançamento de projétil resulta num movimento contido no **plano vertical**;
- Os movimentos em x e y são independentes (ortogonais);
- O movimento em x ocorre com **velocidade constante** ($a_x = 0$);
- O movimento em y ocorre com **aceleração constante** ($a_y = -g$).

Movimento de um projétil

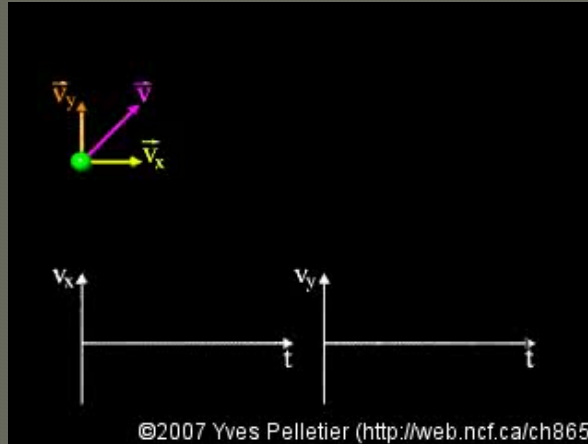
Decomposição do movimento de um projétil



©2004 by Pearson Education

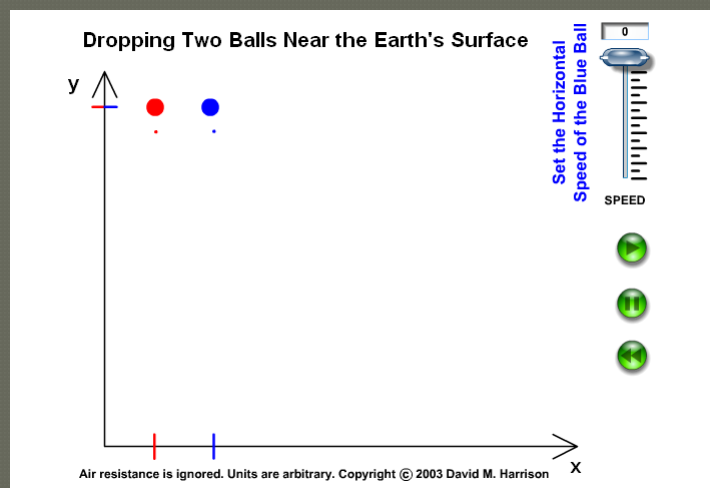
Movimento de um projétil

Decomposição do movimento de um projétil



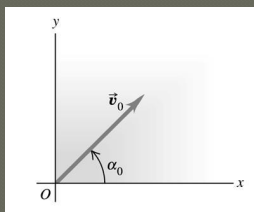
<http://br.youtube.com/watch?v=ZBfy-MNgtoY>

Movimento de um projétil

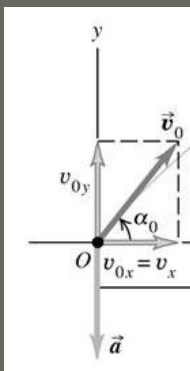


Movimento de um projétil

Trajétória



©2004 by Pearson Education



©2004 by Pearson Education

$$x - x_0 = v_x t$$

$$y - y_0 = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Equação de uma
parábola



Movimento em x:

$$x = v_0 \cos \alpha_0 t$$

Movimento em y:

$$y = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = \tan \alpha_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

Movimento de um projétil

Trajétória

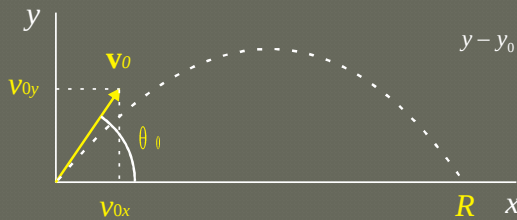
Um projétil sujeito apenas à aceleração da gravidade apresenta **trajetória parabólica**.



©2004 by Pearson Education

Movimento de um projétil

Alcance horizontal



$$x - x_0 = v_{0x} t$$

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = R$$

$$x_0 = 0$$

$$y = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

Movimento em x:

$$R = v_0 \cos \theta_0 t$$

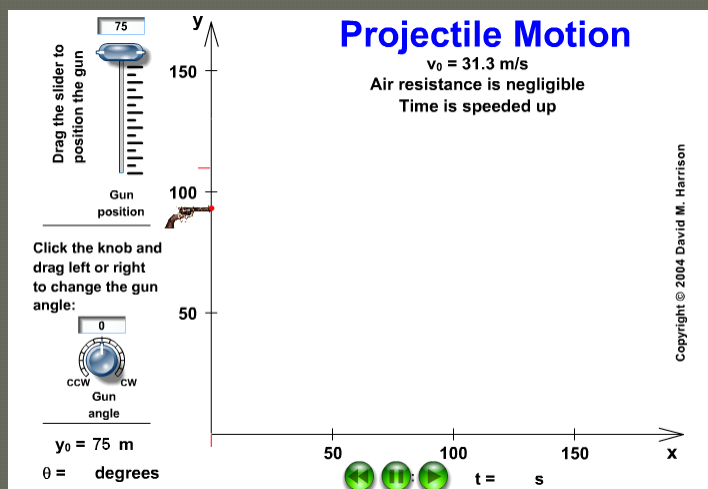
Movimento em y:

$$0 = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

Movimento de um projétil

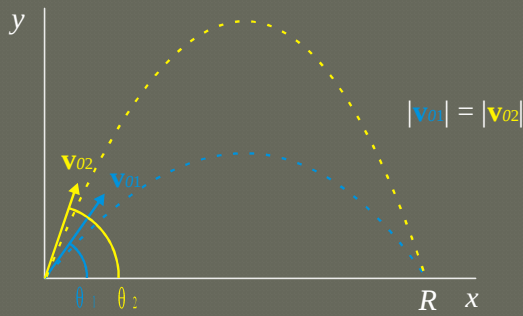
Alcance do projétil em função da altura e do ângulo de lançamento



<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/Projectile/Projectile.html>

Movimento de um projétil

Para cada alcance horizontal, há dois ângulos de lançamento



$$R_{\theta_1} = R_{\theta_2}$$

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_2$$

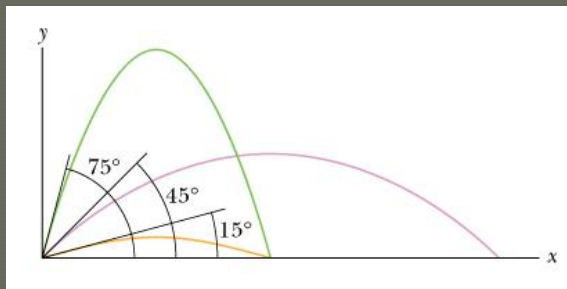
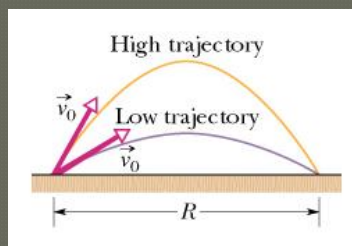
$$\sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2$$

$$2\theta_1 = \pi - 2\theta_2$$

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Movimento de um projétil

Para cada alcance horizontal, há dois ângulos de lançamento

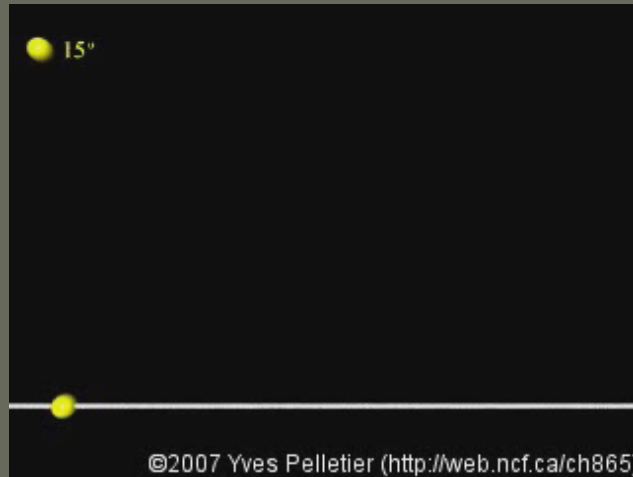


$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 45^\circ$$

©2002 by John Wiley & Sons

Movimento de um projétil

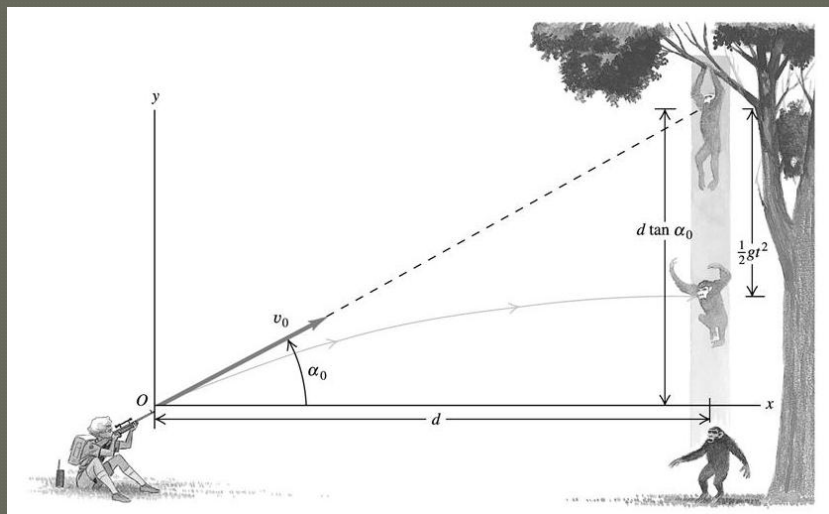
Alcance do projétil em função do ângulo de lançamento



<http://br.youtube.com/watch?v=N0H-rv9XFHk>

Movimento de um projétil

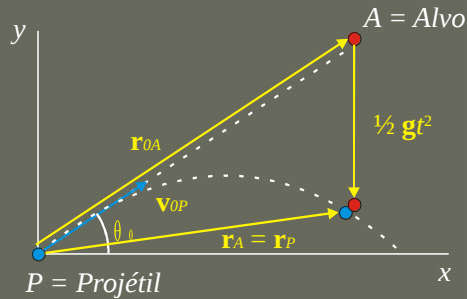
Atirando num alvo em queda livre



Movimento de um projétil

Atirando num alvo em queda livre

Condição para que o projétil atinja o alvo: $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A$



$$\mathbf{r}_{0A} = \mathbf{v}_{0P} t$$

Projétil: $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{0P} = \mathbf{v}_{0P} t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$

Alvo: $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{0A} = \mathbf{v}_{0A} t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$



$$\mathbf{r}_P - 0 = \mathbf{v}_{0P} t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

$$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{0A} = 0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

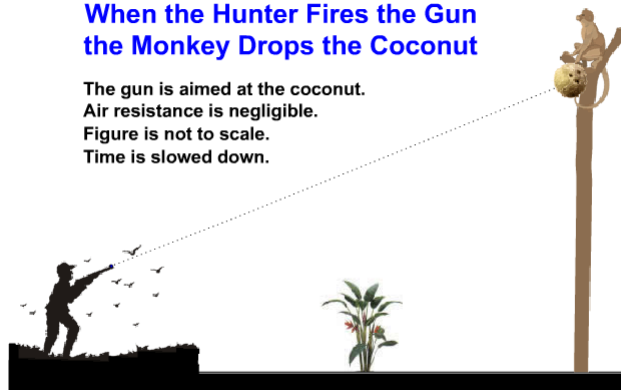
$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A$$



Movimento de um projétil

When the Hunter Fires the Gun the Monkey Drops the Coconut

The gun is aimed at the coconut.
Air resistance is negligible.
Figure is not to scale.
Time is slowed down.



Copyright © 2004 David M. Harrison

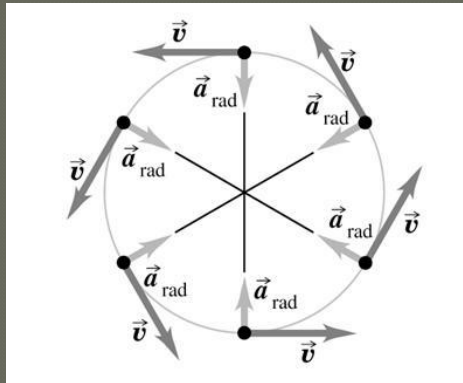
Click to begin:

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/MonkeyHunter/MonkeyHunter.html>

Movimento circular

Velocidade escalar constante

Movimento circular uniforme (MCU)



A velocidade de um corpo em MCU é tangencial e de módulo constante

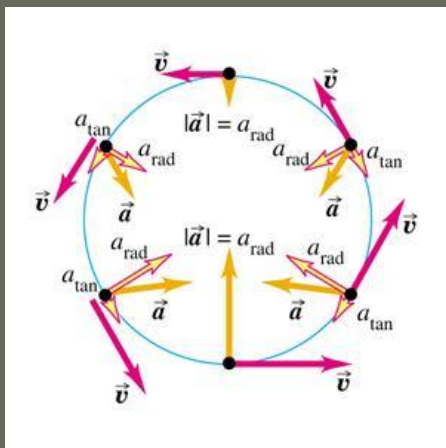
A aceleração de um corpo em MCU é radial e de módulo constante

©2004 by Pearson Education

Movimento circular

Velocidade escalar variável

Movimento circular variável (MCV)

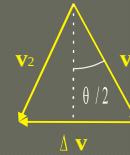
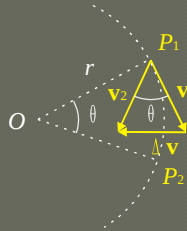
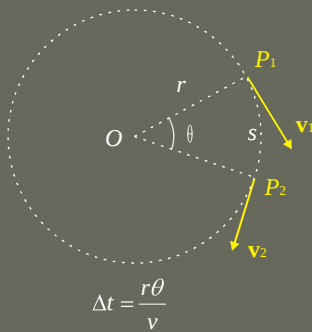


A velocidade de um corpo em MCV é tangencial e de módulo variável

A aceleração de um corpo em MCV é variável em módulo e sentido e possui componentes radial e tangencial

©2004 by Pearson Education

Movimento circular com velocidade escalar constante



$$\frac{\Delta v}{2} = v \sin \frac{\theta}{2}$$

Aceleração média:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{r\theta}{v}} = \frac{v^2 \sin \frac{\theta}{2}}{r \frac{\theta}{2}}$$

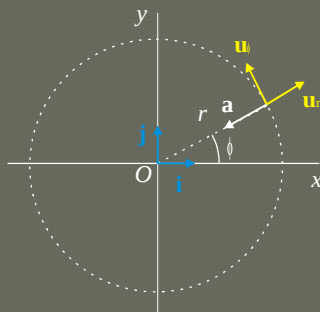
Aceleração instantânea:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Movimento circular uniforme

Vetor aceleração no MCU



$$\mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_r = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}$$

Variação de $\mathbf{u}_\phi$ com o tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\frac{d \sin \phi}{dt} \mathbf{i} + \frac{d \cos \phi}{dt} \mathbf{j} \\ &= -\cos \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{i} - \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{j} \\ &= -\frac{d\phi}{dt} \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Velocidade angular:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{v}{r}$$

Vetor velocidade:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_\phi$$

Vetor aceleração:

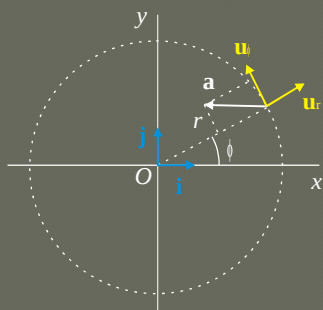
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv \mathbf{u}_\phi}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}$$

$$\mathbf{a} = -v \frac{d\phi}{dt} \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r} \mathbf{u}_r$$

Movimento circular uniforme

Vetor aceleração no MCV



$$\mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_r = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}$$

Variação de $\mathbf{u}_\phi$ com o tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\frac{d \sin \phi}{dt} \mathbf{i} + \frac{d \cos \phi}{dt} \mathbf{j} \\ &= -\cos \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{i} - \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \mathbf{j} \\ &= -\frac{d\phi}{dt} \mathbf{u}_r \end{aligned}$$



Vetor velocidade:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_\phi$$

Vetor aceleração:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv \mathbf{u}_\phi}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi \frac{dv}{dt}$$



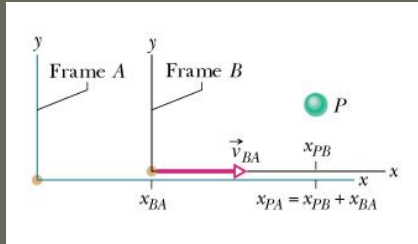
$$\boxed{\mathbf{a} = -a_r \mathbf{u}_r + a_t \mathbf{u}_\phi}$$

Velocidade relativa

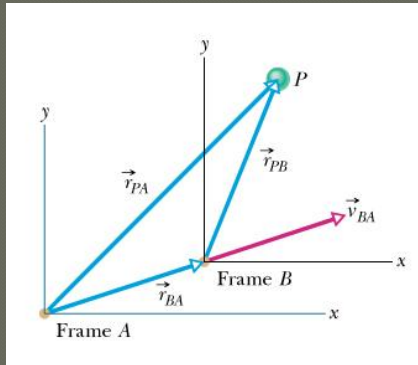


<http://br.youtube.com/watch?v=HeWSc9lb8AQ>

Velocidade relativa



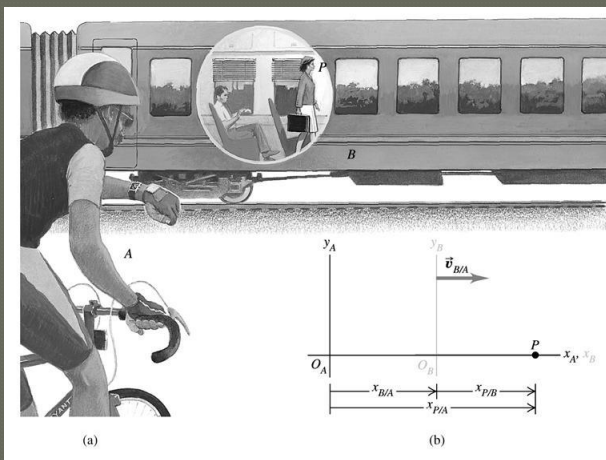
$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$



$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

©2002 by John Wiley & Sons

Velocidade relativa



$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$

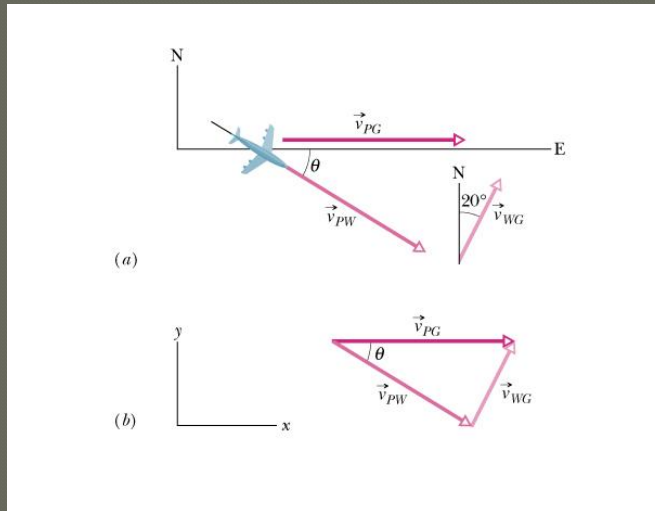
$$\frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{PB}}{dt} + \frac{dx_{BA}}{dt}$$

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$

©2004 by Pearson Education

Velocidade relativa

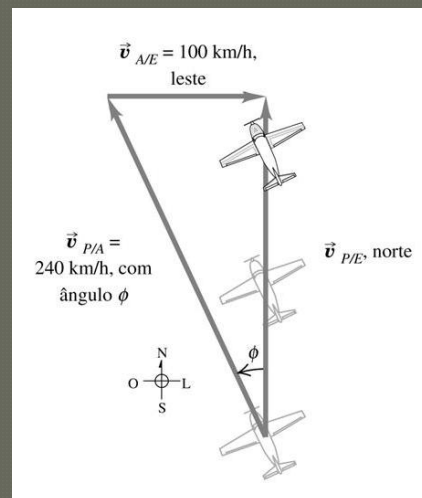
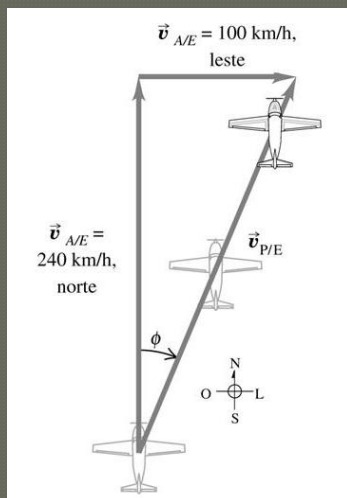
Avião com vento lateral



©2002 by John Wiley & Sons

Velocidade relativa

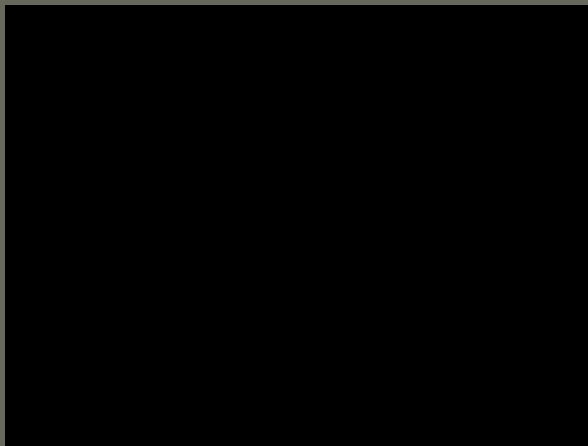
Avião com vento lateral



©2004 by Pearson Education

Velocidade relativa

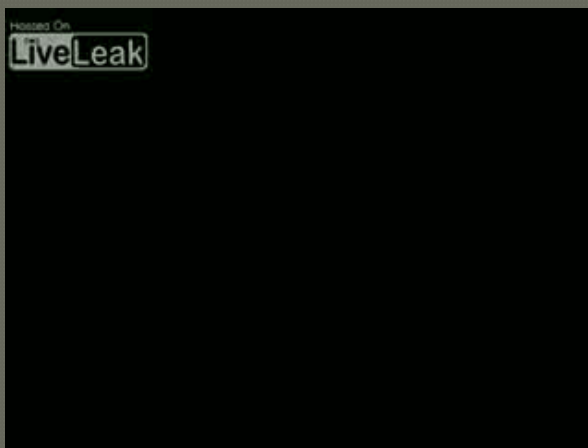
Aterrissagem de um Boeing 747 com vento lateral



<http://br.youtube.com/watch?v=iwA2e83i2l4>

Velocidade relativa

Aterrissagem de um Airbus A320 com forte vento lateral



<http://br.youtube.com/watch?v=yxDVq2gGgaA>