UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena-EEL

LISTA AULA 1: ÁLGEBRA LINEAR OPERAÇÕES COM MATRIZES

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**:10 de agosto de 2015

1. Considere as Matrizes
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$
e $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Calcule as operações indicadas sempre que for possível e se não for possível explique porque:

   $A + 2D$, $2D - 5A$, $(I_2 - A)^2$, $B - C$, $B - C^T$, AB, B^2 e $DA - AD$.

2. De um exemplo de uma matriz não nula e de ordem 3 tal que $A^2 = 0$

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine uma formula para A^n

4. Seja $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Prove que $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ e conjecture uma regra para A^n.

5. Prove que o produto de matrizes quadradas e triangulares superior é triangular superior.

6. Considere as matrizes $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Calcule PQ, QP e P^2

   b. De 4 exemplos distintos de matrizes de ordem 3 tais que $M^2 = I_3$

7. Determine uma maneira criativa de multiplicar as matizes

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Calcule A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 e A^7

   b. Calcule A^{2001}, justifique sua resposta.

9. Suponha que A e B são matrizes de ordem n, Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. justifique sua resposta com uma prova caso seja verdadeira e com um contra-exemplo se for falsa.

   a. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   b. $(AB)^2 = A^2B^2$.

   c. Se A e B são simétricas então $A+B$ é simétrica.

   d. Se A e B são simétricas então AB é simétrica.

   e. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

10. Suponha que A e B são matrizes (não necessariamente quadradas), Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justifique sua resposta com uma prova caso seja verdadeira e com um contra-exemplo se for falsa.

   a. Se A^2 está bem definida, então A é quadráda.

   b. Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadrádas.

   c. Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadrádas.

   d. Se $AB = B$ então $A = I$

   e. Se Se $AB = A$ e $BA = B$ então $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

   f. Se $AC = CB$ então A e B são quadrádas.

   g. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

   h. AA^T é uma matriz simétrica