UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena-EEL

LISTA AULA 6: ÁLGEBRA LINEAR Mudança de Base e Transformações Lineares.

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**:23 de setembro de 2015

1. Se $B=\{(5,3,1),(1,-3,2),(1,2,1)\}$ e $E=\{(-2,1,0),(-1,3,0),(-2,-3,1)\}$ são bases de $\mathbb{R}^3$, calcule a matriz de Mudança de Base da base E para a base B. Se as coordenadas de um vetor v na base E são $v=(1,1,1)_E$, calcular as coordenadas do vetor v na base B.

2. Se $B=\{1,x,x^2,x^3\}$ e $E=\{x,-x^2,x^2-2,x^3-3\}$ são bases de $\mathbb{P}_3[x]$, calcule a matriz de Mudança de Base da base E para a base B. Se $p(x)=x^3-2x+1$, calcular as coordenadas do vetor $p(x)$ na base E.

3. Se $B=\{1,x,x^2,x^3\}$, $E=\{-1,2x^2,-x+1,x^3+x^2\}$ e $F=\{\pi,x-\pi,x^2+\pi^2-x+\pi,\pi x^3\}$ são bases de $\mathbb{P}_3[x]$, calcule a matriz de Mudança de Base da base E para a base B, de F para E. Determine as coordenadas dos vetores $1,x,x^2,(x-1)(x-2)$ e $(x^2+\pi x)(1-2x)$ nas bases F e E.

4. Se $B=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$ e $E=\{u_1,u_2,u_3\}$ são bases de $\mathbb{R}^3$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz de mudança da base B para a base E, calcular os vetores da base E.

5. Se $B=\{(1,0,-1),(-1,1,0),(1,1,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ e $v=(6,-3,2)\in\mathbb{R}^3$ calcular as coordenadas de v na base B. Se $w=(6,-3,2)_B$, calcular w na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

6. Determine quais das seguintes funções sao transfotmações lineares e quais não, se for prove e se não for justifique porque.

   a. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(1+x,y)$.
   b. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x+y+z,1)$.
   c. $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $T(x)=(1,-1)$.
   d. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x-y,0)$.
   e. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x^2,y)$.
   f. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(2x-y,x)$.
   g. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(xy,y,x)$.
   h. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(\sin x,y)$.

7. Existe alguma transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,0)=(1,0)$ e $T(1,1,1)=(0,1)$? se sim dé uma expressão para T.

8. Se $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma transformaão linear e $T(3)=-4$ calcule $T(-7)$.

9. Se $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é uma transformaão linear, $T(1,1)=3$ e $T(1,0)=4$ calcule $T(5,3)$.

10. Seja $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ dada por $S(x,y,z,w)=(0,x,y,z)$. Verifique que S é uma Transformação linear e calcule $S^2=S\circ S$, S^3, S^4 e S^{2015}.

11. Se $S,T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são definidas por $S(x,y,z)=(y,z,x)$ e $T(x,y,z)=(x+y+z,0,0)$, provar que S e T são transformações lineares e calcular $S+T$ e $S\circ T$.

12. A função $P(x,y,z)=(x,y,0)$ projeta todo vetor do espaço no plano xy. Prove que P é uma transformação linear e $P^2=P\circ P=P$.

13. Seja $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $S(x,y,z)=\dfrac{1}{3}(x-2y-2z,-2x+y-2z,-2x-2y+z)$.

    a. Prove que S é uma transformação linear.

    b. Prove que $S(x,y,z)=(x,y,z)$ para todo $(x,y,z)\in\Pi=\{(x,y,z):x+y+z=0\}$.

    c. Calcule $S(1,1,1)$ e Prove que $||S(x,y,z)||=||(x,y,z)||$.

    d. Prove que $S\circ S=I$ e conclua de todos os itens acima que S é uma reflexão em relação ao plano Π.

14. Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. Provar que a projeção sobre $\vec{u}$ $\text{proj}_{\vec{u}}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$ é uma transformação linear e satisfaz $\text{proj}^2_{\vec{u}}=\text{proj}_{\vec{u}}\circ\text{proj}_{\vec{u}}=I$.

15. Se $S,T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ são definidas por $S(x,y,z)=(y-2x,x+y)$ e $T(x,y,z)=(x-y,2x+y)$

    a. Provar que S e T são transformações lineares

    b. Calcular $S\circ T(1,0),T\circ S(1,0),S+T(1,0),S\circ S(1,0),T\circ T(1,0)$ e $2T-S(1,0)$.

    c. S e T são conmutativos?

    d. Para quais vetores $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(1,0)$?

16. Seja $\mathcal{M}_n$ é o espaço vetorial das matrizes de ordem n e $B\in\mathcal{M}_n$. Se $T:\mathcal{M}_n\to\mathcal{M}_n$ é definida por $T(A)=AB-BA$, prove que T é uma transformação linear.

17. Se $A\in\mathcal{M}_n$ podemos definir uma transformação linear $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ como $T_A(X)=AX^T$. Prove que T é uma transformação linear.

18. Um caso particular de uma transformação linear como a do item anterior são as rotações no plano. Uma rotação por um ângulo θ do plano é a transformação linear $R_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$R_\theta(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

    a. Calcule $R_{\frac{\pi}{3}}(1,0)$, $R_{\frac{\pi}{2}}(1,0)$, $R_{\frac{5\pi}{6}}(1,0)$ e $R_{\frac{\pi}{3}}\circ R_{\frac{\pi}{2}}(1,0)$.

    b. Prove que $R_\theta\circ R_\delta=R_\delta\circ R_\theta=R_{\theta+\delta}$.