UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena-EEL

LISTA AULA 10: Cálculo III INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**:3 de novembro de 2015.

1. Considere a parametrização $\sigma(u,v) = (2(u+v), 3(u-v), 4uv) \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

   a. Qual é a superfície determinada por σ?

   b. Determine a equação do plano tangente a superfície no ponto $(2,-3,0)$.

2. Considere a parametrização $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2) \quad (u,v) \in [0,10] \times [0,2\pi]$

   a. Qual é a superfície determinada por σ?

   b. Determine a equação do plano tangente a superfície no ponto $(0,1,1)$.

3. Se S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ calcule
$$\iint_S x^2 \mathrm{d}S$$

4. Se S é a superfície $z = x + y^2$ $x \in [0,1]$ e $y \in [0,2]$ calcule
$$\iint_S y \mathrm{d}S$$

5. Determine a área da parte do plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ compreendida no primeiro oitante. Rta:$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

6. Calcule a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está dentro da superfície $x^2 + y^2 = 5x$. Rta:$50(\pi - 2)$.

7. Calcule a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ que esta dentro do cone $z^2 = x^2 + y^2, \quad z \leq 0, \quad a \geq 0$. Rta: $(2-\sqrt{2})2a^2\pi$.

8. Calcule o momento de inercia em relação ao eixo y da superfície que é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$, se a densidade é constante e igual a $1\frac{gr}{cm^3}$

9. Calcule a área da parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ que está abaixo do plano $x + y + z = 2a$, $a \geq 0$. Rta:$4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2$.

10. Calcular a massa de uma lamina triangular que tem o formato da porção do plano $x + y + z = 1$ que esta no primeiro oitante, se sabemos que a densidade no ponto (x,y,z) da lamina é proporcional a distância do ponto à origem e sendo que no ponto $(0,0,1)$ é igual a 1. Rta:$\frac{\sqrt{3}}{4}$

11. Calcule a densidade média da lamina do item anterior. Rta:$\frac{1}{2}$.

12. Calcule a massa de uma lamina que tem formato igual a parte superior da superfície $z = 2 - x^2 - y^2$ $z \geq 0$, se sabemos que a densidade da superfície em cada ponto $(x, y, z) \in S$ é proporcional ao quadrado da distância até o eixo z e no ponto $(1, 0, 1)$ é $2\frac{gr}{cm^3}$. Rta:$\frac{149\pi}{15}$

13. Calcule a densidade média da lamina do item anterior. Rta:$\frac{1}{2}$.

14. calcule a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está no primeiro octante e entre os planos $z = 3$, $z = 4$, $y = \sqrt{3}x$ e $x = \sqrt{3}y$. Rta:$\frac{5\pi}{6}$.

15. Calcule o centro de massa da superfície parabólica $\sigma : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida sobre $K = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ e dada pela equação $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ incluindo a "tampa", sabendo que o corpo é de densidade constante igual a 2. Rta:$(0, 0, \frac{1}{50}(9\sqrt{5} + 16))$.

16. Calcule o fluxo do campo F sobre a superfície S se:

    a. $F(x, y, z) = (y, x, z)$ e S é a fronteira da região sólida limitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$.

    b. $F(x, y, z) = (z, y, x)$ e S é a esfera unitária com centro na origem.

    c. $F(x, y, z) = (y^2, -y, xyz)$ e S é o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$(superfície lateral). Rta:-16π

17. Se $\delta(x, y, z) = 5$ representa a densidade em cada ponto (x, y, z) da superfície $\mathcal{S}$ determinada pela equação $|x| + |y| + |z| = 1$ que esta no primeiro octante, calcule a massa e a área de $\mathcal{S}$.

18. calcular o fluxo do campo constante $F(x, y, z) = (\alpha, \beta, \delta)$ através do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con normal apontando para fora de duas maneiras diferentes: uma usando a definição de fluxo e outra usando o teorema da divergência.

19. Prove que o fluxo do campo $F(x, y, z) = c(x, y, z)$, $c \geq 0$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ é $3c$ veces o volume da esfera.