



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

*“LOB1021 - FÍSICA IV”*

*Prof. Dr. Durval Rodrigues Junior*

*Departamento de Engenharia de Materiais (DEMAR)*

*Escola de Engenharia de Lorena (EEL)*

*Universidade de São Paulo (USP)*

*Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6 - Lorena, SP 12600-970*

*[durval@demar.eel.usp.br](mailto:durval@demar.eel.usp.br)*

*[www.eel.usp.br](http://www.eel.usp.br) – Comunidade – Alunos (Página dos professores)*

Rodovia Itajubá-Lorena, Km 74,5 - Caixa Postal 116  
CEP 12600-970 - Lorena - SP  
Fax (12) 3153-3133  
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

USP Lorena  
[www.eel.usp.br](http://www.eel.usp.br)

Polo Urbo-Industrial Gleba AI-6 - Caixa Postal 116  
CEP 12600-970 - Lorena - SP  
Fax (12) 3153-3006  
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

# UNIDADE 6 -

## Difração

# A Sunday on La Grande Jatte



**Georges Seurat (French, 1859-1891)**

A Sunday on La Grande Jatte -- 1884, 1884-86

Oil on canvas, 81 3/4 x 121 1/4 in. (207.5 x 308.1 cm)

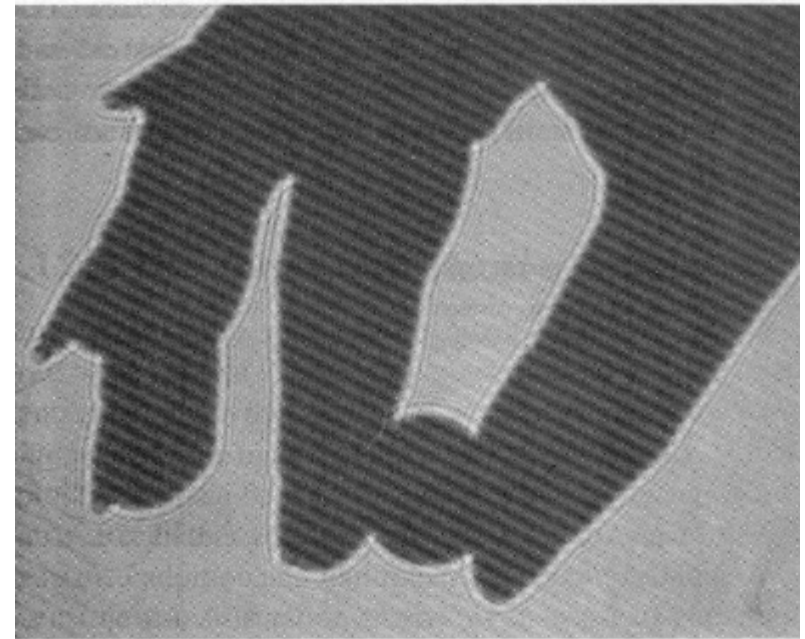
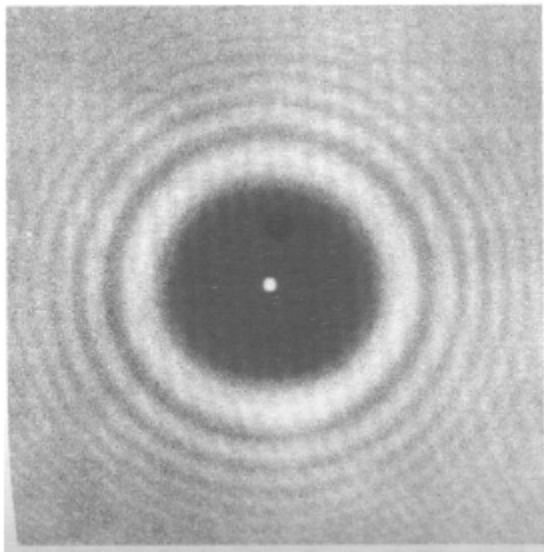
Helen Birch Bartlett Memorial Collection, 1926.224

Gallery 205

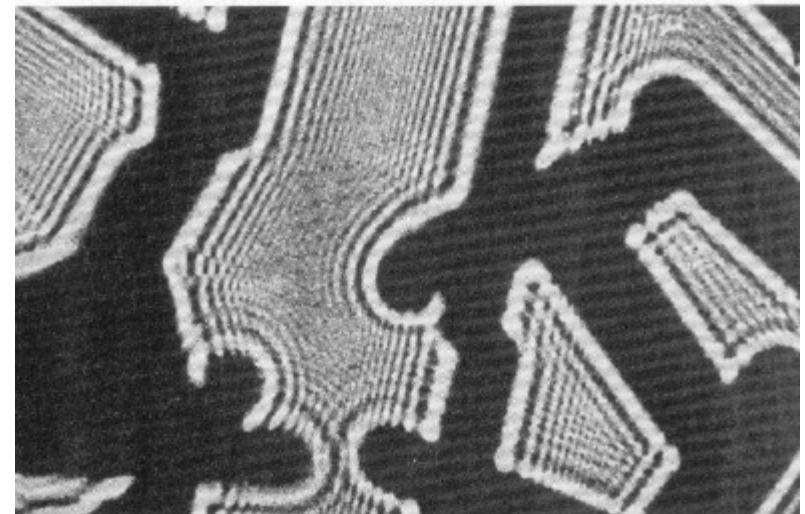
# Difração: Desvio da luz da propagação retilínea.

Trata-se de um efeito característico de fenômenos ondulatórios que ocorre sempre que parte de uma frente de onda, seja de uma onda sonora, de matéria, ou luminosa, é obstruída de alguma forma.

Fresnel (1819)



(a)



# Augustin Fresnel (1788-1827)

Dez anos mais nove que T. Young, Augustin Fresnel foi um engenheiro civil francês que se interessou por estudos de ótica.

Ele não participava do círculo acadêmico de Paris e não conhecia o trabalho de Young.

Era contrário a Napoleão e quando este retornou em 1815, Fresnel ficou em prisão domiciliar.

Fresnel estudou o efeito da luz por uma fenda.



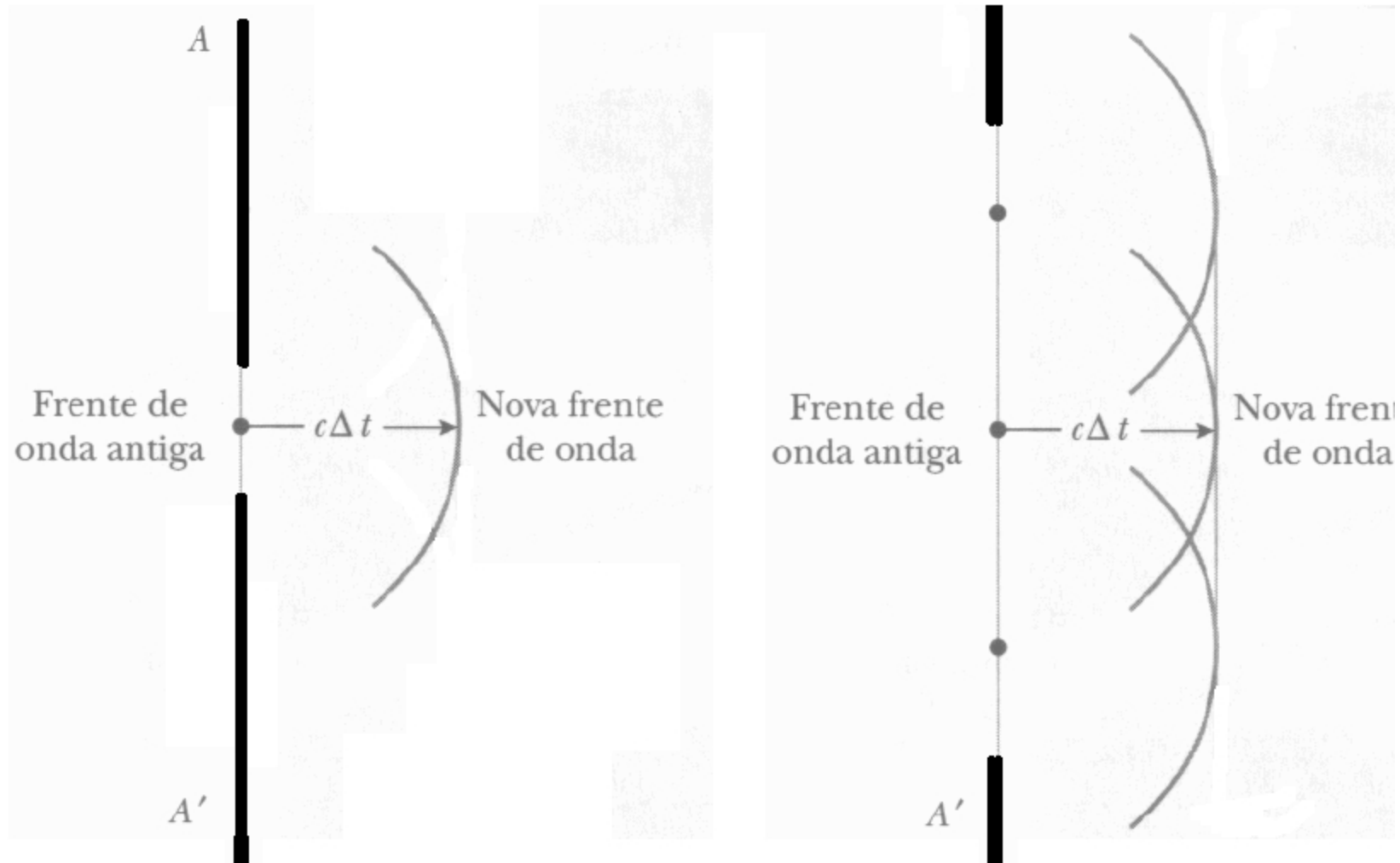
Em 1817 a Academia Francesa ofereceu um prêmio ao melhor trabalho experimental sobre difração e que apresentasse um modelo teórico explicando o efeito.

Fresnel apresentou um trabalho de 135 páginas; era um modelo de ondas.

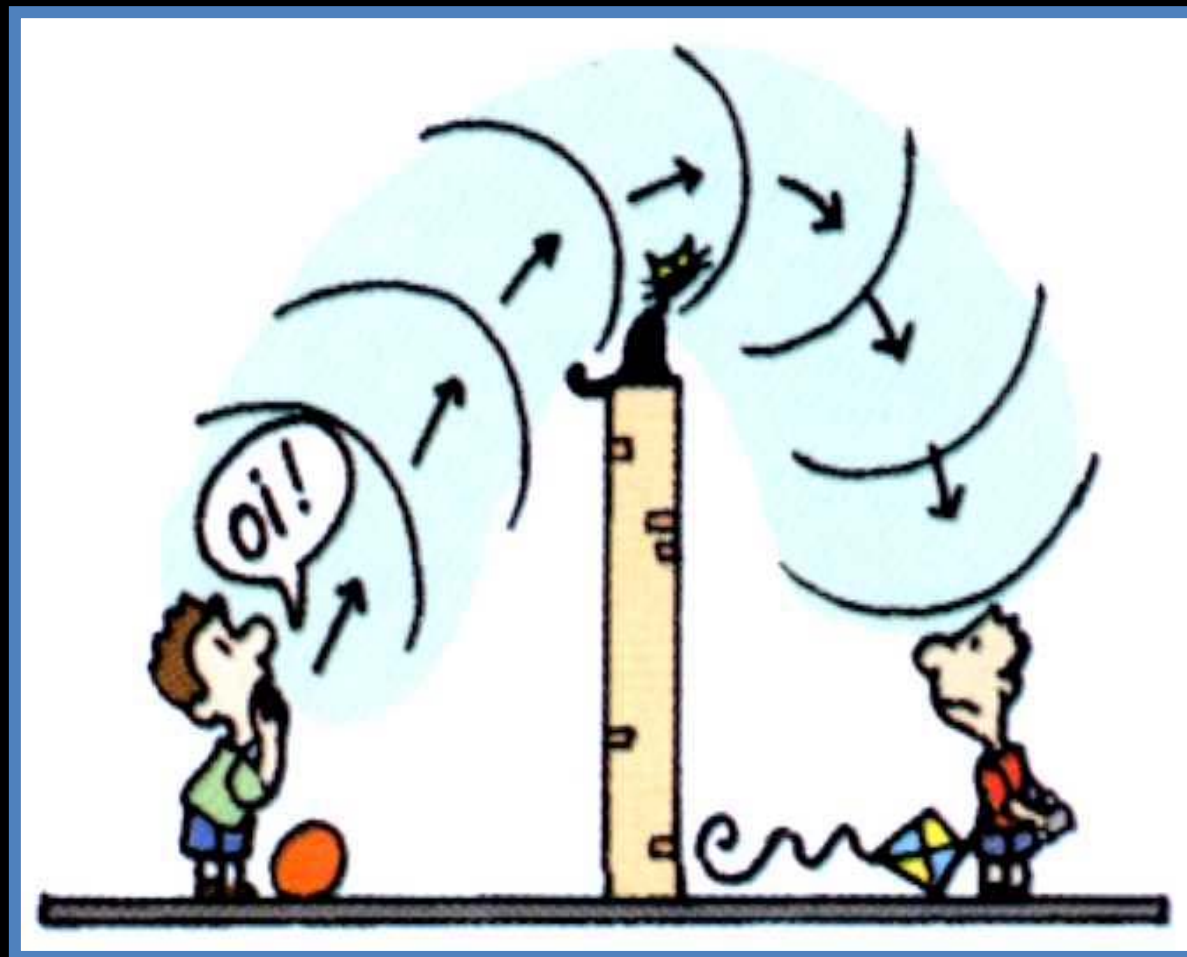
O júri era composto por S-D Poisson, J. B. Biot, e P. S. Laplace, todos Newtonianos ferrenhos que apoiavam a teoria corpuscular da luz.

Poisson calculou, usando a teoria de Fresnel, algo que parecia inconsistente. Feito o experimento, Fresnel estava correto!!!!

Se uma frente de onda é obstruída a sua forma é alterada



# Difração



# Difração

- É o fenômeno pelo qual uma onda pode contornar obstáculos ou fendas.
- A difração não altera  $V, f, T$  e  $\lambda$ .
- A difração ocorre com qualquer onda desde que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\lambda \cong d \text{ ou } \lambda \gg d$$

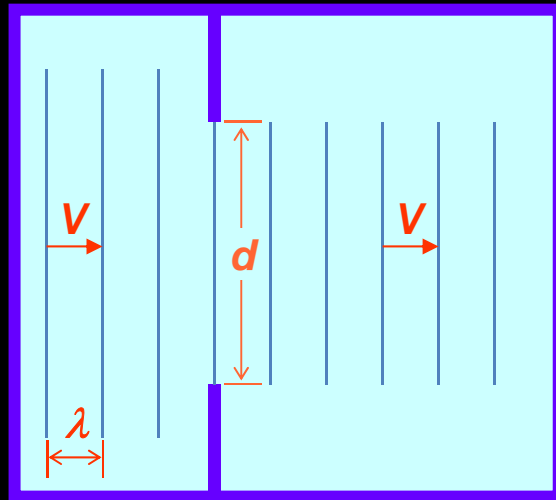
*onde  $d$*  é o tamanho do obstáculo ou a largura da fenda.

- Para  $\lambda \ll d$ , não ocorre difração.



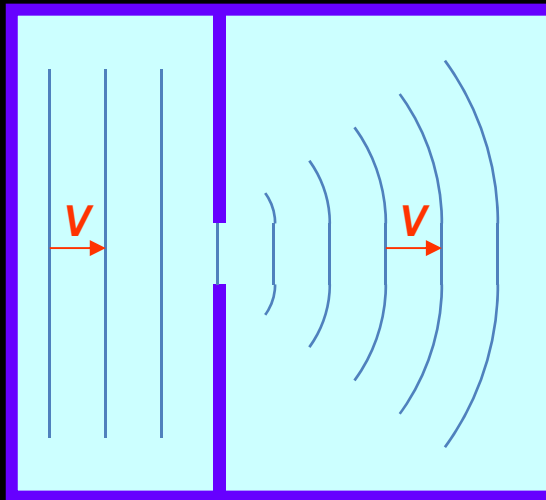
# Difração em uma fenda

- $\lambda \ll d$



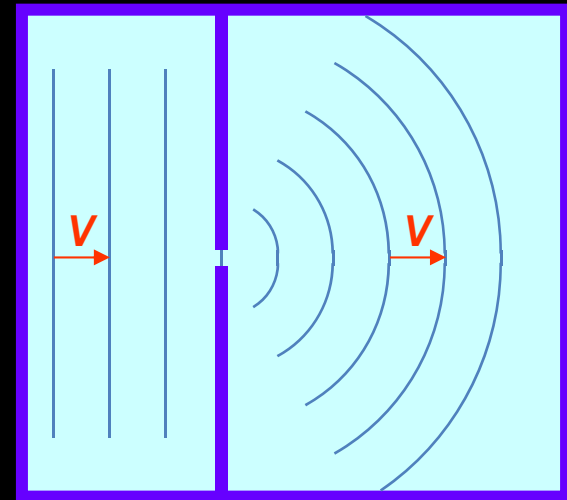
Não ocorre  
difração

- $\lambda \cong d$



Ocorre  
difração

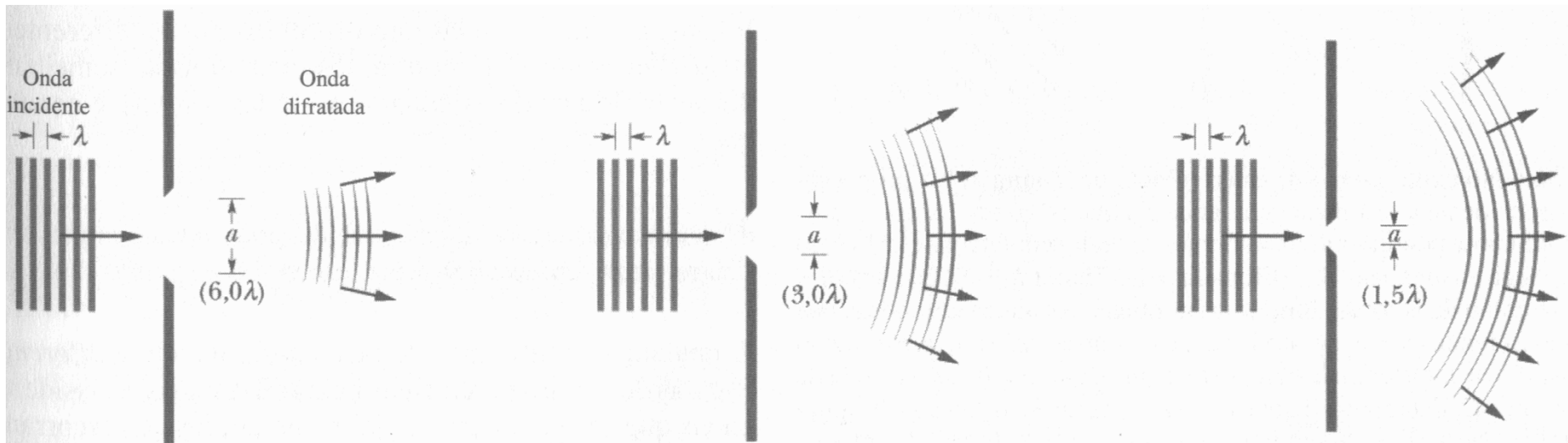
- $\lambda \gg d$



Ocorre  
difração  
acentuada

# Difração

A difração ocorre quando a abertura é da ordem do comprimento de onda da onda incidente, ou para  $\lambda \geq a$ .

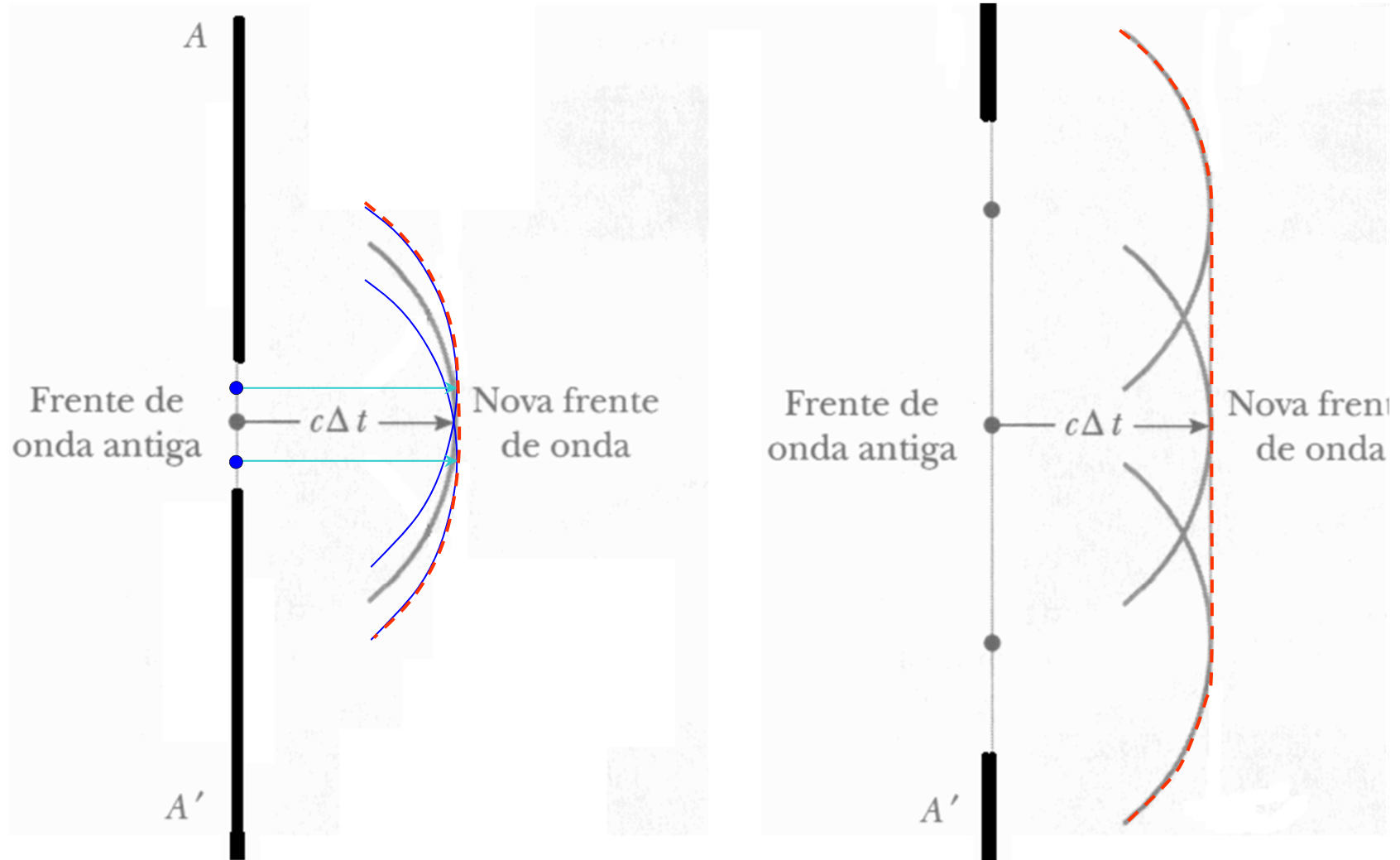


$$\lambda \ll a$$

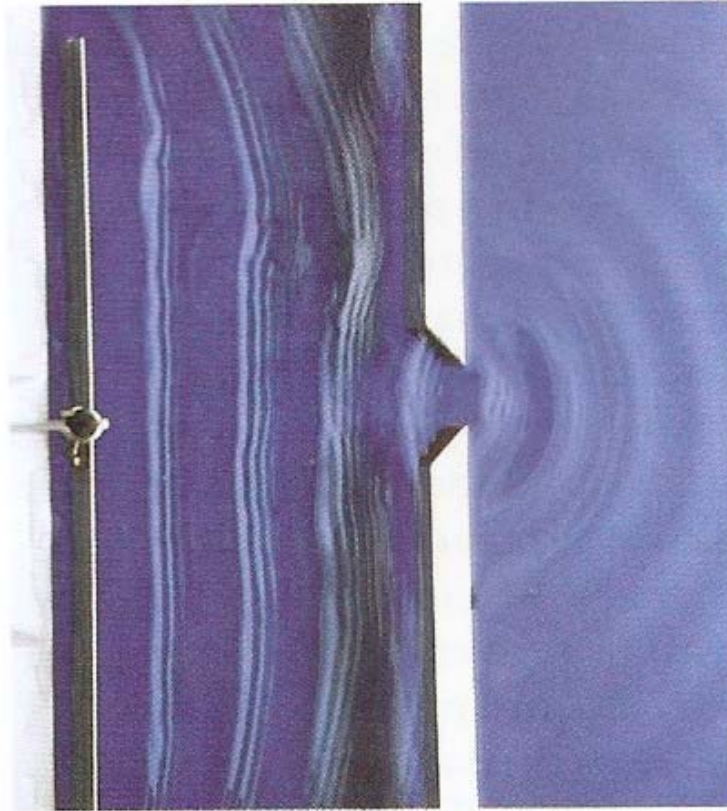
$$\lambda < a$$

$$\lambda \approx a$$

## Usando o Princípio de Huygens:



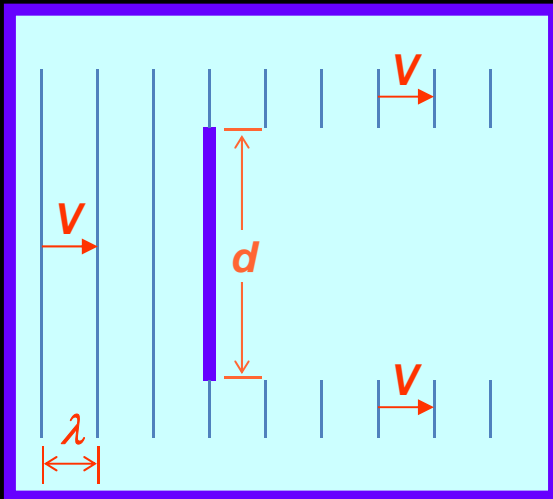
## Exemplo de Difração em uma fenda



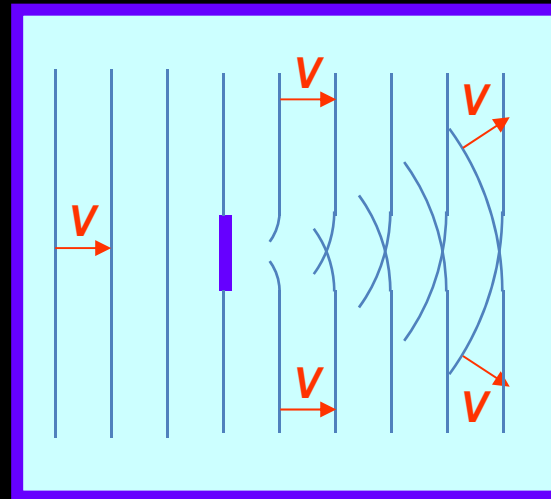
**FIG. 35-6** Difração de ondas na água de um tanque. As ondas são produzidas do lado esquerdo e passam por uma abertura estreita para chegar ao lado direito. (*Runk Schoenberger/Grant Heilman Photography*)

# Difração em um obstáculo

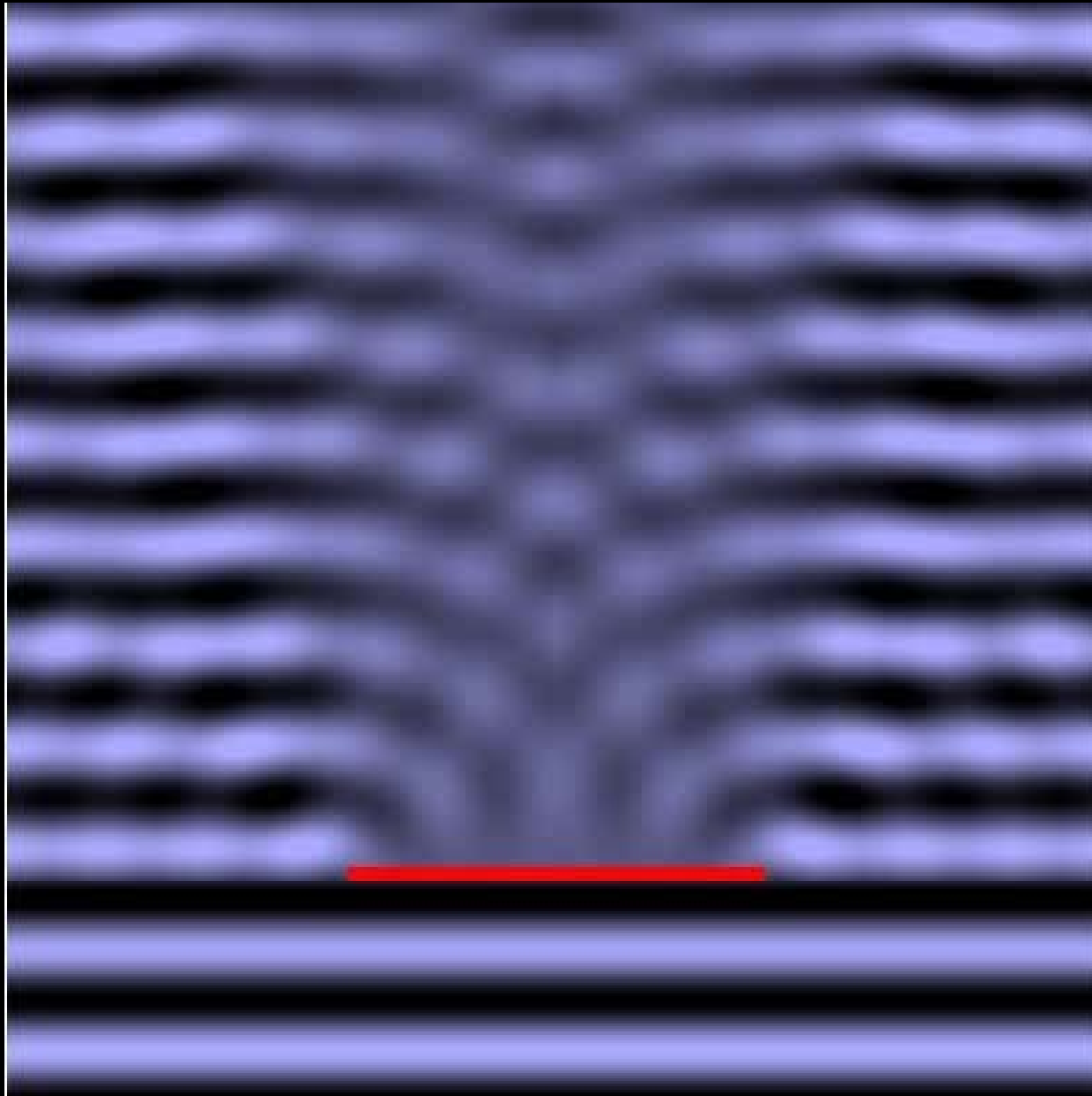
- $\lambda \ll d$



- $\lambda \cong d$        $\lambda \gg d$



## Difração em um obstáculo



# Difração da Luz e do Som

- $1,7\text{cm} < \lambda_{\text{SOM}} < 17\text{m}$
- $0,00004\text{cm} < \lambda_{\text{LUZ}} < 0,00008\text{cm}$
- Para obtermos a difração é necessário que  $\lambda \cong d$  ou  $\lambda \gg d$ .
- Logo o som sofre difração com mais facilidade que a luz.

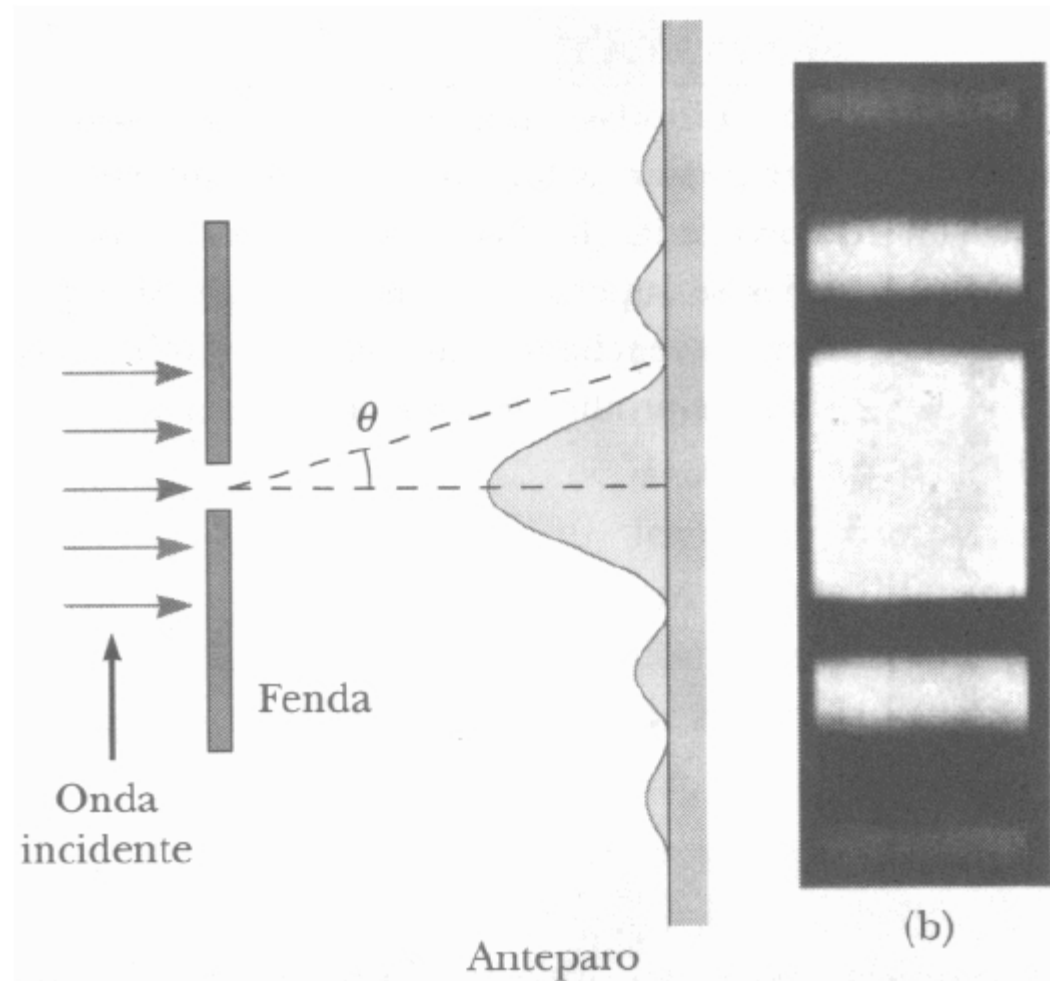
# Difração por uma fenda

Em um anteparo, obtemos um padrão de difração

Franjas escuras ocorrem para:

$$\text{sen}\theta = m \frac{\lambda}{a}$$

$a$  : largura da fenda





# Determinação da Posição dos Máximos e Mínimos

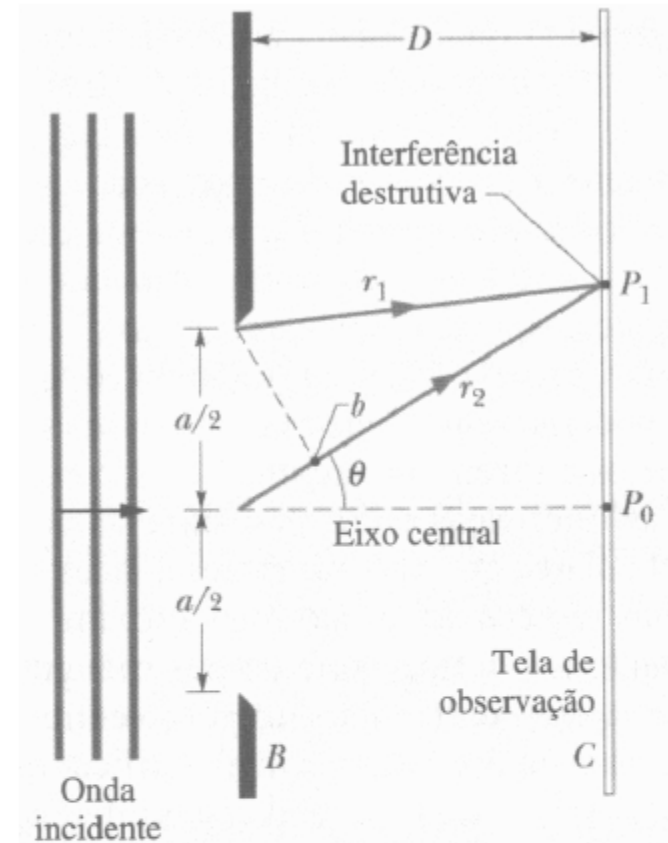
Suposição:  $D \gg a$

Para o primeiro mínimo, a diferença de caminho óptico é

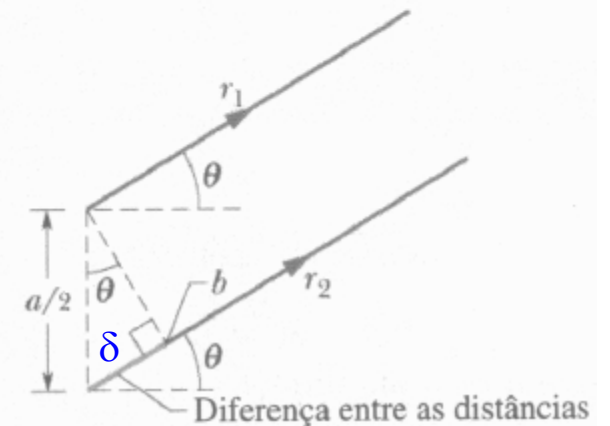
$$\delta = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta$$

No anteparo as ondas devem estar fora de fase para formação da primeira franja escura:

$$\delta = \frac{\lambda}{2} \quad \longrightarrow \quad \lambda = a \operatorname{sen} \theta$$



(a)



A condição que determina a segunda franja escura é encontrada dividindo a fenda em 4 partes :

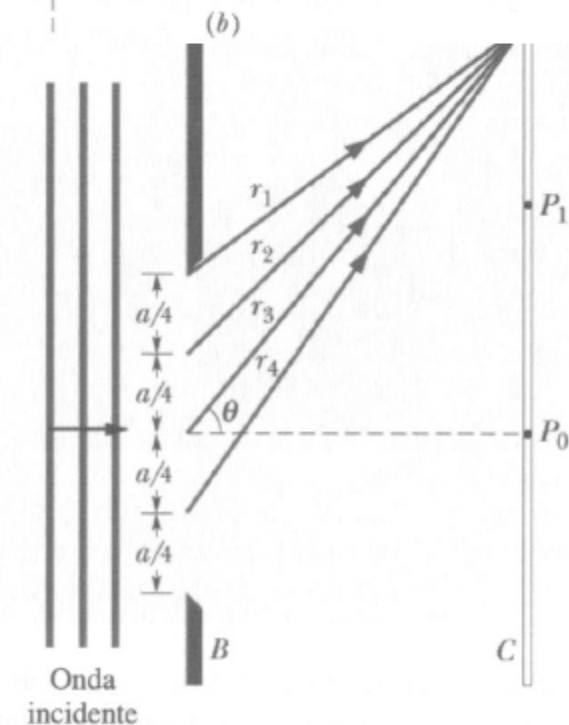
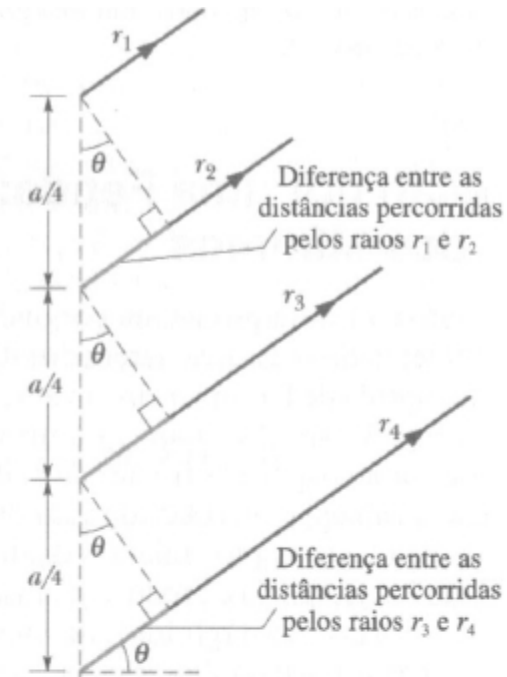
$$\frac{a}{4} \text{ sen } \theta$$

Teremos um mínimo quando:

$$\delta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \text{sen } \theta = 2 \frac{\lambda}{a}$$

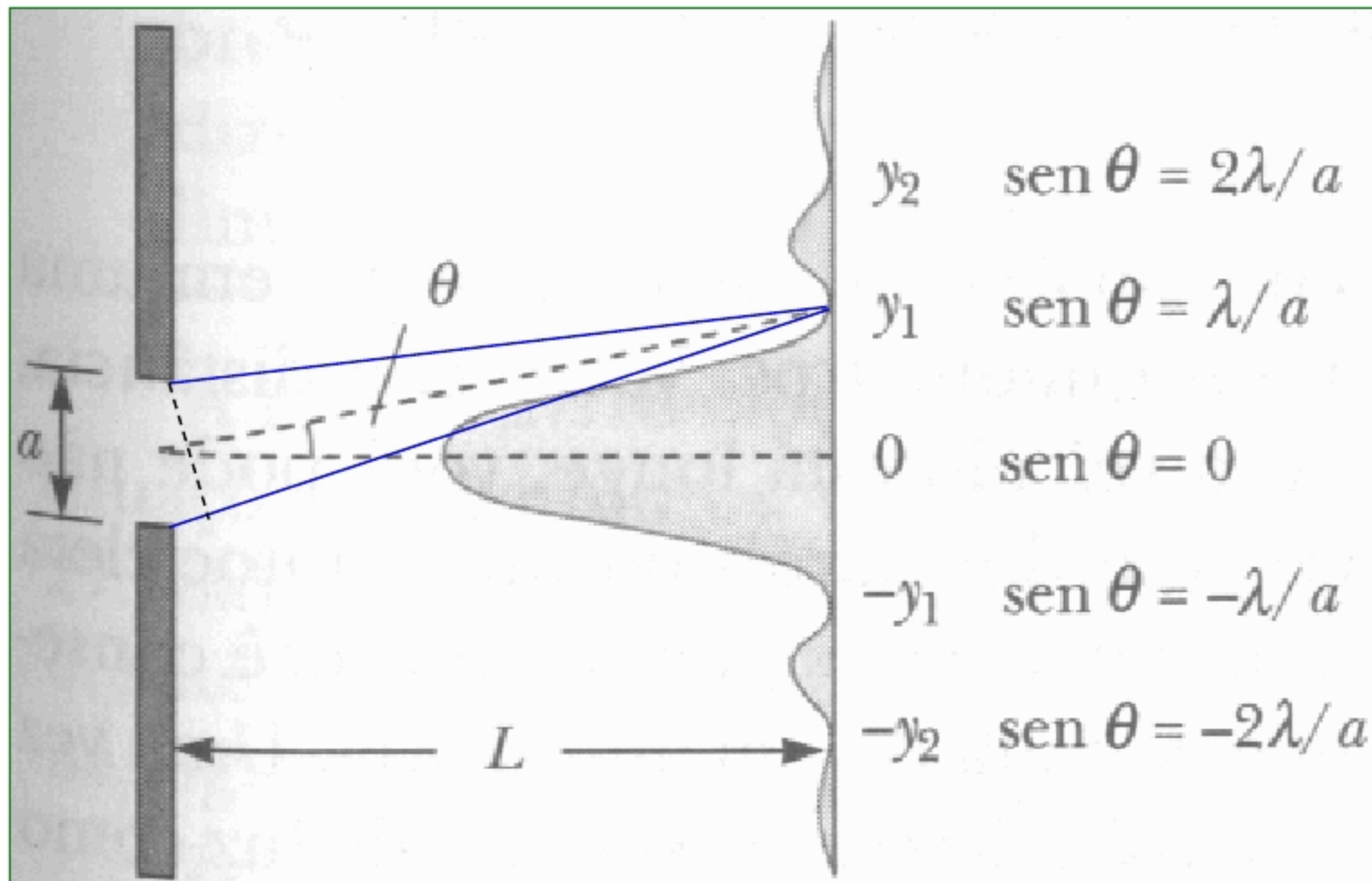
Assim, para todos os mínimos :

$$\text{sen } \theta = m \frac{\lambda}{a} ; m = 1, 2, \dots$$

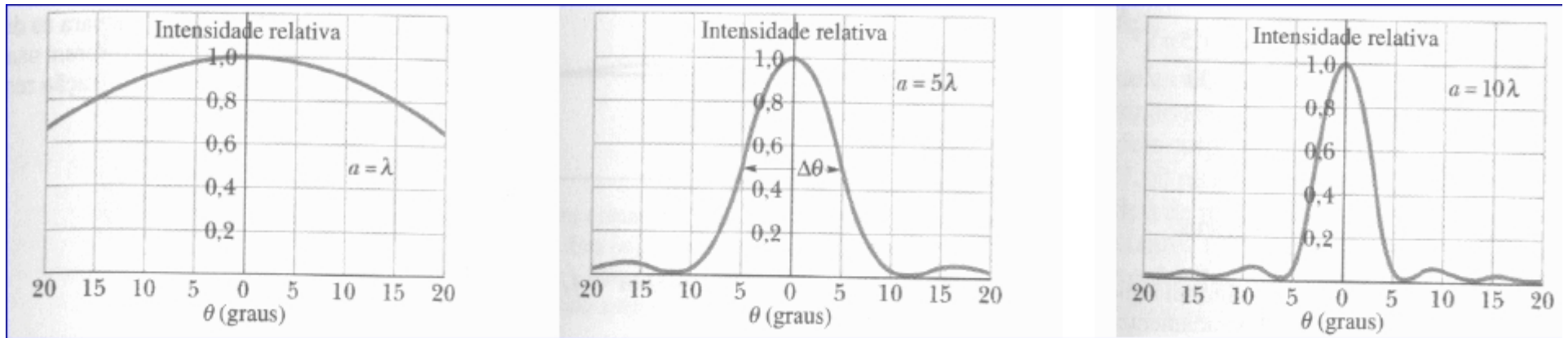


A posição dos mínimos é dada pela condição de que a diferença de percurso entre o raio superior e o inferior seja múltiplo de  $\lambda$  :

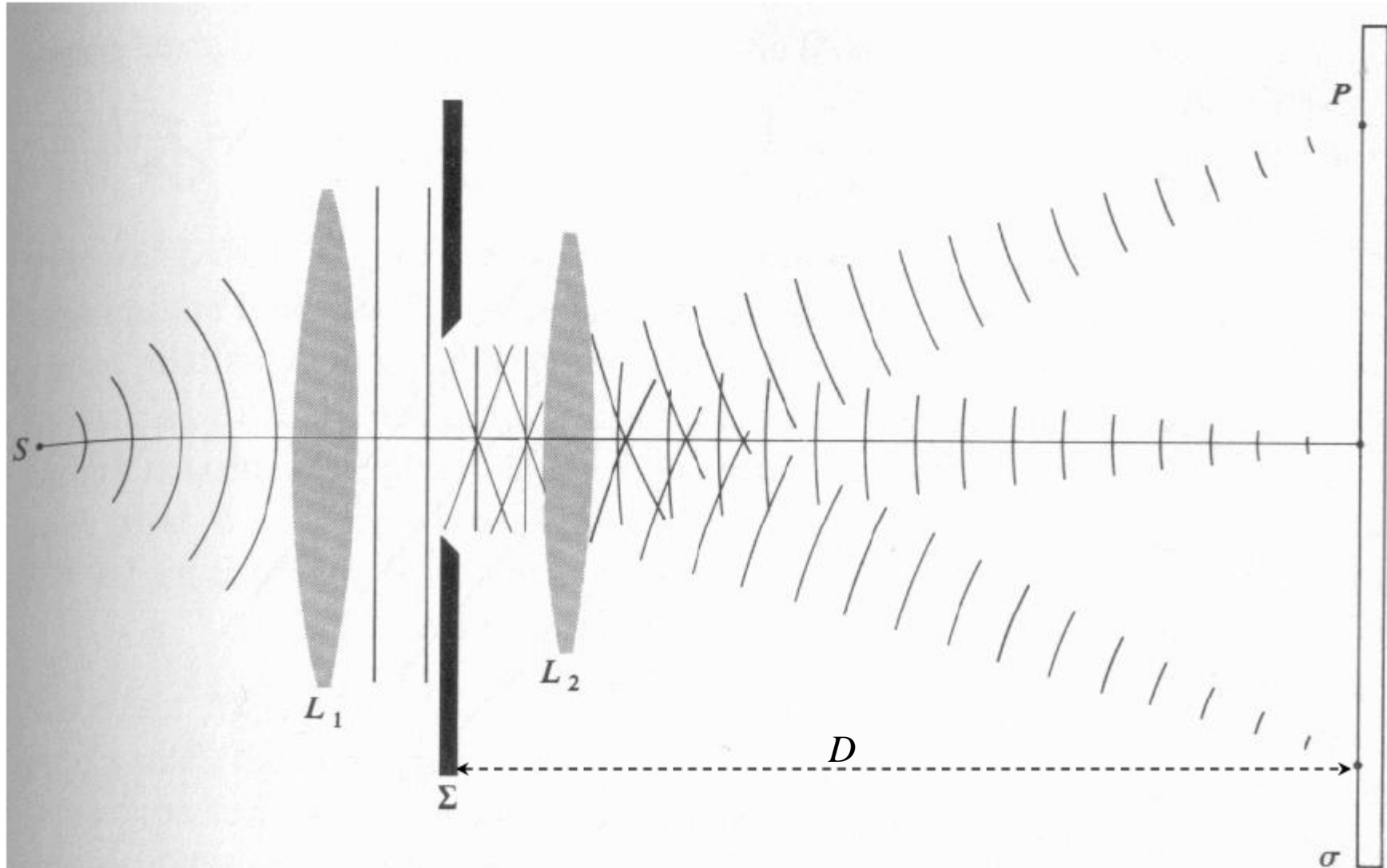
$$\text{sen } \theta = m \frac{\lambda}{a}; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$



Observe que aumentando a largura da fenda, diminui a largura do máximo central:



Se colocarmos uma lente  $L_2$ , com o anteparo no seu plano focal, os raios que chegam ao anteparo são originalmente paralelos. Portanto, não precisamos da condição  $D \gg a$ .



# Determinação da Intensidade

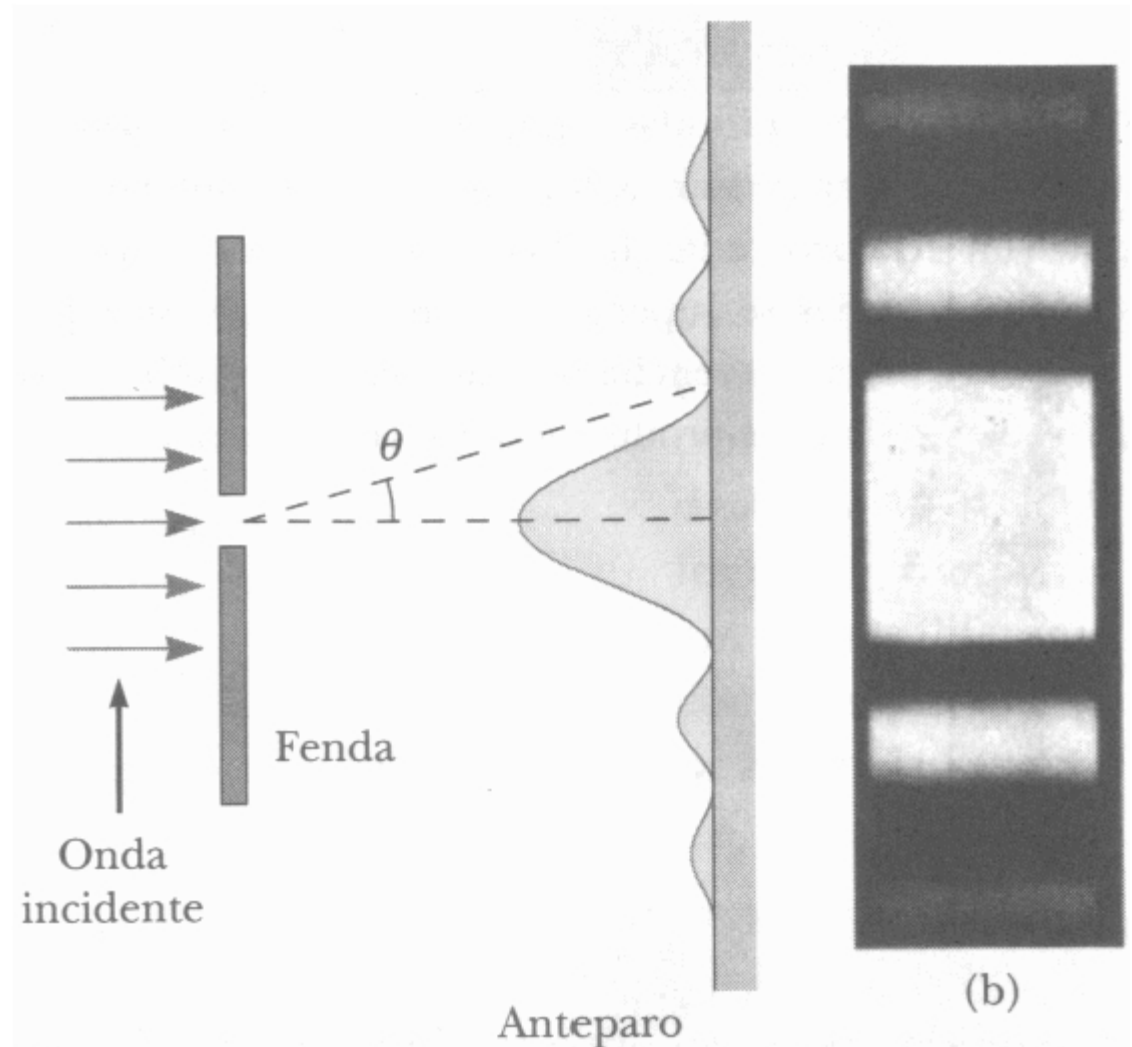
Verificaremos que:

$$I(\theta) = I_m \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$$

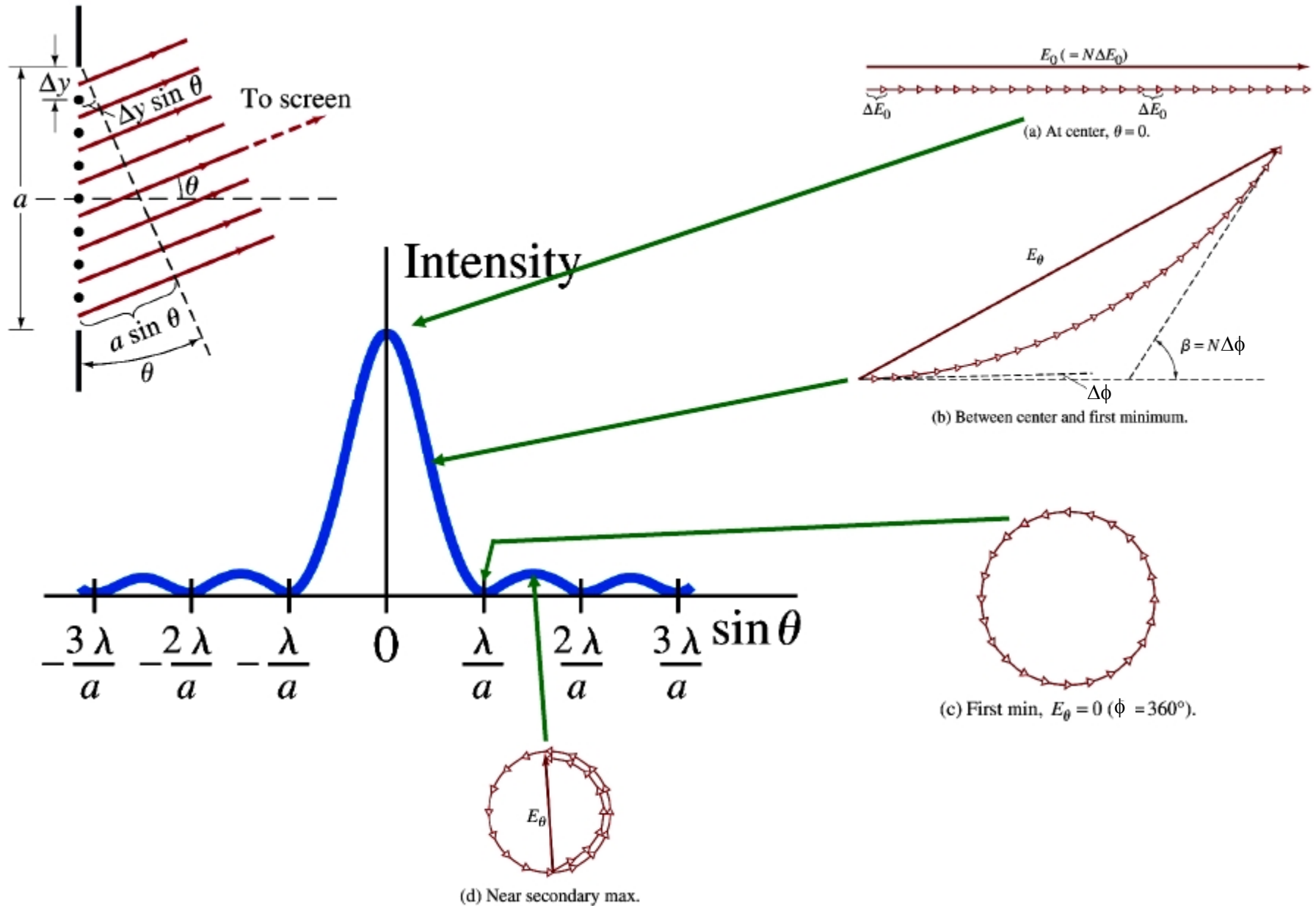
onde

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) (a \text{ sen } \theta)$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \text{sen } \theta$$



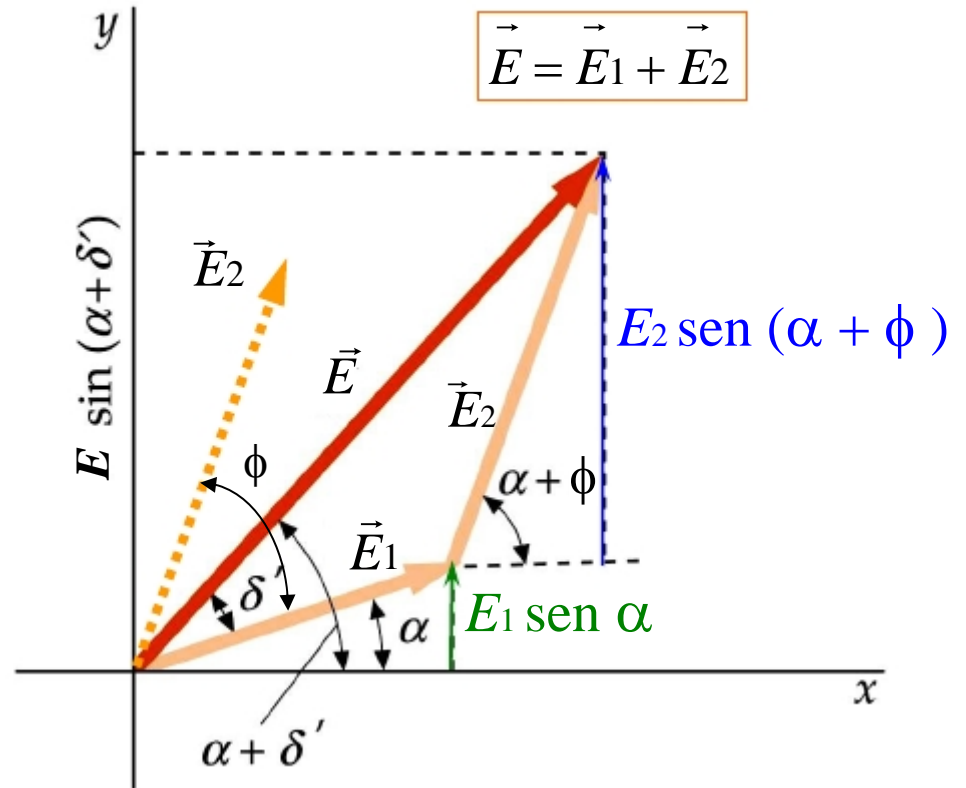
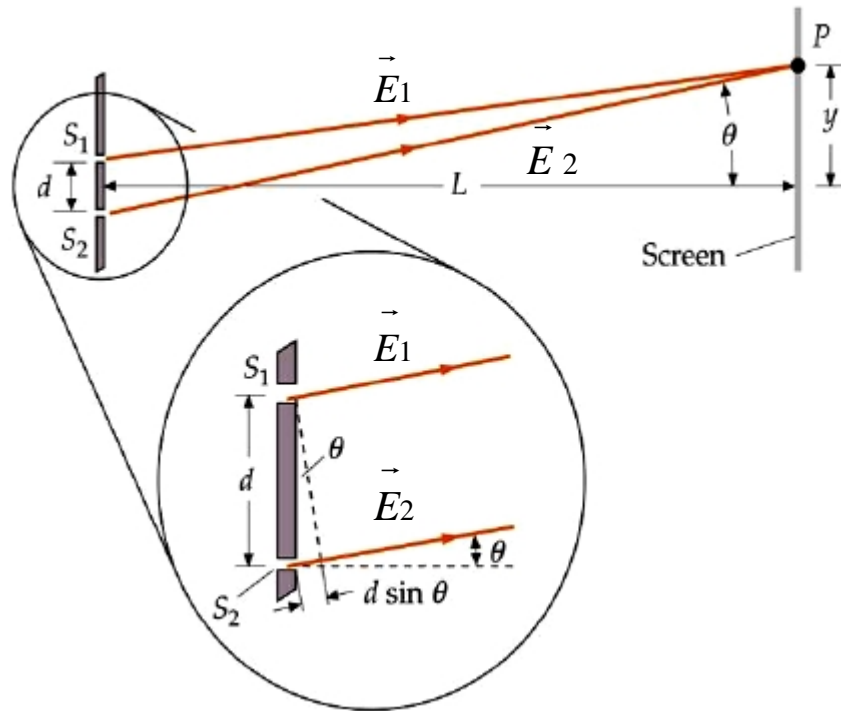
# Difração por uma fenda e Fasores



# Fasores

$$E_1(t) = E_1 \text{sen}(\omega t) = E_1 \text{sen}(\alpha)$$

$$E_2(t) = E_2 \text{sen}(\omega t + \phi) = E_2 \text{sen}(\alpha + \phi)$$

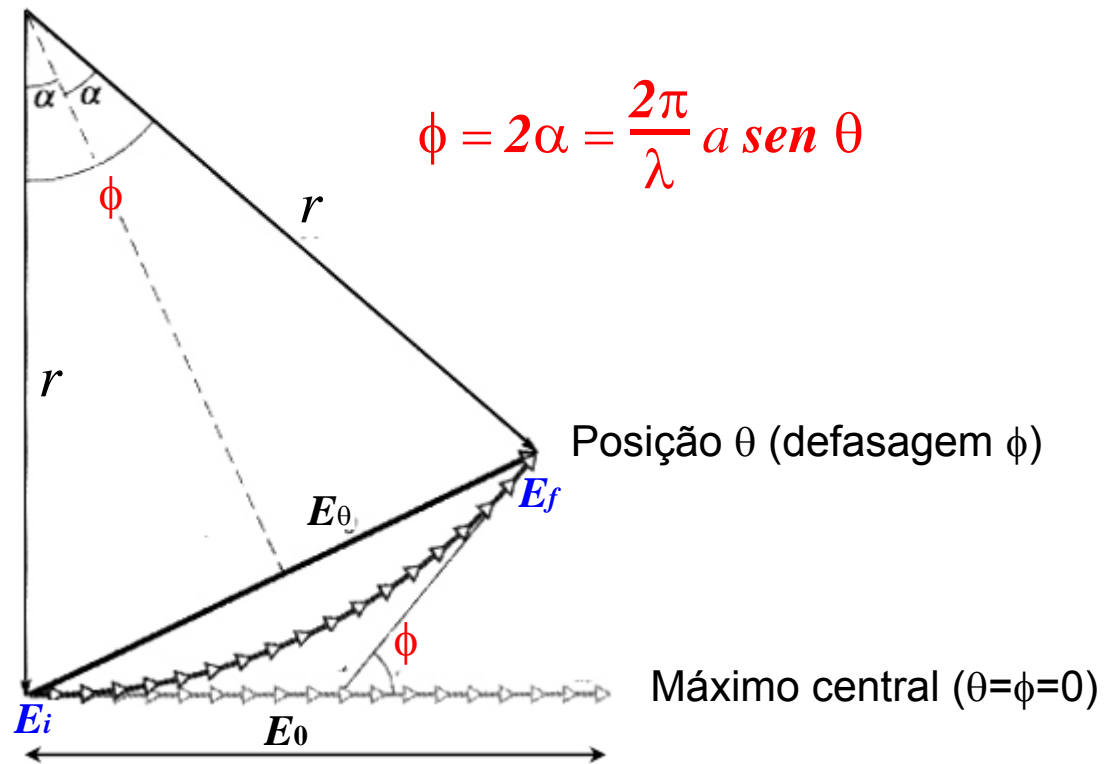
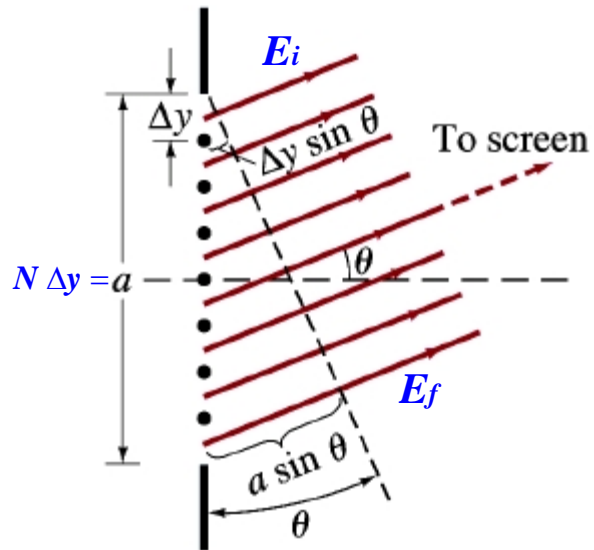


$$\phi = k(d \text{sen } \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} (d \text{sen } \theta)$$

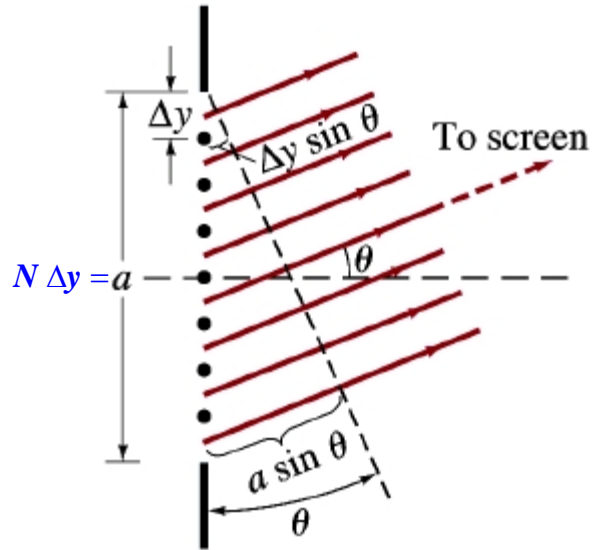
(diferença de fase)



# Intensidade da Onda Difrata

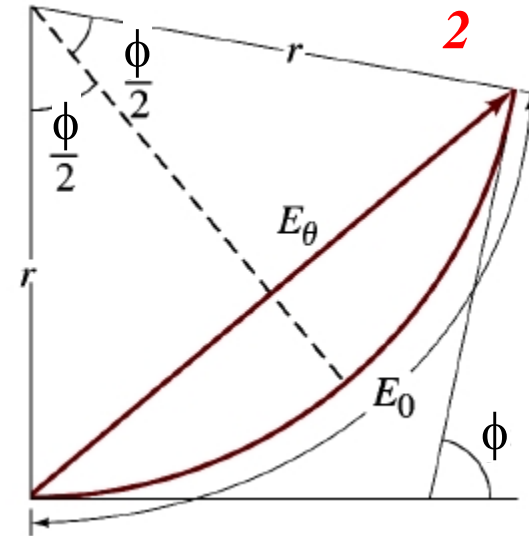


# Intensidade da Onda Difrataada (método dos fasores)



$$\phi = 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ sen } \theta$$

$$\alpha \equiv \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \text{ sen } \theta$$



$$E_{\theta} / 2 = r \text{ sen}(\phi / 2)$$

$$\phi = E_0 / r ; \quad r = E_0 / \phi$$

$$E_{\theta} = \frac{E_0}{\phi / 2} \text{ sen}(\phi / 2) = E_0 \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}$$

A intensidade da onda em  $\theta$  será  $I(\theta)$ :

$$I(\theta) = E_{\theta}^2 = E_0^2 \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2 \Rightarrow I(\theta) = I_0 \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$$

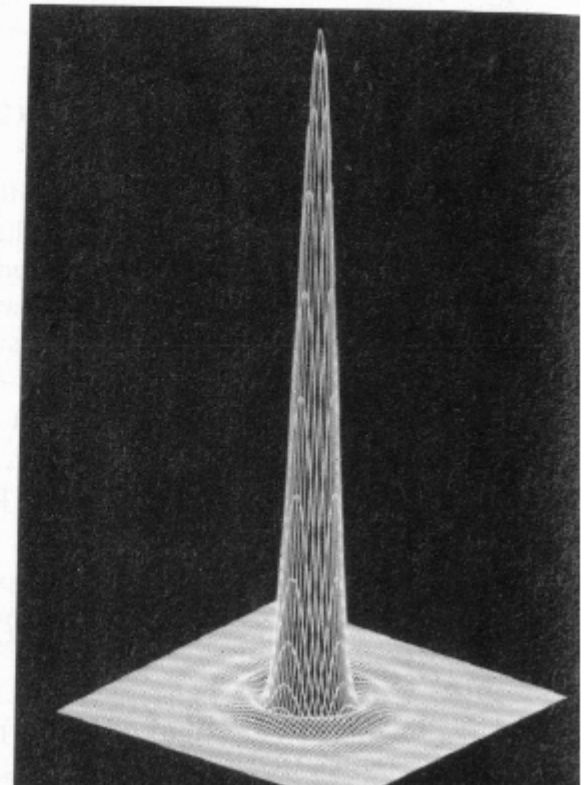
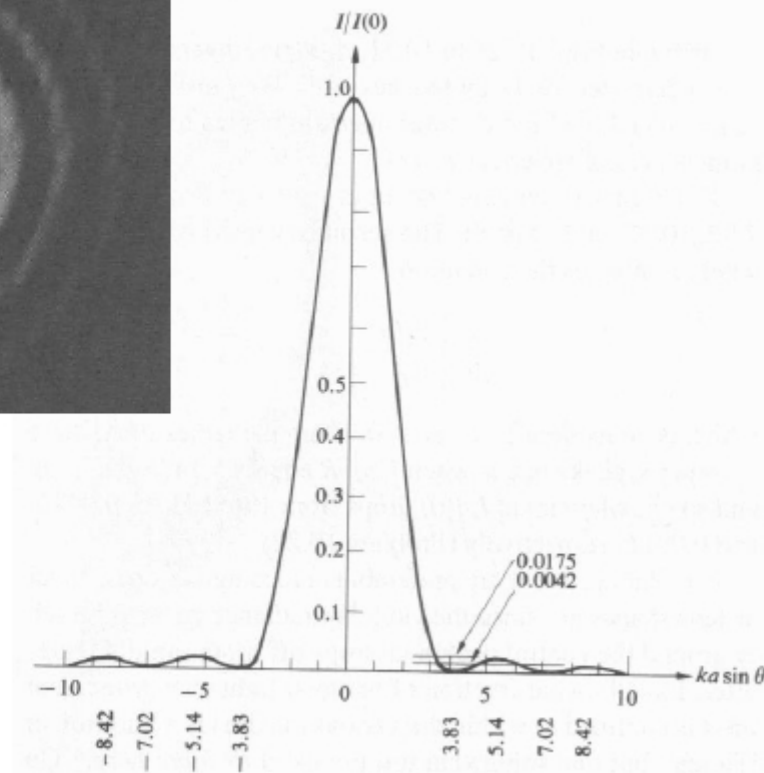
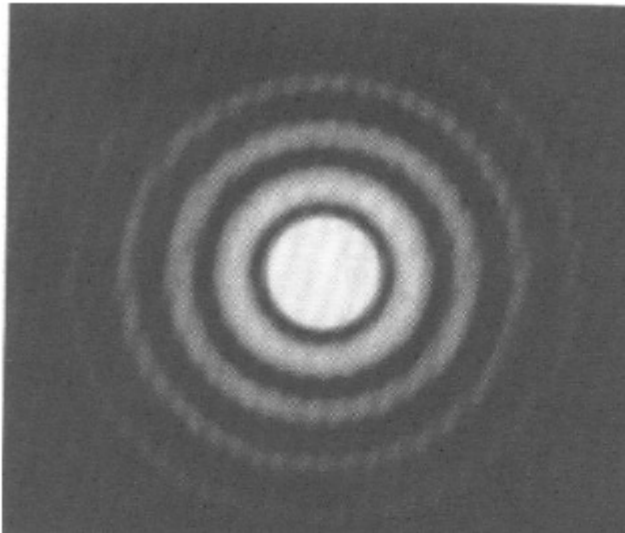
**Mínimos:**

$$\alpha = \pm m\pi \Leftrightarrow a \text{ sen } \theta = \pm m\lambda ; \quad m = 1, 2, \dots$$

# Difração por uma Abertura Circular

A posição do primeiro mínimo, para uma abertura circular de diâmetro  $d$ , é dada por:

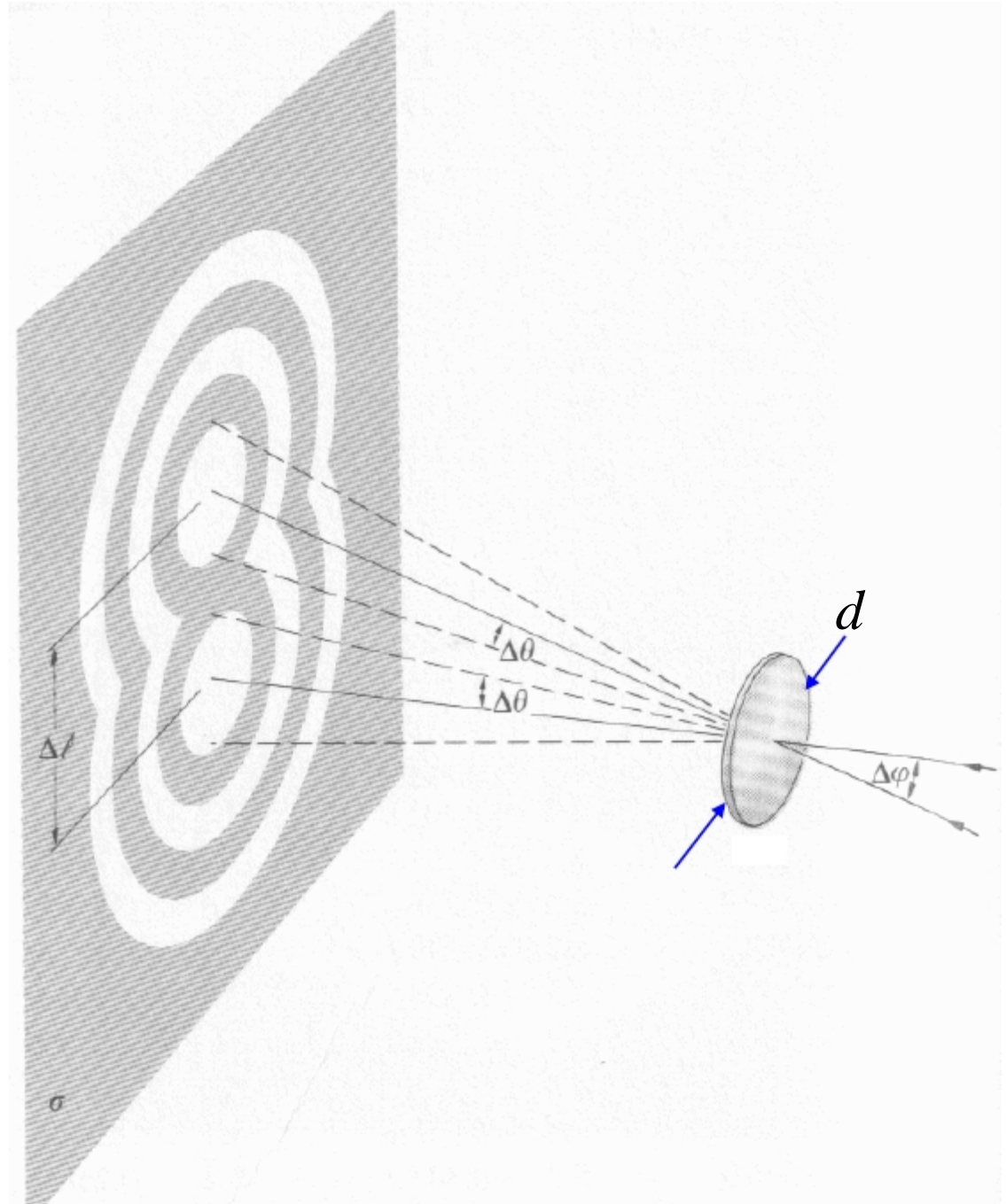
$$\text{sen}\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{d}$$



# Resolução

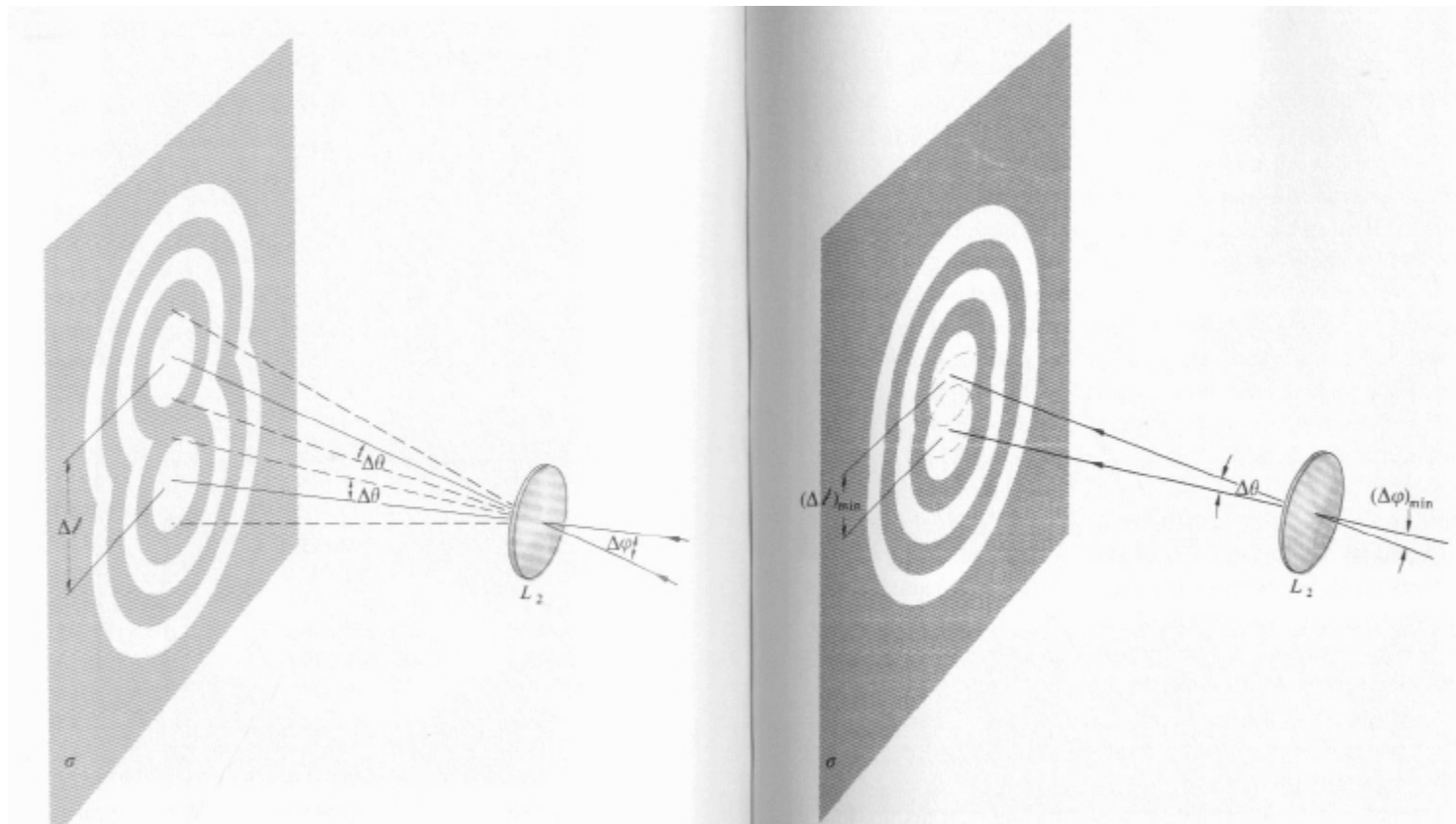
A imagem difratada de dois objetos pontuais, ao passar por um orifício de diâmetro  $d$ , adquire uma separação angular da ordem de:

$$\Delta\theta_R = \arcsen\left(1,22 \frac{\lambda}{d}\right)$$



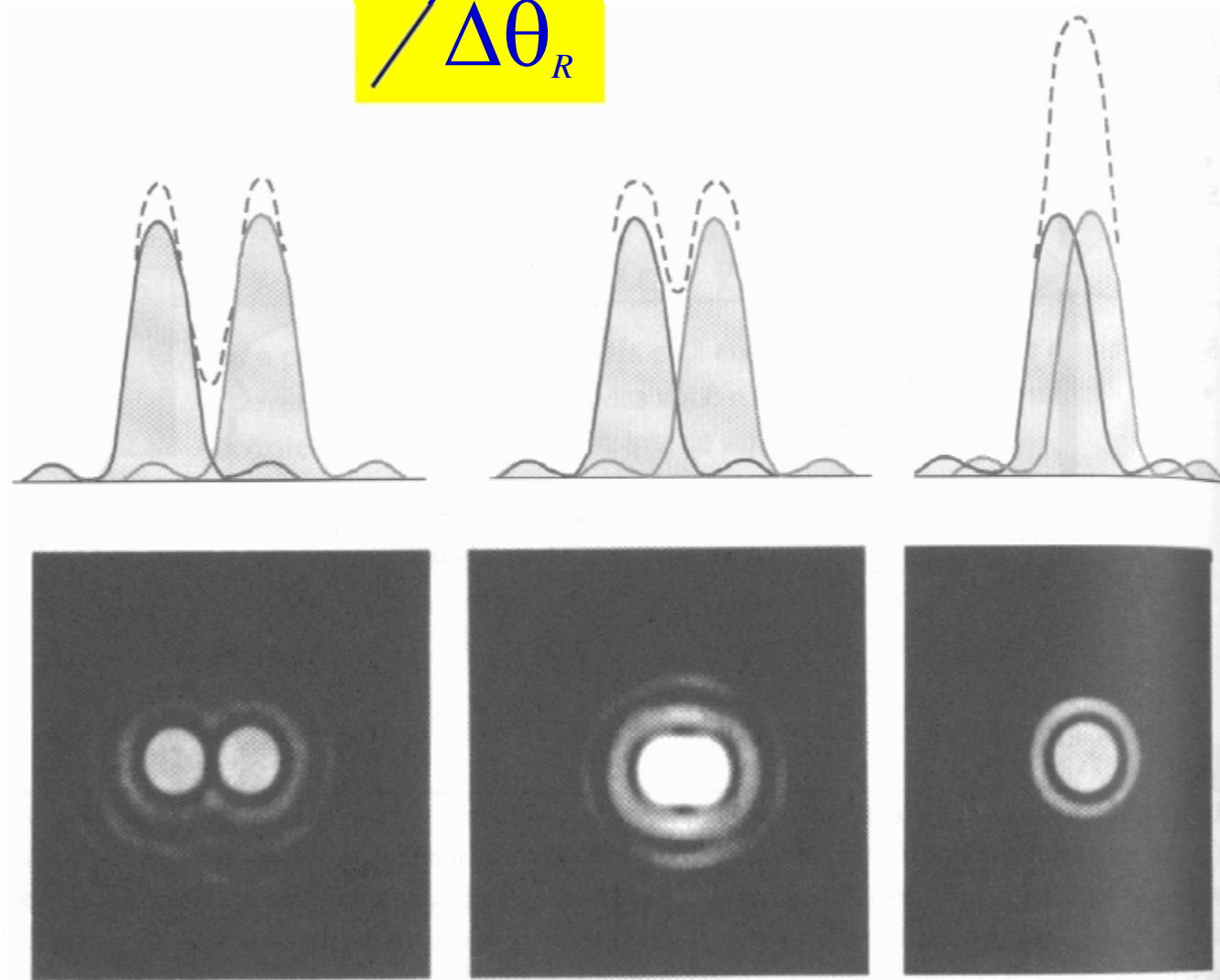
**Critério de Rayleigh** : A separação angular mínima para que duas fontes pontuais possam ser distinguidas é aquela onde o máximo central de uma coincide com o primeiro mínimo da figura de difração da outra:

$$\Delta\theta_R = \arcsen\left(1,22 \frac{\lambda}{d}\right) \approx 1,22 \frac{\lambda}{d}$$



Os sistemas ópticos (microscópios, telescópios, olho humano) são caracterizados por um *poder de resolução*:

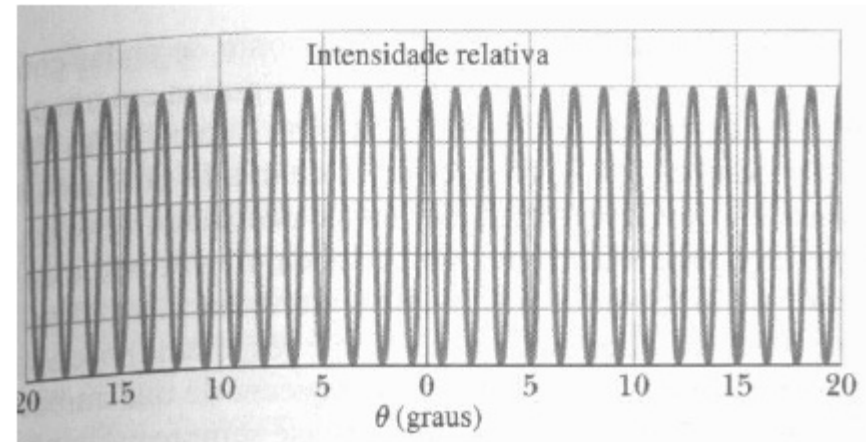
$$\frac{1}{\Delta\theta_R}$$



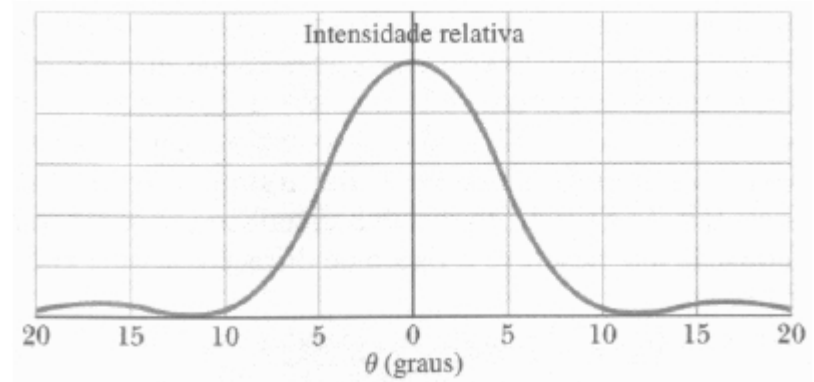


# Difração por Duas Fendas

No estudo do experimento de Young consideramos  $a/\lambda \rightarrow 0$  e obtivemos a figura da direita. Neste limite as fontes S1 e S2 irradiam ( $I_0$ ) de modo uniforme para todos os ângulos.



Mas, se considerarmos uma razão  $a/\lambda$  finita, cada fonte irradiará de modo semelhante a figura da direita.



Intensidade da figura de interferência de duas fendas:

$$I(\theta) = I_m \cos^2 \beta \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$$

onde

$$\beta = \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right) \text{sen } \theta \qquad \alpha = \left( \frac{\pi a}{\lambda} \right) \text{sen } \theta$$

$d$  é a distância entre os centros das fendas

$a$  é a largura de cada fenda

$\cos^2 \beta$  é o Fator de Interferência

$\left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$  é o Fator de Difração



Intensidade da figura de interferência de duas fendas:

$$I(\theta) = I_m \cos^2 \beta \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$$

onde

$$\beta = \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right) \text{sen } \theta \quad \alpha = \left( \frac{\pi a}{\lambda} \right) \text{sen } \theta$$

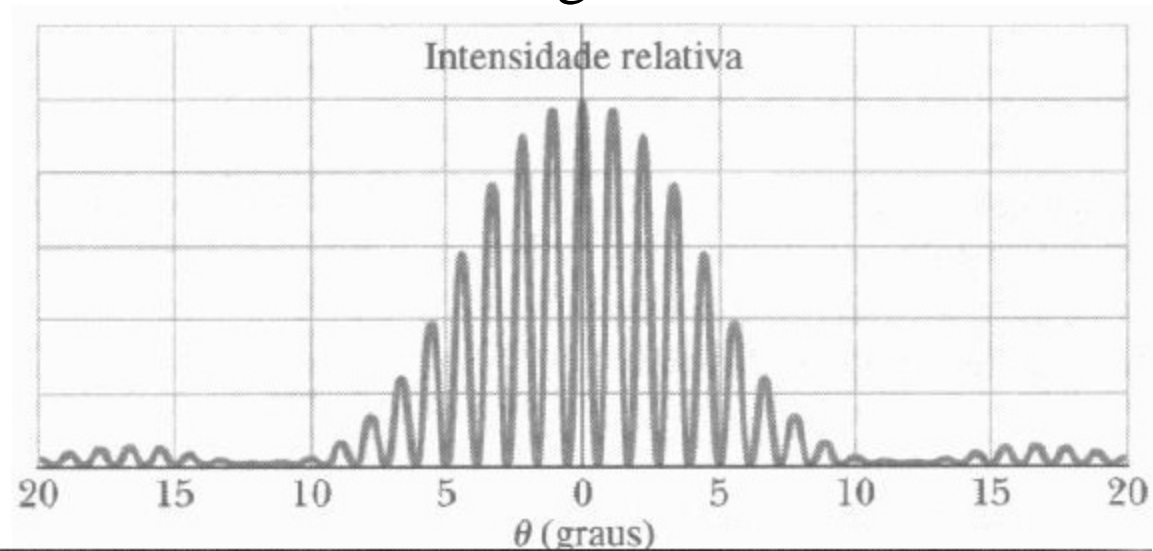
No limite  $a/\lambda \rightarrow 0$  obtemos a equação para a intensidade no experimento de Young (par de fendas):

$$I(\theta) = I_m \cos^2 \beta$$

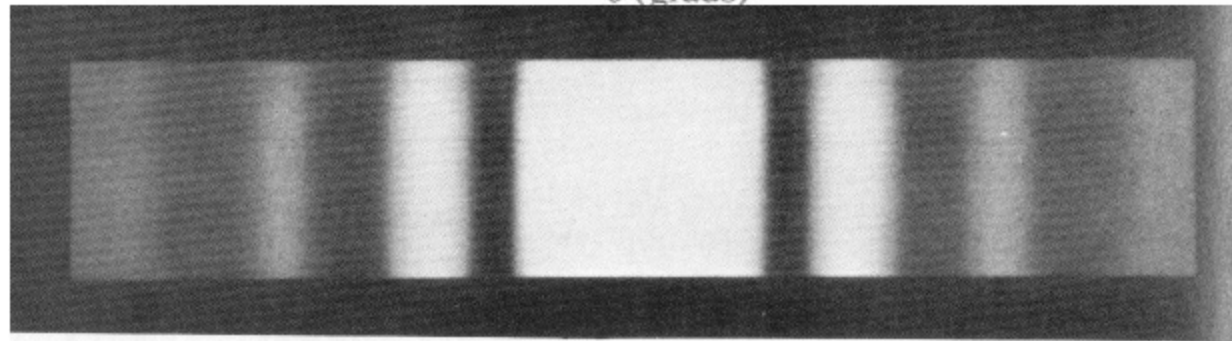
No limite  $d/\lambda \rightarrow 0$  obtemos a equação para a intensidade numa fenda única:

$$I(\theta) = I_m \left( \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right)^2$$

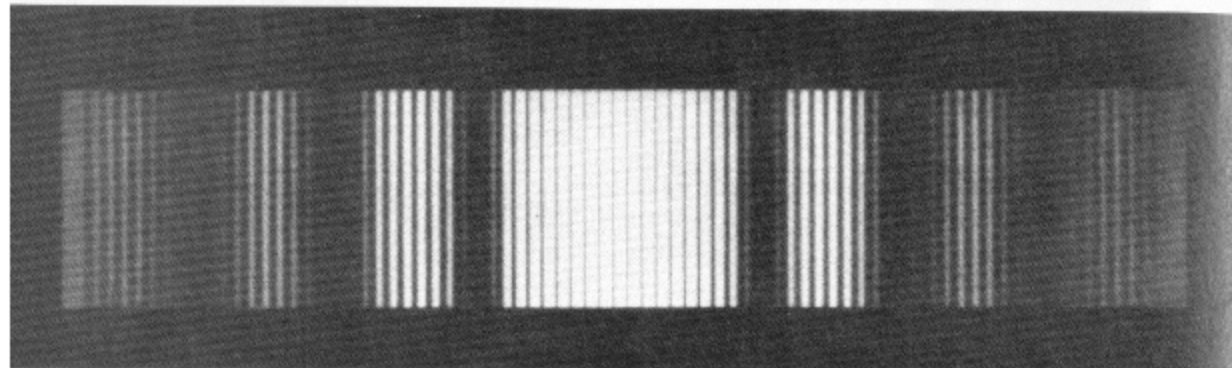
O gráfico geral da intensidade é algo como:



uma fenda



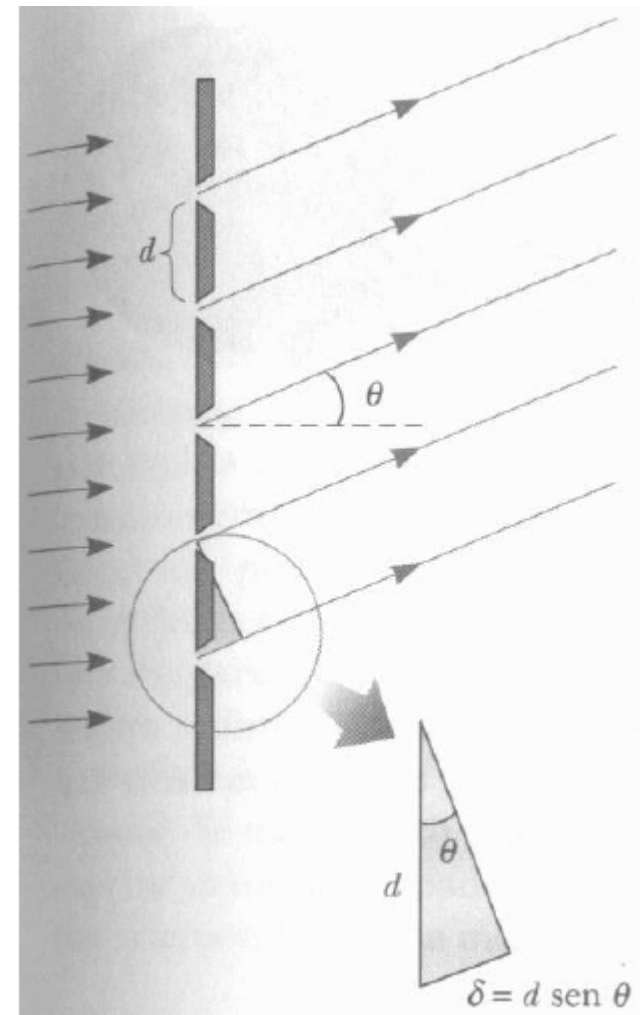
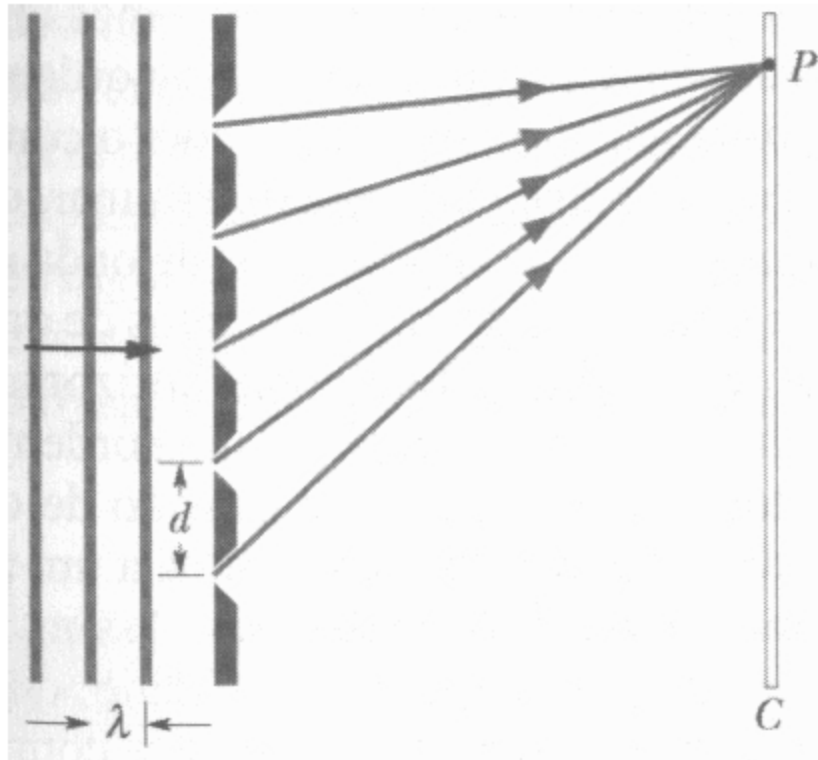
duas fendas

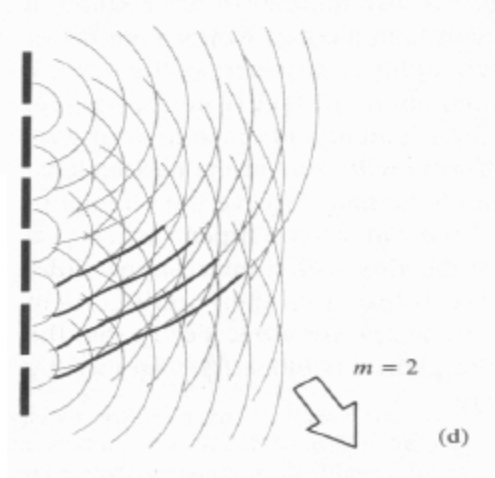
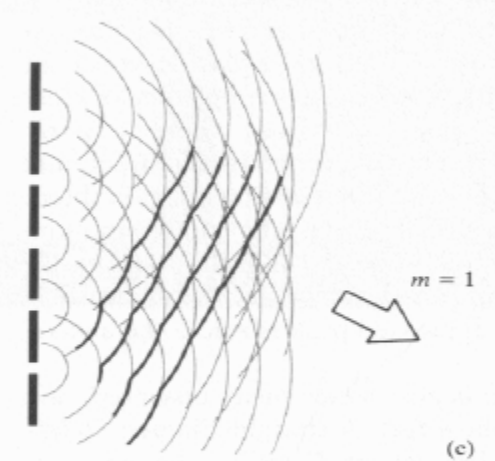
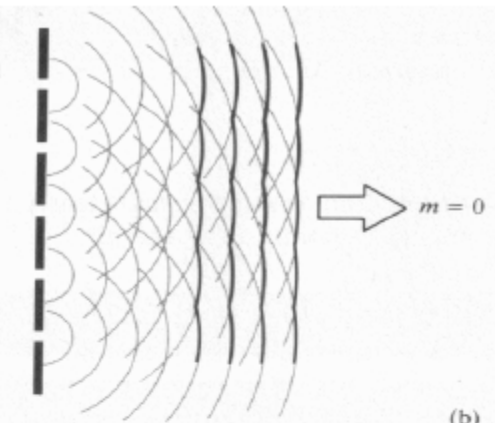
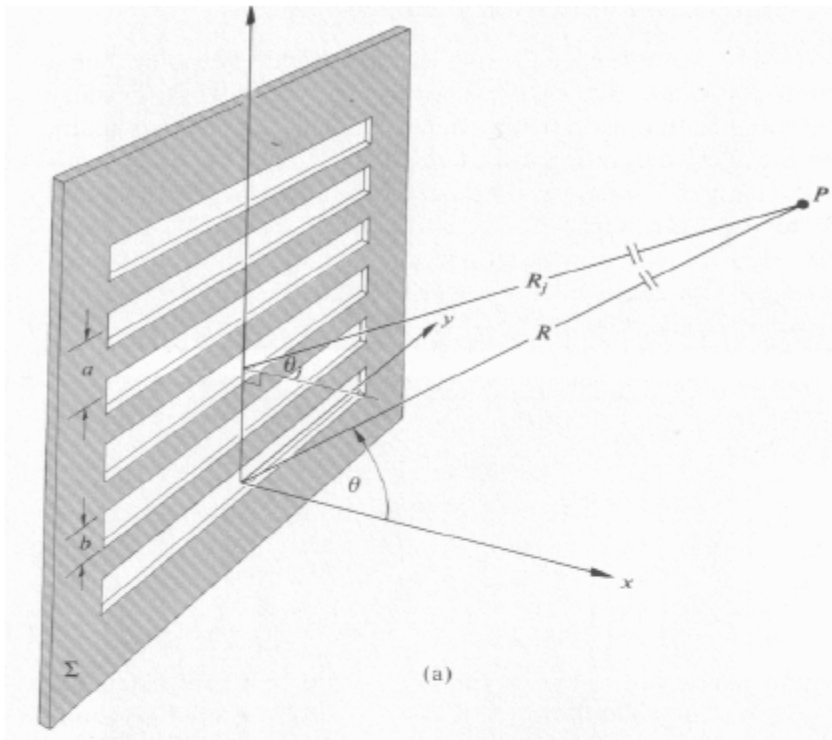


# Rede de Difração

Somando os raios, dois a dois, teremos máximos no anteparo quando:

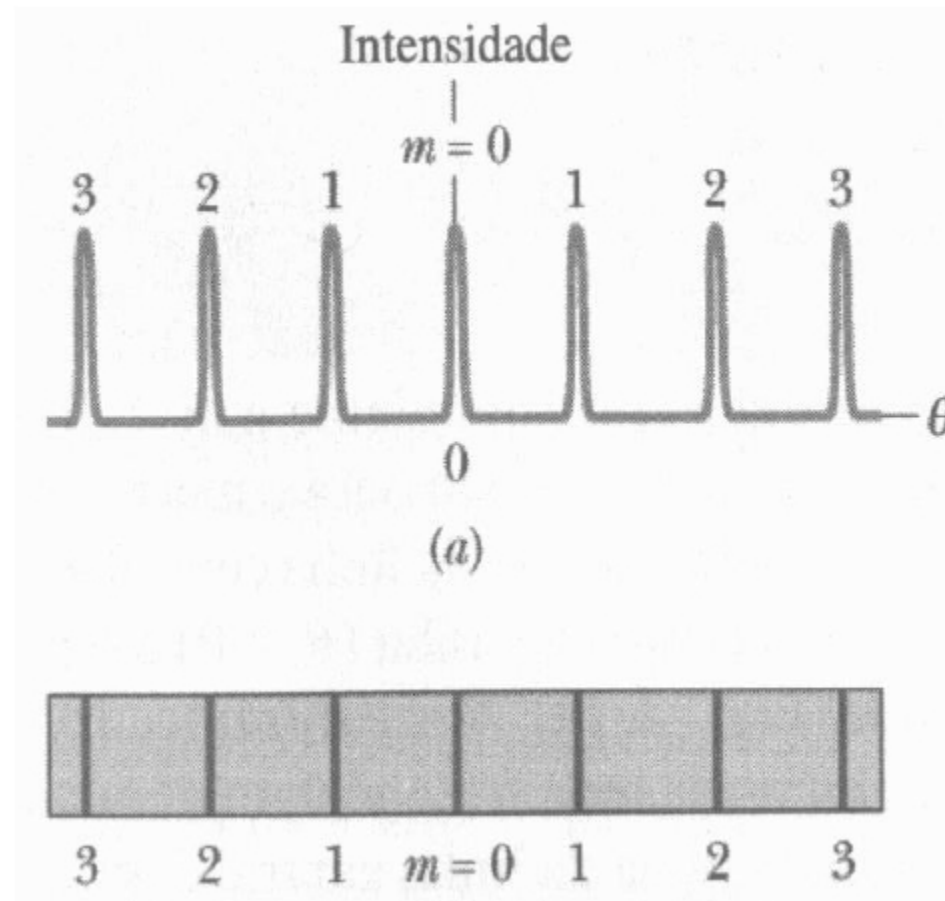
$$d \operatorname{sen} \theta = m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$





Representação das frentes de onda

A rede de difração tem uma resolução muito superior a uma fenda dupla, por exemplo:

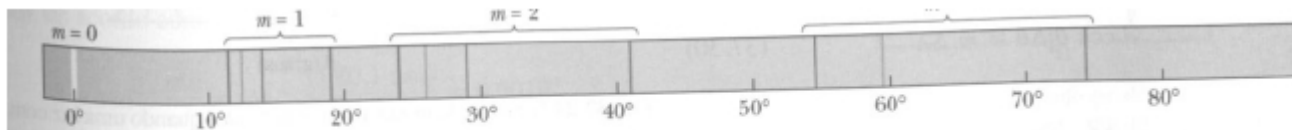
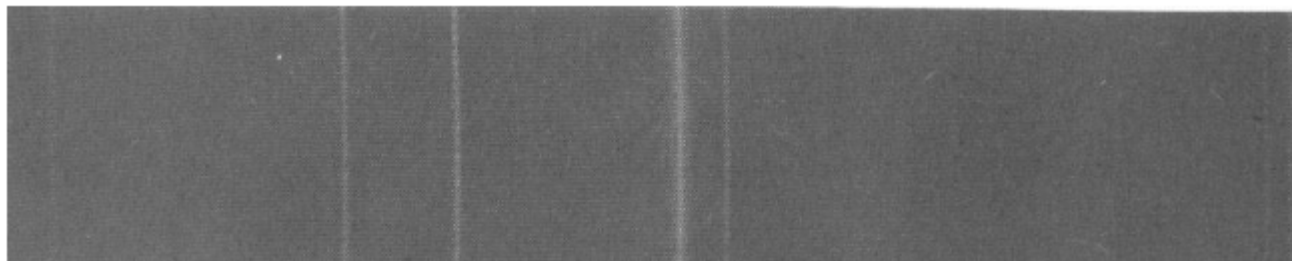
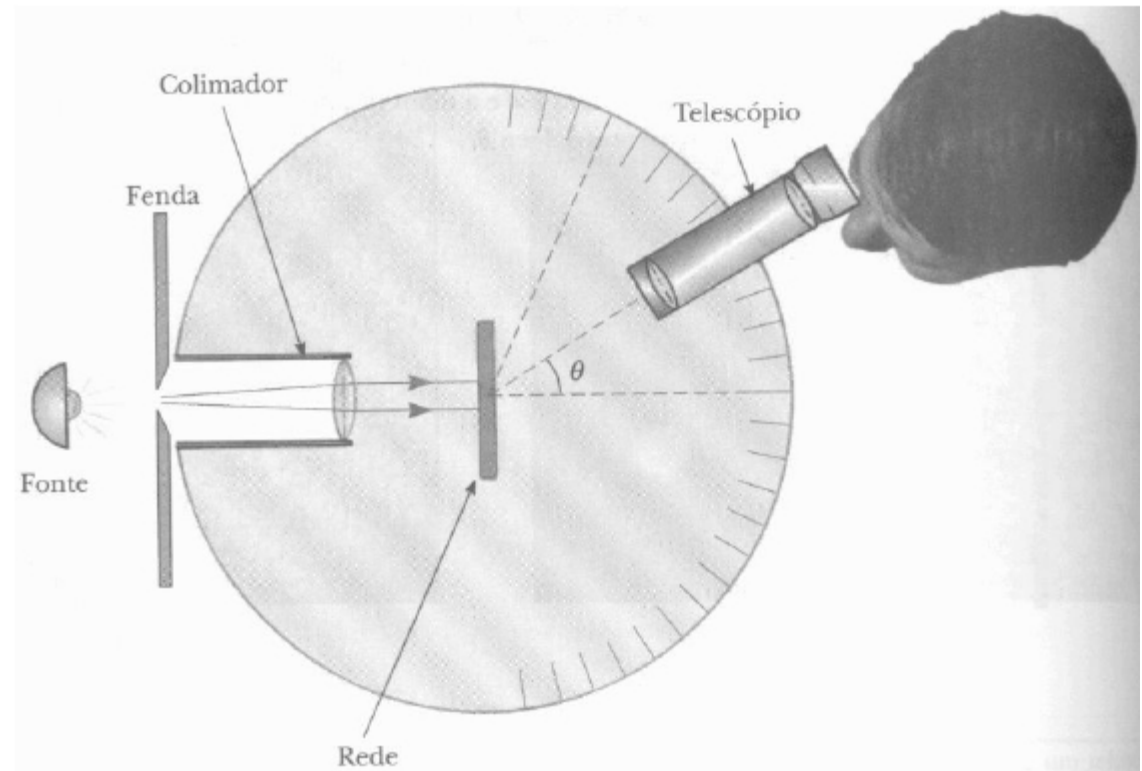


Pode ser utilizada para determinar um  $\lambda$  desconhecido a partir do  $\theta$ .

Pode ser utilizada para determinar um  $\lambda$  desconhecido a partir do  $\theta$  :

$$d \operatorname{sen} \theta = m \lambda$$

Espectrômetro de Rede de Difração



37.22 Linhas de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível, até a quarta ordem. Observe que as linhas são mais afastadas para g

# Largura das Linhas

Verificamos no estudo da difração por uma fenda que a posição do primeiro mínimo é dada por:

$$\lambda = a \operatorname{sen}\theta$$

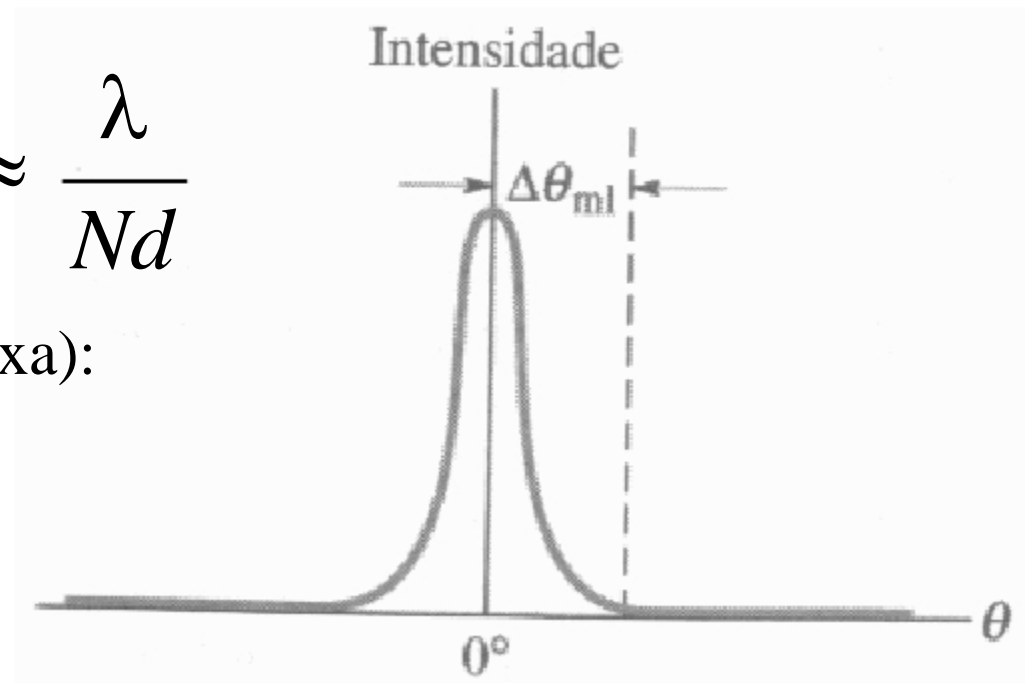
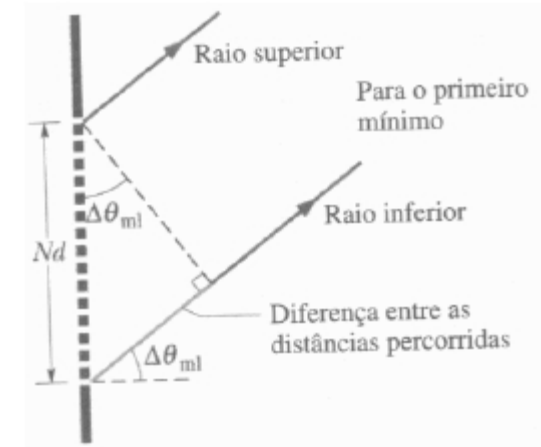
Para determinarmos a *meia largura* da linha central,  $a = Nd$  basta fazermos

$$Nd \operatorname{sen}\Delta\theta_{ml}^0 = \lambda$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{ml}^0 \approx \frac{\lambda}{Nd}$$

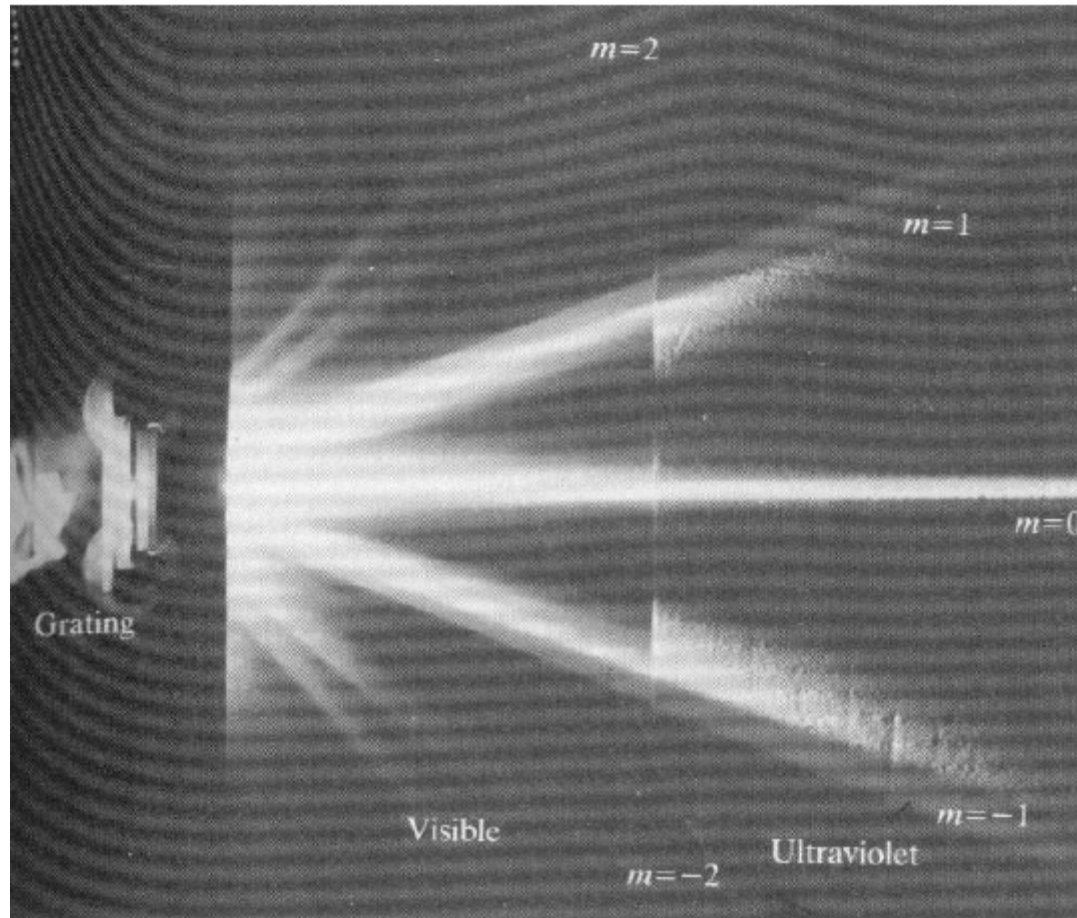
Para um ângulo geral (prova anexa):

$$\Delta\theta_{ml}^\theta \approx \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$





# Redes de difração com resolução menor:





# Dispersão (D)

Dispersão é a separação das linhas de difração associadas aos comprimentos de onda que podem ser distinguidos pela rede de difração.

A dispersão numa rede de difração é definida por:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

onde  $\Delta\theta$  é separação angular entre duas linhas que diferem de  $\Delta\lambda$  .

Vimos que  $\lambda = \frac{d \operatorname{sen}\theta}{m}$  portanto  $\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d}{m} \operatorname{cos}\theta$

Logo, temos:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \operatorname{cos}\theta}$$

# Resolução (R)

Para distinguir linhas com  $\lambda$  próximos, é necessário que as larguras das linhas correspondentes sejam tão pequenas quanto possível. A rede de difração deve ter, então, um alto poder de Resolução R, definida por:

$$R = \frac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda}$$

onde  $\Delta\lambda$  é a menor diferença de comprimento de onda que pode ser resolvido e  $\lambda_{med}$  é o comprimento de onda médio.

Vimos que o menor ângulo que pode ser resolvido é:  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$

Substituindo este valor na eq. da dispersão:  $d \cos \theta \Delta\theta = m \Delta\lambda$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \frac{1}{\Delta\lambda}$$

Assim, temos:

$$R = \frac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda} = Nm$$

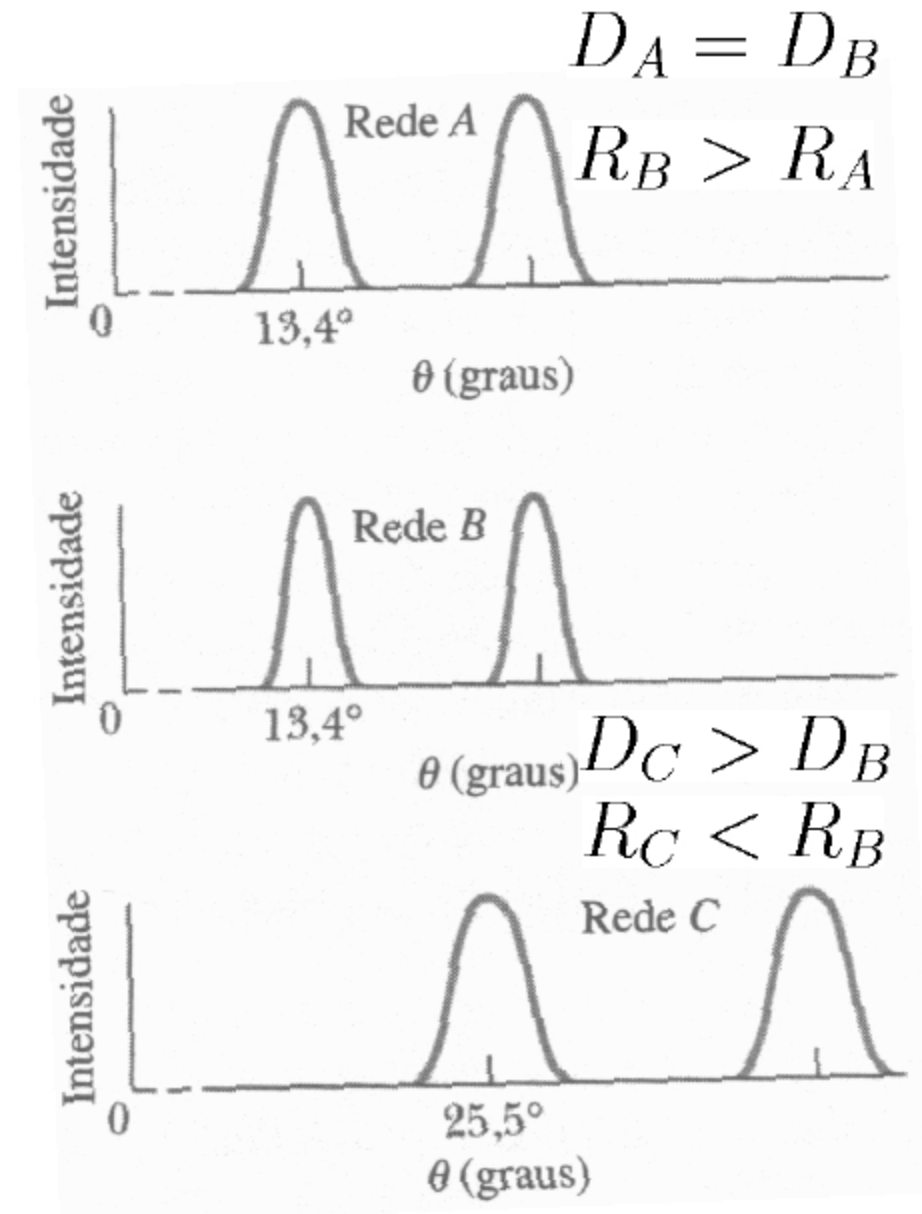
# Dispersão x Resolução (Exemplo)

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos\theta}$$

A dispersão melhora com a diminuição de  $d$

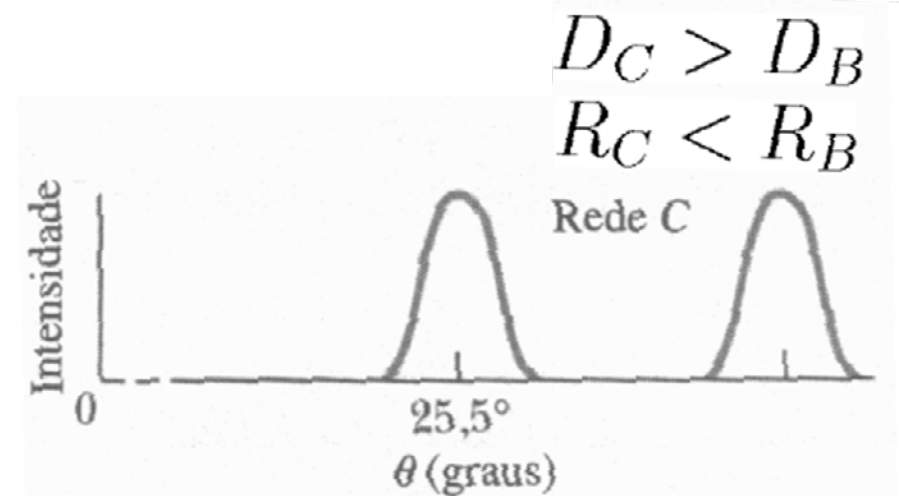
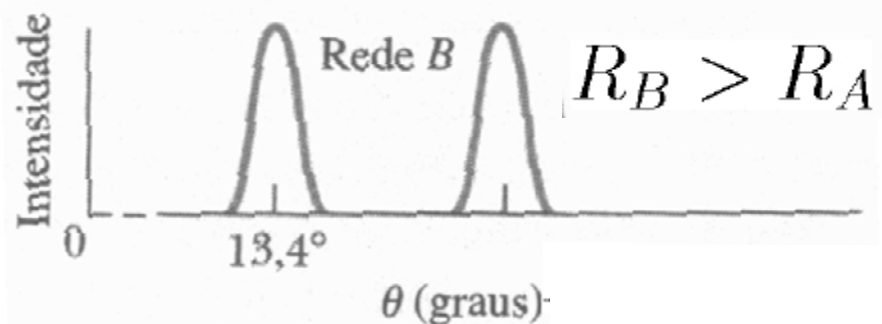
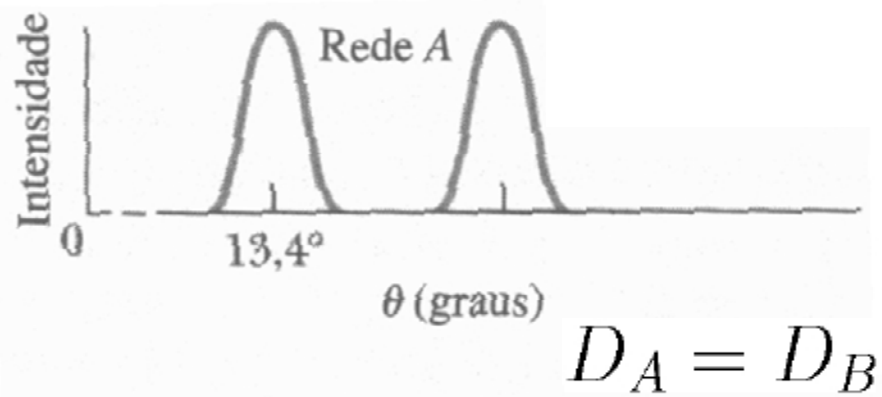
$$R = \frac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda} = Nm$$

Resolução aumenta com  $N$ , número de ranhuras

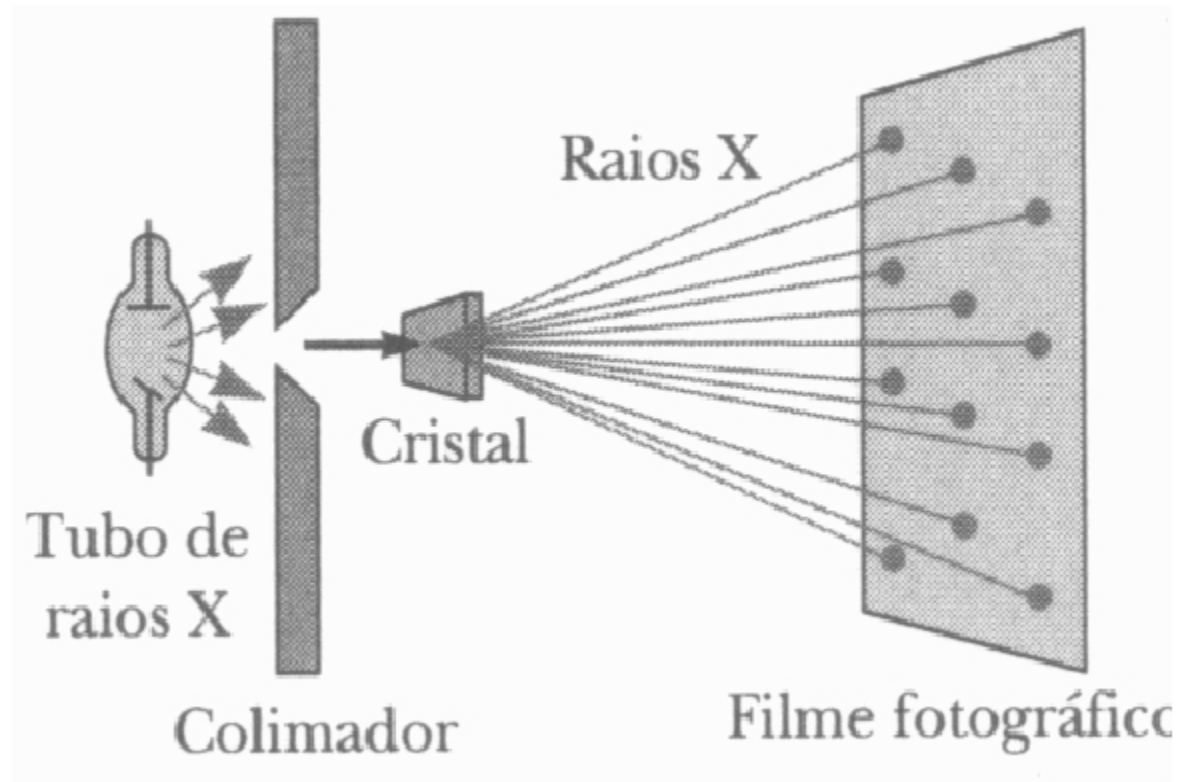


# Dispersão x Resolução (Exemplo)

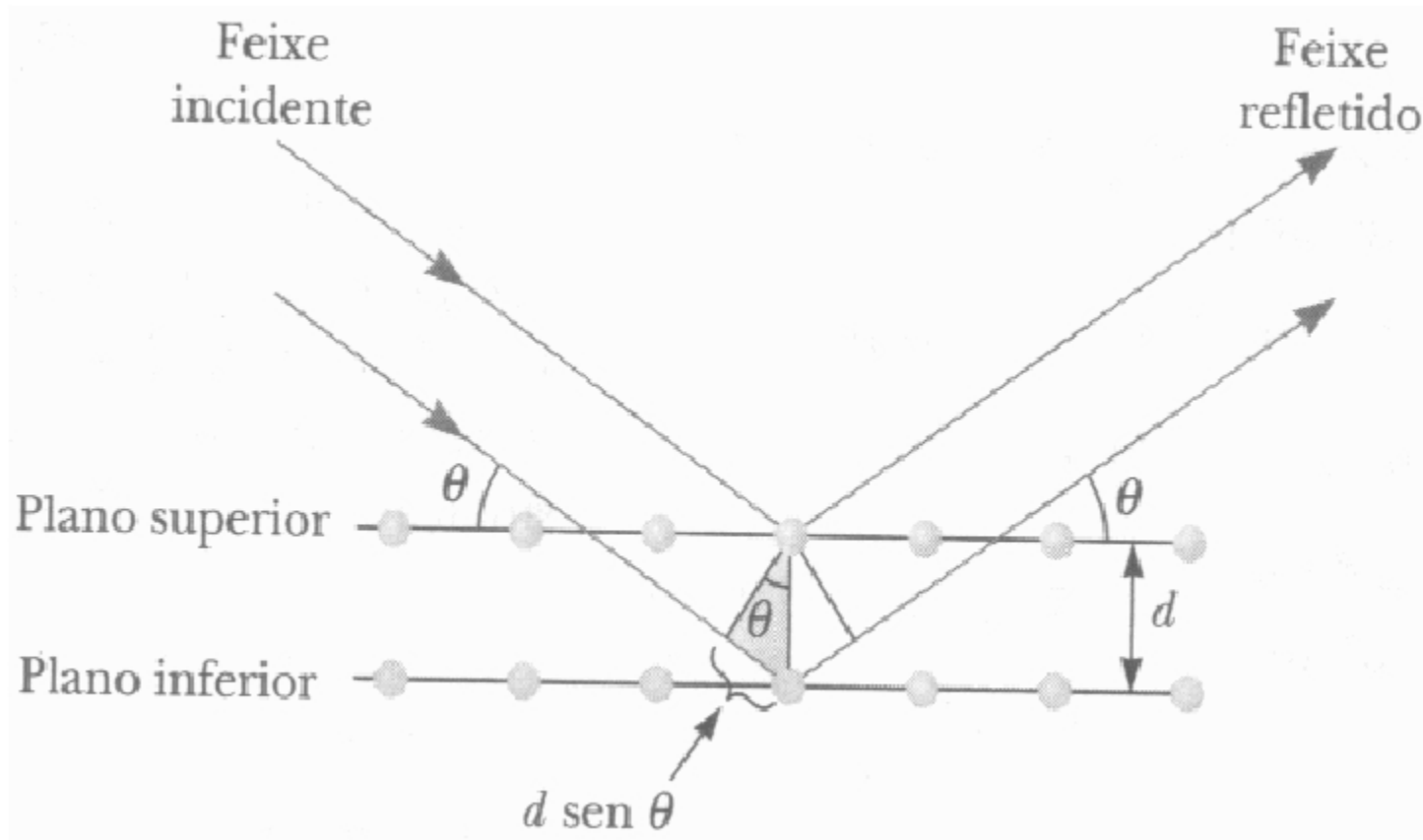
REDE	N	d (nm)	$\theta$	D ( $^{\circ}/\mu\text{m}$ )	R
A	10.000	2.540	13,4 $^{\circ}$	23,2	10.000
B	20.000	2.540	13,4 $^{\circ}$	23,2	20.000
C	10.000	1.370	25,5 $^{\circ}$	46,3	10.000



# Difração de Raio X por Cristais



O comprimento de onda dos Raios X é da ordem do espaçamento atômico em cristais,  $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ .

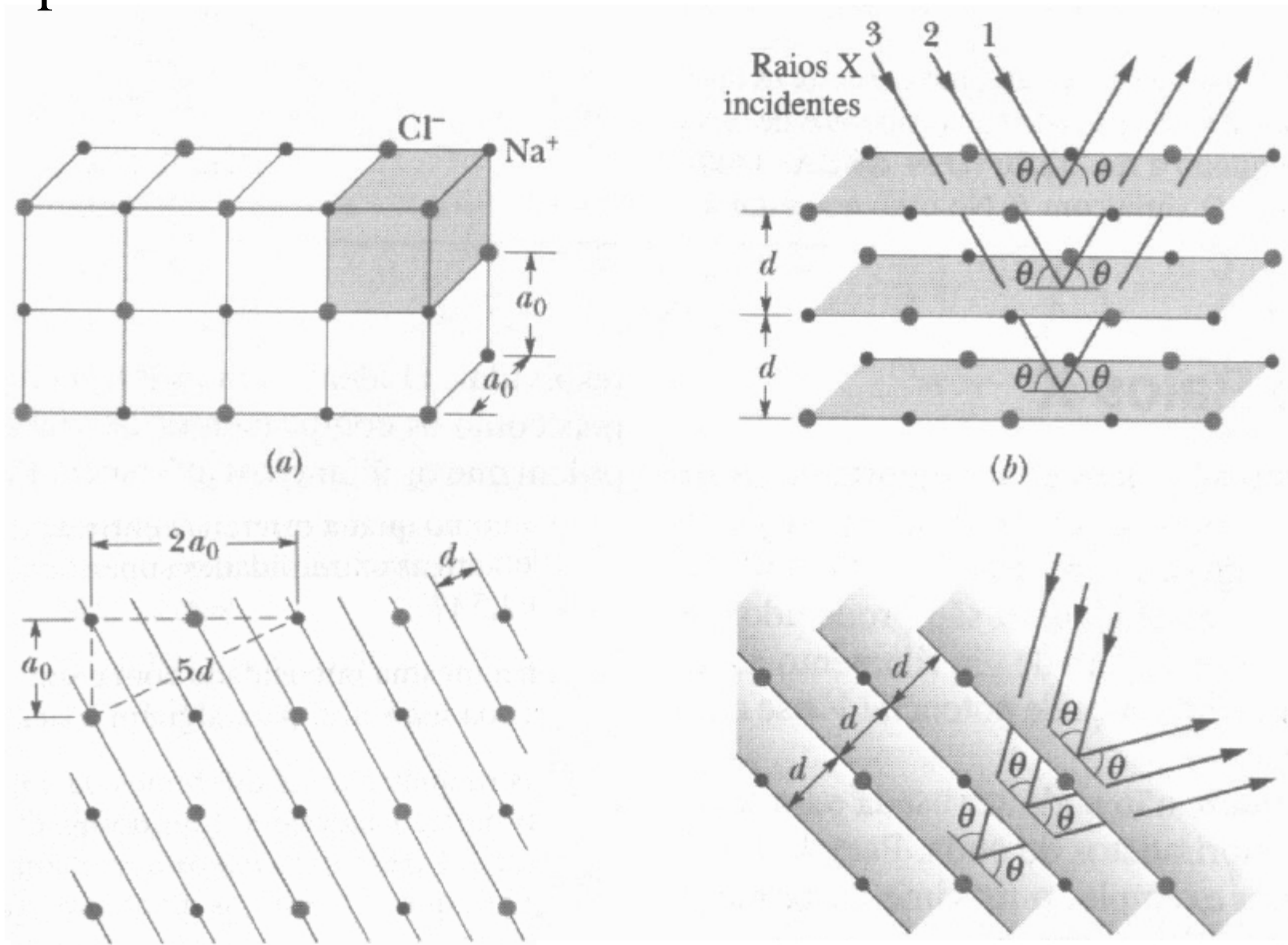


Temos interferências construtivas quando:

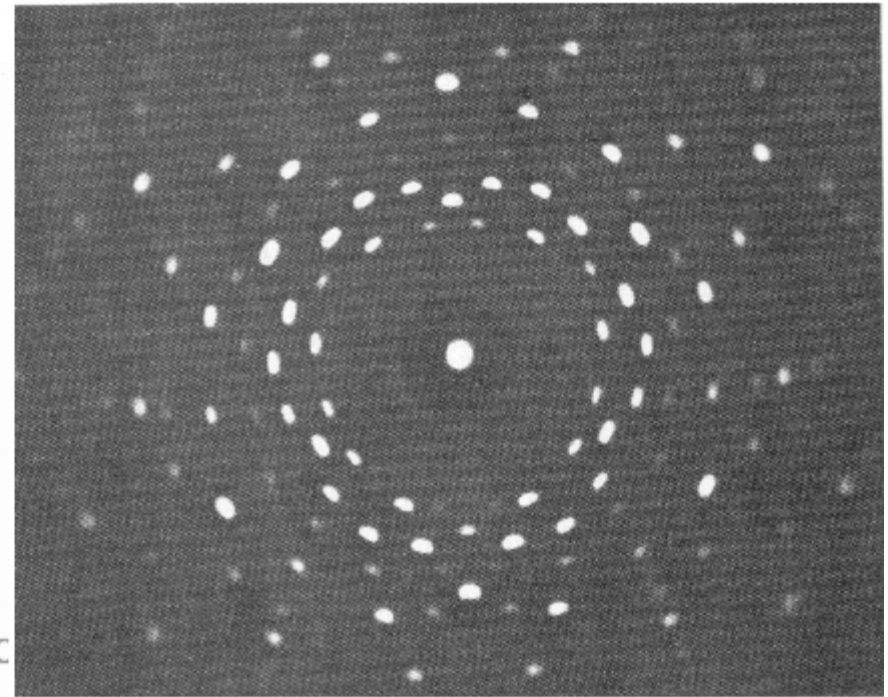
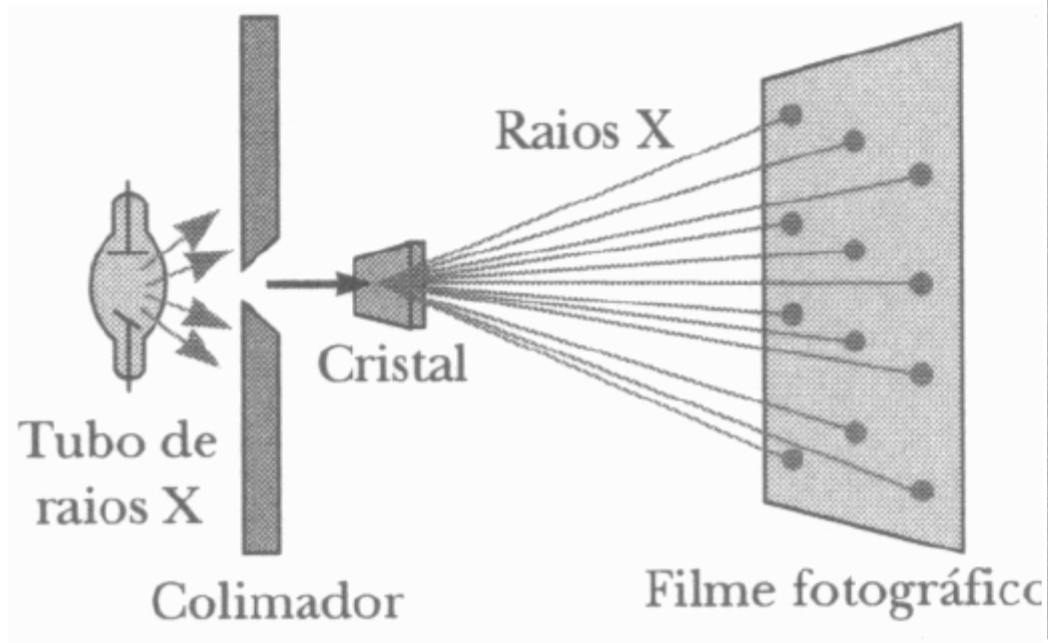
$$2d \text{ sen } \theta = m\lambda \quad \textit{Lei de Bragg}$$

$(m = 1, 2, 3...)$

Porém, para qualquer ângulo de incidência, temos vários planos de reflexão.

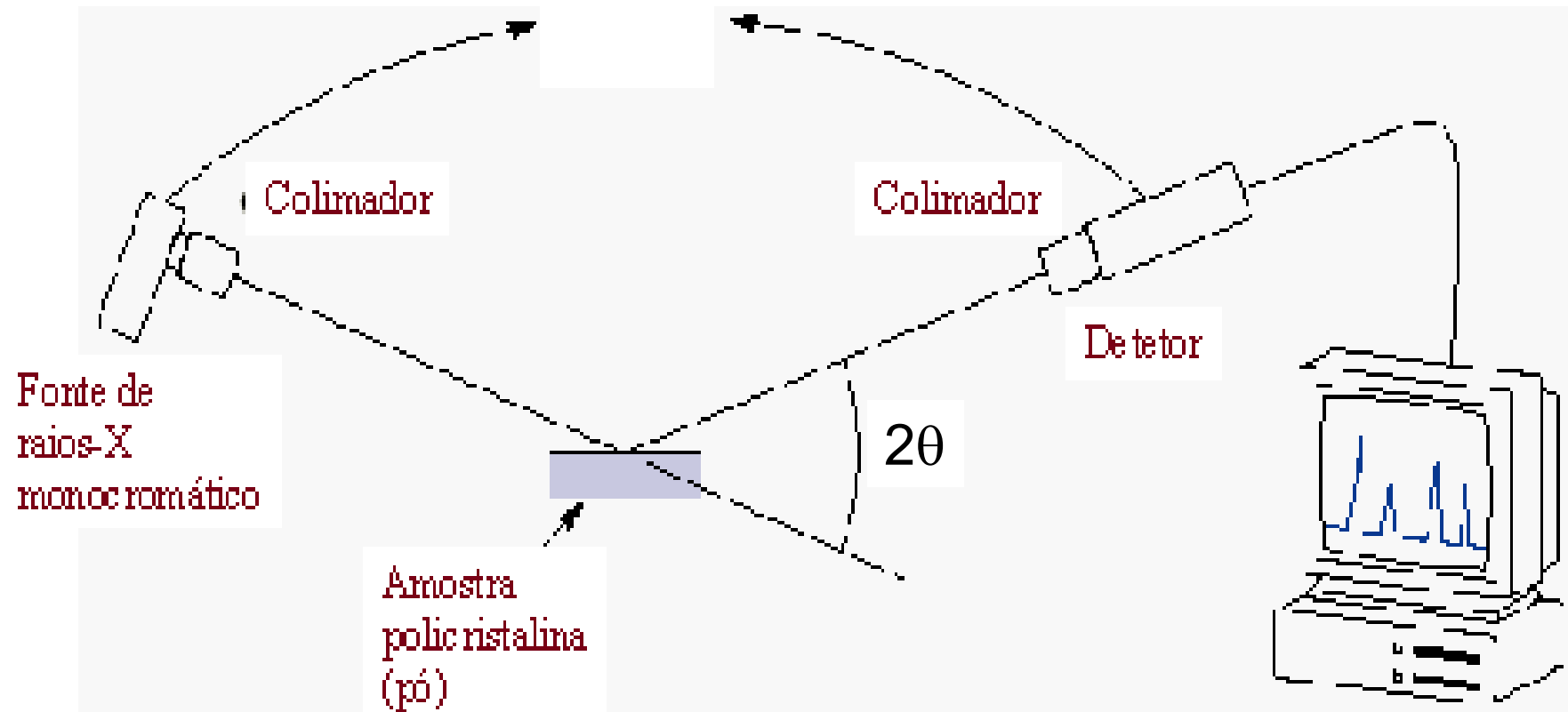


Assim, temos uma figura de difração complexa.





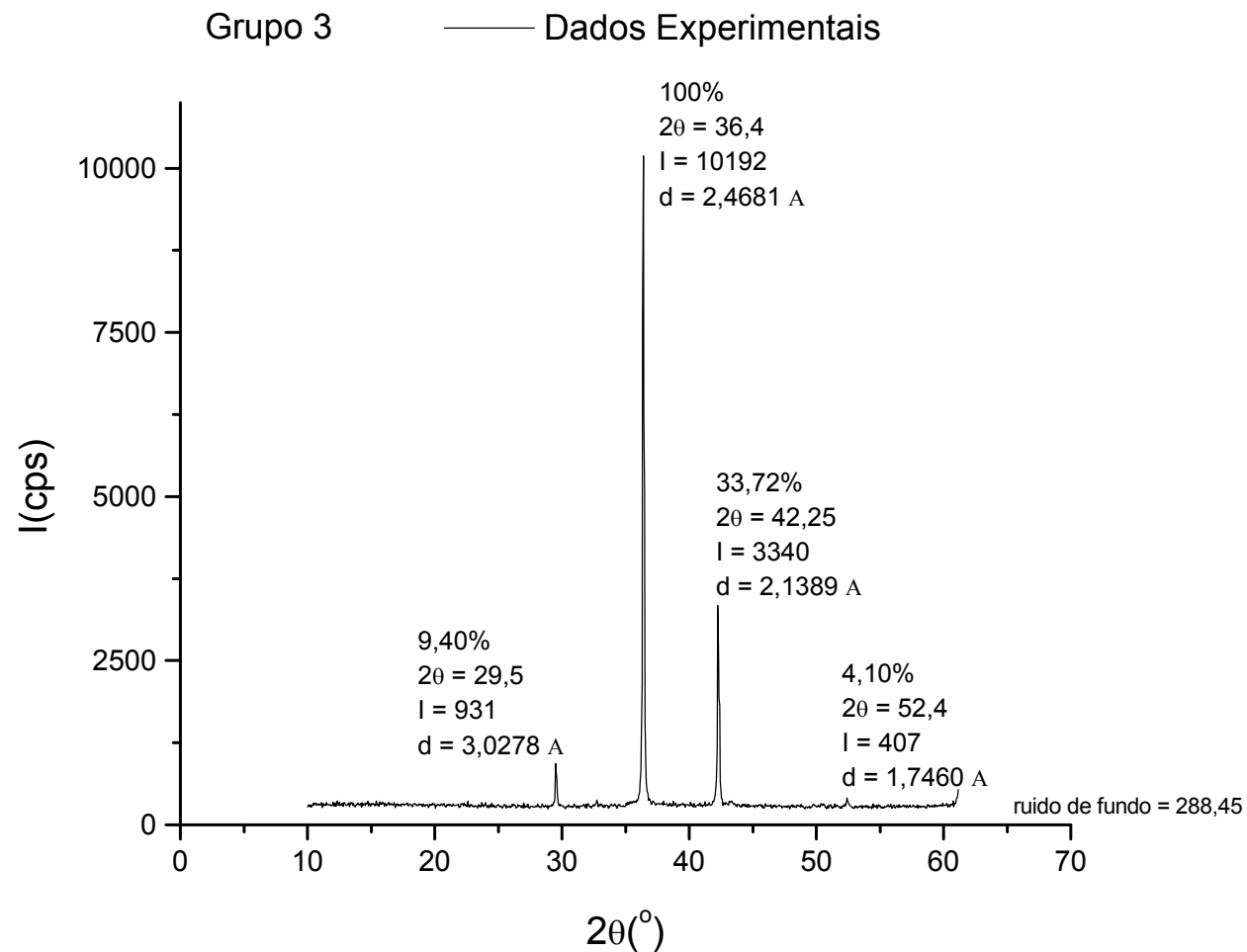
# Técnica da Difração de Raios X (DRX)



# Análise dos dados de DRX

- Gráfico *Intensidade x 2θ*


Calcula-se os dados: distância interplanar (*d*) e a intensidade relativa para cada reflexão



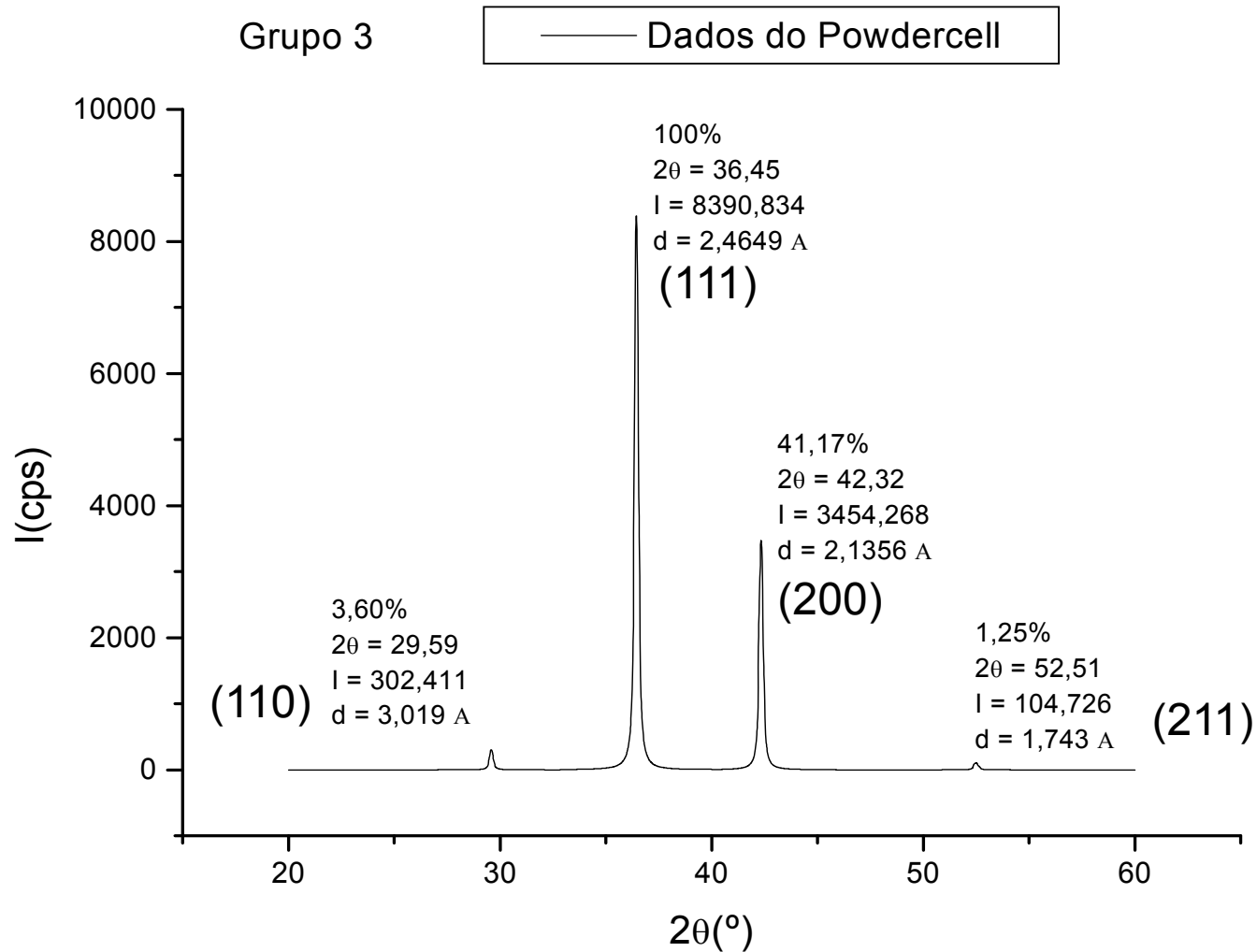
# Análise dos dados de DRX

- A partir do conjunto de distâncias interplanares e intensidades relativas dos picos, identifica-se o composto pelo Método Hanawalt. Em seguida consulta-se o arquivo referente ao composto.

5 - 667

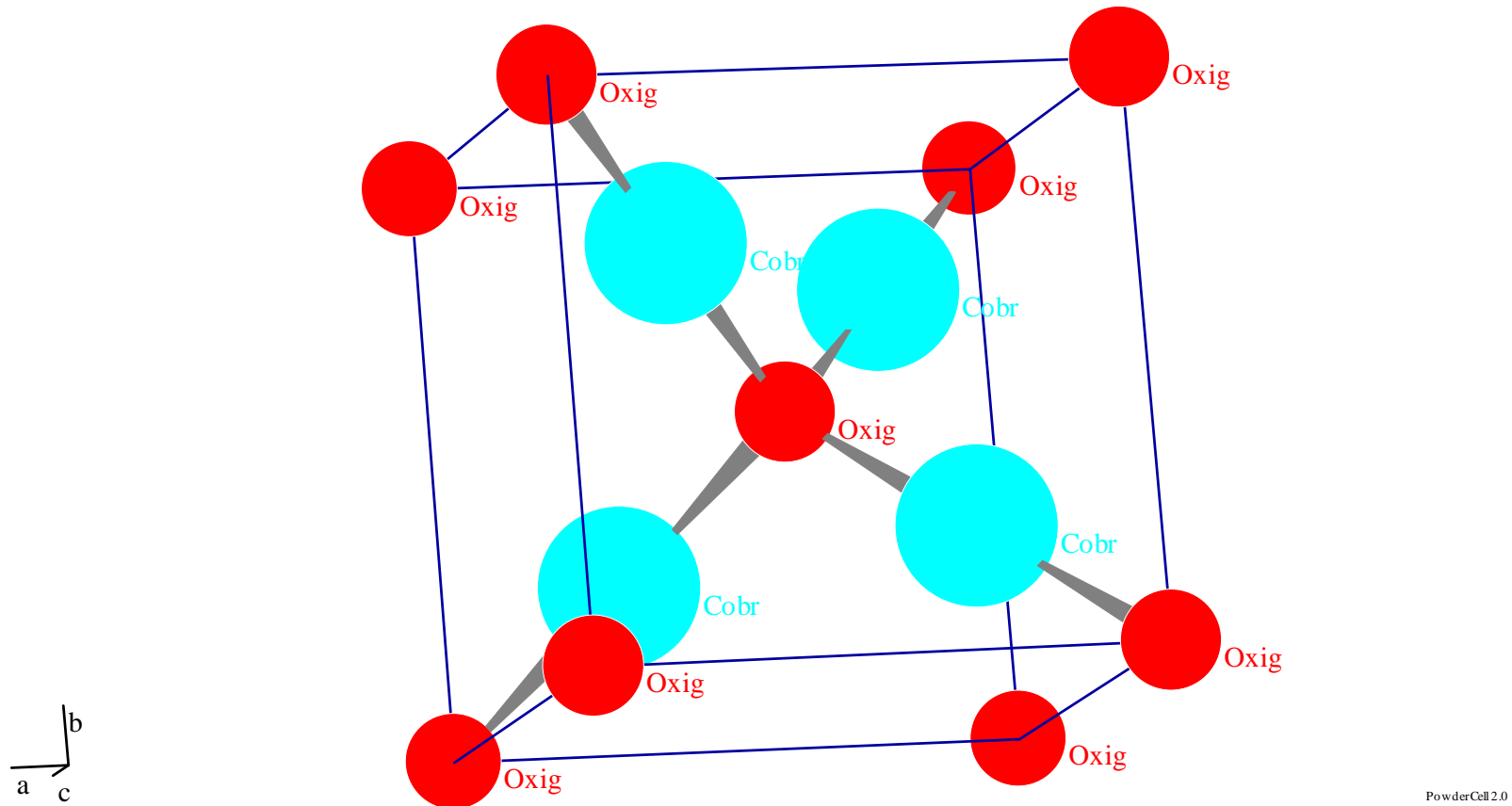
d	2.47	2.14	1.51	3.02	(Cu <sub>2</sub> O) <u>6C</u> 					
I/I <sub>1</sub>	100	37	27	9	Copper Oxide			(Cuprite)		
Rad. CuKα <sub>1</sub> λ 1.5405 Filter Ni Dia. Cut off I/I <sub>1</sub> Diffractometer I/I Ref. Swanson and Fuyat, NBS Circular 539, Vol. II, 23 (1953)					d Å	I/I <sub>1</sub>	hkl	d Å	I/I <sub>1</sub>	hkl
Sys. Cubic S.G. Pn3m (224)					3.020	9	110			
a <sub>0</sub> 4.2696 b <sub>0</sub> c <sub>0</sub> A C α β γ Z 2 Dx 6.100					2.465	100	111			
Ref. Ibid.					2.135	37	200			
					1.743	1	211			
					1.510	27	220			
					1.287	17	311			
					1.233	4	222			
					1.0674	2	400			
					0.9795	4	331			
εα nωβ εγ Sign 2V D mp Color Red					.9548	3	420			
Ref. Ibid.					.8715	3	422			
					.8216	3	511			
Sample prepared at the NBS by sintering CuCl and Na <sub>2</sub> CO <sub>2</sub> at ~800°C, then leaching with water and drying. Spect. analysis: <1% Ca, Si; <0.1% Al, Mg; <0.01% Ag, B, Ba, Fe, Ti; <0.001% Mn, Pb, Sn. X-ray pattern at 26°C. Merck Index, 8th Ed., p. 303.										

# Software de Auxílio



- **Gráfico Intensidade x 2θ, sem ruído de fundo.**

# Software de Auxílio



- **Visualização da estrutura cristalina da amostra estudada.**

# **EXERCÍCIOS SUGERIDOS**

Prob. 1:

Uma luz de comprimento de onda 500 nm incide normalmente sobre uma rede de difração. Se o máximo de terceira ordem do padrão de difração é observado a  $32,0^\circ$ , (a) Qual é o número de linhas por centímetro da rede? (b) Determine o número total de máximos primários que podem ser observados nessa situação.

Prob. 3:

O iodeto de potássio (KI) tem a mesma estrutura cristalina do NaCl, com planos atômicos separados por 0,353 nm. Um feixe de raio X monocromático mostra um máximo de difração de primeira ordem quando o ângulo rasante é  $7,60^\circ$ . Calcule o comprimento de onda do raio X.

Prob. 2:

O Arranjo de Longa Base ou *Very Large Array* (VLA) é um conjunto de 27 antenas de radiotelescópio nos condados de Caton e Socorro, no Novo México, Estados Unidos (Figura P27.52). As antenas podem afastar-se sobre trilhos de estrada de ferro e seus sinais combinados geram um poder de resolução de uma abertura sintética de 36,0 km de diâmetro. (a) Se os detectores forem sintonizados em uma frequência de 1,40 GHz, qual é a resolução angular do VLA? (b) Nuvens de hidrogênio irradiam nessa frequência. Qual deve ser a distância de separação entre duas nuvens no centro da galáxia, a 26 000 anos luz de distância, para elas estarem resolvidas? (c) Enquanto o telescópio olha para cima, um falcão que está circulando por ali olha para baixo. Para comparação, encontre a resolução angular do olho do falcão. Suponha que ele é mais sensível à luz verde com um comprimento de onda de 500 nm e que ele tem uma pupila com 12,0 mm de diâmetro. (d) Um rato está no solo, 30,0 m abaixo. Os bigodes do rato têm de estar separados por qual distância para que o falcão consiga distingui-los?



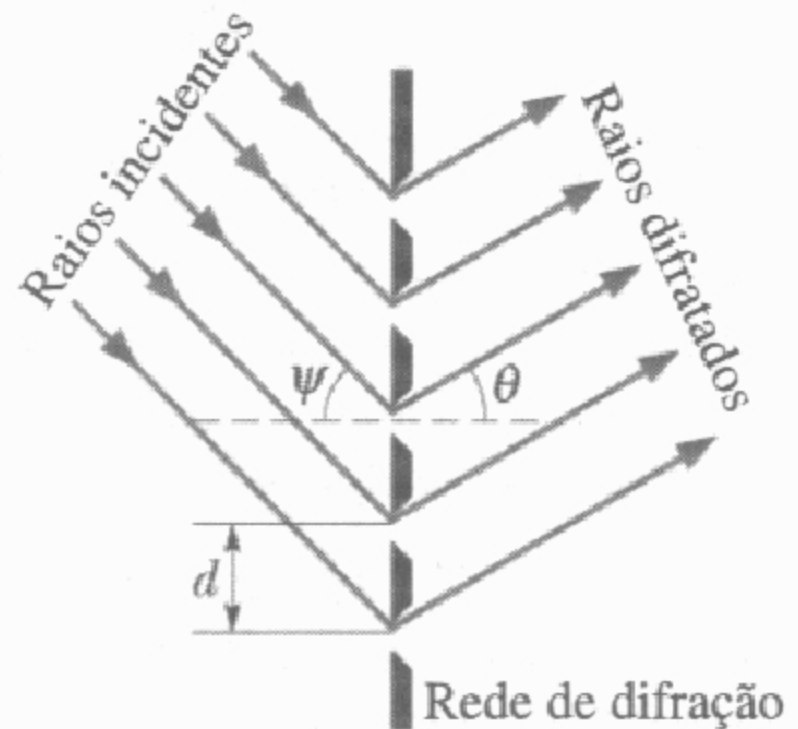
### Prob. 4:

**41P.** Uma onda luminosa incide obliquamente em uma rede de difração, como na Fig. 37.37. Mostre que as linhas claras ocorrem para ângulos  $\theta$  que satisfazem a equação

$$d(\sin \psi + \sin \theta) = m\lambda,$$

para  $m = 0, 1, 2, \dots$

onde  $\psi$  é o ângulo de incidência. (Compare esta equação com a Eq. 37.22.) Apenas o caso especial em que  $\psi = 0$  foi tratado até agora neste capítulo.



**Fig. 37.37** Problema 41.

### Prob. 5:

**29P.** (a) Em um experimento de duas fendas, qual deve ser a razão entre  $d$  e  $a$  para que a quarta franja lateral clara seja eliminada? (b) Que outras franjas claras serão também eliminadas?

## Prob.6:

Uma linha espectral com comprimento de onda de  $4750 \text{ \AA}$  é na verdade um dubleto, de separação  $0,043 \text{ \AA}$ .

- (a) Qual é o menor número de linhas que uma rede de difração precisa ter para separar esse dubleto no espectro de segunda ordem?
- (b) Se a rede tem  $10 \text{ cm}$  de comprimento, determine a direção em que será observada a linha deste espectro.
- (c) Qual será a separação angular entre estas duas linhas?

$\theta$