



1. Considere o modelo populacional dos pássaros fêmeas visto em sala de Aula e considere em que a taxa de sobrevivência dos adultos é  $\frac{1}{2}$ , a taxa de reprodução é 2 e a taxa de sobrevivência dos jovens é  $\frac{1}{3}$ .
  - a. Utilizando uma população inicial de 100 adultos e 60 jovens, calcule a população para os próximos anos.
  - b. A população será extinta? Ela vai se estabilizar? ou irá divergir? Explique.
  - c. Os resultados anteriores dependem da população inicial? explique.
  - d. No longo prazo, qual será a porcentagem do total de fêmeas da população formada por jovens?
2. Considere mais uma vez o modelo populacional dos pássaros fêmeas em que a taxa de sobrevivência dos adultos é  $\frac{3}{10}$ , a taxa de sobrevivência dos jovens é  $\frac{1}{3}$ , a taxa de reprodução é 2 e a população inicial é formada por 100 adultos e 50 jovens.

- a. Determine a matriz  $A$  tal que

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ j_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$$

- b. Encontre os auto-valores da matriz  $A$  obtida no item a. auto-vetores associados e uma matriz  $P$  que diagonalize  $A$ .
- c. Determine uma formula para  $V_k = \begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$  que dependa só de  $k$ .
- d. Utilize a formula encontrada no item anterior para calcular a polulação daqui a 5 anos.
- e. A população será extinta? Ela vai se estabilizar? ou irá divergir? Explique.
- f. Os resultados anteriores dependem da população inicial? explique.
- g. No longo prazo, qual será a porcentagem do total de fêmeas da população formada por jovens?

3. Considere mais uma vez o modelo populacional dos pássaros fêmeas em que a taxa de sobrevivência dos adultos é  $\frac{2}{5}$  e a taxa de reprodução é 4. Encontre  $\beta$ , o valor necessário para a taxa de sobrevivência dos jovens, para garantir que a população vai se estabilizar no longo prazo.



4. No modelo geral para estudar a população de pássaros suponha que a taxa de sobrevivência dos adultos é  $\alpha$  e a taxa de reprodução  $m$  são fixadas. Se  $\beta$  denota a taxa de sobrevivência dos jovens prove que:

- Se estabilizará se  $\beta = \frac{1 - \alpha}{m}$ .
- Se tornará extinta se  $\beta < \frac{1 - \alpha}{m}$ .
- Se tornará muito grande se  $\beta > \frac{1 - \alpha}{m}$ .

5. A população de uma espécie ameaçada de falcões e de seu predador natural, o rato do mato, originalmente com 30 falcões e 2000 ratos, é representada pelo seguinte modelo:

$$f_{k+1} = 0,55f_k + 0,005r_k$$

$$r_{k+1} = -1,8f_k + 1,2r_k$$

em que  $f_k$  e  $r_k$  representam as populações de falcões e ratos, respectivamente no ano  $k$ .

- Expresse o modelo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ r_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_k \\ r_k \end{bmatrix}$$

- Encontre os auto-valores de  $A$  e bases para os auto-espacos de cada auto-valor.
  - Diagonalize a matriz  $A$  e determine uma formula para  $f_k$  e  $r_k$ .
  - Prove que com o passar do tempo vai ter um equilíbrio nas populações.
  - Em 5 anos, biólogos tentaram melhorar a população de falcões introduzindo 1000 ratos na area de caça dos falcões. Preveja e compare a nova população de falcões para daqui a 10 anos.
  - A partir de tal ponto, a taxa de sobrevivência dos falcões cai para 0,5. Os biólogos estão preocupado que isso possa eliminar a população de falcões. Teste para ver o que o modelo está prevendo e explique o que esta acontecendo.
6. A produção anual de trigo em certo campo tem sido igual a media da produção nos dois anos anteriores. Se as produções em 1990 e 1991 foram 12 milhões de toneladas, respectivamente, determine uma formula para a produção  $k$  anos após de 1991. Qual será a produção média no longo praço.
7. um planejador urbano quer determinar o número  $x_k$  de modos que uma coluna com  $k$  vagas de estacionamento pode ser preenchida por carros e caminhões. Se caminhões ocupam duas vagas cada um, encontre uma formula para  $x_k$  e a estime para valores grandes de  $k$ .