LISTA AULA 3: ÁLGEBRA LINEAR ESPAÇOS E SUBESPAÇOS VETORIAIS

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**:25 de agosto de 2015

1. A continuação são dadas no conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ duas operações $\maltese$ e $\diamond$. Determinar se $(\mathbb{R}^2, \maltese, \diamond)$ é um espaço vetorial, se a resposta for sim, prove que são satisfeitas todas as propriedades, caso contrario mostre com um exemplo qual propriedade não é válida.

   a. $(x_1,y_1) \maltese (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, $c \diamond (x,y) = (cx,y)$.

   b. $(x_1,y_1) \maltese (x_2,y_2) = (x_1-x_2, y_1-y_2)$, $c \diamond (x,y) = (-cx,-cy)$.

   c. $(x_1,y_1) \maltese (x_2,y_2) = (3y_1+3y_2, -x_1-x_2)$, $c \diamond (x,y) = (3cx,-cy)$.

2. Considere o Espaço euclidiano $\mathbb{R}^4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3,4\}$ com as operações de soma e produto por escalar usuais, isto é $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, $c.(x,y) = (cx,cy)$. Determine quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^5$ são subespaços de $(\mathbb{R}^4,+,.)$.(Se for subespaço prove, se não for explique porque).

   a. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_1 \leq 0\}$.

   b. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_1+3x_2 = x_3\}$.

   c. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_1^2 = x_2\}$.

   d. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_1x_2 = 0\}$.

   e. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^5 : x_4 \text{ é irracional}\}$.

3. Considere $\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ é contínua}\}$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas na reta. Quais dos seguintes subconjuntos são sub-espaços vetoriais de $\mathcal{C}$?(Se for subespaço prove, se não for explique porque).

   a. $S = \{f \in \mathcal{C} : f(x^2) = [f(x)]^2\}$.

   b. $S = \{f \in \mathcal{C} : f(0) = f(1)\}$.

   c. $S = \{f \in \mathcal{C} : f(3) = 1 + f(-5)\}$.

   d. $S = \{f \in \mathcal{C} : f(-1) = 0\}$.

   e. S é o conjunto das funções pares, isto é $S = \{f \in \mathcal{C} : f(-x) = f(x)\}$.

   f. $\mathcal{D}$ é o conjunto das funções diferenciáveis, isto é $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{C} : f'(x) \quad \text{existe}\}$

   g. S é o conjunto das funções que são solução da equação $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$

4. Considere $M_{n\times n}$ o espaço vetorial das matrizes quadrádas de ordem n com coeficientes reais com as operações usuais de soma e produto por escalar. Quais dos seguintes subconjuntos são sub-espaços vetoriais de $M_{n\times n}$?(Se for subespaço prove, se não for explique porque).

   a. S é o subconjunto das matrices que não são inversíveis, isto é $S = \{A \in M_{n\times n} : \text{NÃO EXISTE } A^{-1}\}$.
   b. S é o subconjunto das matrices que comutam com uma matriz fixa $C \in M$, isto é $S = \{A \in M_{n\times n} : AC = CA\}$.
   c. S é o subconjunto das matrices anti-simétricas, isto é $S = \{A \in M_{n\times n} : A^T = -A\}$.
   d. $S = \{A \in M_{n\times n} : A^2 = A\}$.
   e. $S = \{A \in M_{n\times n} : A^k = 0 \quad \text{para algum número natural k}\}$. Este conjunto é conhecido como o conjunto das matrizes nilpotentes.
   f. $S = \{A \in M_{n\times n} : A \quad \text{é uma matriz diagonal}\}$

5. Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é solução do sistema de equações lineares $AX = 0\}$, onde A é uma matriz quadráda de ordem 4. S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$?.(Se for subespaço prove, se não for explique porque).

6. Considere $\mathbb{P}[x]$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais na variável x com as operações usuais de soma e produto por escalar. Quais dos seguintes subconjuntos são sub-espaços vetoriais de $\mathbb{P}[x]$?(Se for subespaço prove, se não for explique porque).

   a. $\mathbb{P}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{P}[x] : grau\mathbb{P}[x] \leq n\}$.
   b. $S = \{p(x) \in \mathbb{P}[x] : grau\mathbb{P}[x] \geq n\}$.
   c. O conjunto de todos os polinômios que tém π como raiz, isto é $S = \{p(x) \in \mathbb{P}[x] : p(\pi) = 0\}$
   d. $S = \{p(x) \in \mathbb{P}[x] : p(\pi) = 1\}$

7. Sejam $E = \{(2x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $F = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

   a. E é um subespaço de $\mathbb{R}^2$? F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$?
   b. F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$? F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$?
   c. Determine $E \cap F$.
   d. Determine $E \cup F$. $E \cup F$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$?
   e. Determine $E + F = \{A + B : A \in E \quad \text{e} \quad B \in F\}$

8. Seja $U_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = k\}$ onde $k \in \mathbb{R}$ é fixo. Para que valores de k, U_k é um subespaço vetorial? De uma interpretação geométrica da resposta.