

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definição: $F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\text{cos } at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\text{cosh } at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

Propriedades:Linearidade:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s)$
$a f(t)$	$a F(s)$

Derivação:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$f'(t)$	$s F(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Decomposição em frações parciais:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

Deslocamento em s:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$

Ex:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$t e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$

Deslocamento em t:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$f(t - a) H(t - a)$	$F(s) e^{-as}$

Função Heaviside: $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad H(t - a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$

Teorema de convolução:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - u) \cdot g(u) du \quad L[f(t) * g(t)] = F(s) G(s)$$

Função impulso:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$\delta(t - a)$	e^{-as}
$\delta(t)$	1

Função delta de Dirac:

definição: $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$, $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} [H(t) - H(t - \varepsilon)]$

$$\delta(t - a) = 0, \quad t \neq a, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1$$

Propriedade de filtragem: $\int_0^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - a) dt = f(a)$

para $f(t) = e^{-st}$, $\int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-as}$

Propriedade: $f(t) * \delta(t) = f(t)$

Outras propriedades:

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
$t.f(t)$	$-F'(s)$
$t^2 f(t)$	$F''(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$
$t.f'(t)$	$-F(s) - s F'(s)$

Ex:

$$\begin{array}{ll}
 t \text{ sen } at & \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \\
 t \text{ cos } at & \frac{(s-a)(s+a)}{(s^2 + a^2)^2}
 \end{array}$$