LISTA AULA 4: ÁLGEBRA LINEAR BASES E COORDENADAS RELATIVAS À BASE.

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**:15 de setembro de 2015

1. O conjunto $B = \{x + x^3, 1 + x^2\}$ é linearmente independente em $\mathbb{P}_3[x]$? Se sim, $B = \{x + x^3, 1 + x^2\}$ é uma base de $\mathbb{P}_3[x]$? qual é a dimensão do subespaço gerado por B?

2. Determine se o vetor $p(x) = 1 + x - 2x^2 + 4x^3 \in \mathbb{P}_3[x]$ pertence ao subeespaço gerado pelos vetores $1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3$. se sim, escreva $p(x)$ como combinação linear dos vetores de $B = \{1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$. B é uma base de $\mathbb{P}_3[x]$?

3. Seja (a, b) um vetor em $\mathbb{R}^2$.

   a. Quais são as coordenadas de (a, b) na base $E = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

   (a) Quais são as coordenadas de (a, b) na base $F = \{(1, 0), (0, 2)\}$.

   (b) Quais são as coordenadas de (a, b) na base $B = \{(1, 1), (-1, 2)\}$.

4. Seja $\mathcal{A} = \{p(x) \in \mathbb{P}_3[x] : p(x) = x^4 p\left(\frac{1}{x}\right)\}$. Qual é a dimensão do subespaço gerado por $\mathcal{A}$?

5. Encontrar a dimensão do subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0, x + y + 2z = 0, 2x + y + z = 0\}.$$

   Interprete seu resultado geometricamente.

6. Encontrar uma base para o subespaço

$$\mathcal{S} = \left\{ (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

7. Determine uma base para o subespaço das matrizes simétricas de ordem 3.

8. Determine uma base para o subespaço das matrizes antisimétricas de ordem 3.

9. Determine uma base para o subespaço das matrizes simétricas de ordem n.

10. Determine uma base para o subespaço das matrizes antisimétricas de ordem n.

11. Se $\mathcal{S}$ é subespaço das matrizes simétricas e $\mathcal{A}$ é o subespaço das matrices antisimétricas Prove que $M_{n \times n} = \mathcal{S} + \mathcal{A}$. (isto é prove que toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma se uma matriz simétrica e outra antisimétrica).

12. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos por: $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ e $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$. Determine bases para estes subespaços e prove que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{C} + \mathcal{S}$. Quem é $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$?

13. Prove que os vetores 1, $t-1$ e $(t-1)^2$ formam uma base de $\mathbb{P}_2[x]$ e encontre as coordenadas do vetor $2t^2 - 5t + 6$ nesta base.

14. Considere a matriz 5×5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Aplicando oprerações entre linha, leve a matriz na sua forma escalonada reduzida.

   b. Se $\mathcal{W}$ é o espaço gerado pelas colunas de A, determine uma base para $\mathcal{W}$ (O item a. pode ajudar).

   c. Quais são os vetores $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ que estão em $\mathcal{W}$.

   d. Na base encontrada no item b. encontrar as coordenadas do vetor $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathcal{W}$.

   e. Se $\mathcal{V}$ é o espaço gerado pelas linhas de A, determine uma base para $\mathcal{V}$ (O item a. pode ajudar).

   f. compare o resultado do item b. com o resultado do item e.

   g. Descrever explicitamente o espaço vetorial das matrices coluna X de ordem 5×1 tais que $AX = 0$.

15. Fazer uma descrição explicita para os vetores $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ que são combinação linear dos vetores $(1,0,2,1,-1), (-1,2,-4,2,0), (2,-1,5,2,1)$ e $(2,1,3,5,2)$.