LISTA AULA 10: ÁLGEBRA LINEAR AUTO-VALORES, AUTO-VETORES

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**: 11 de Novembro de 2015

1. Encontre bases de todos os auto-espaços associados a cada uma das matrizes:

   a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Fazendo uma interpretação geométrica, determine os auto-valores e os auto-vetores de cada transformação linear dada:

   a. $T(x,y) = (-x,y)$ Reflexão em relação ao eixo y.
   b. $T(x,y) = (x,0)$ Projeção sobre eixo x.
   c. $T(x,y) = (y,x)$ Reflexão em relação à reta $y = x$.
   d. $T(x,y) = (-y,x)$ Rotação de $\frac{\pi}{2}$ en sentido anti-horario.
   e. $T(x,y) = (2x,3y)$ Dilata 2 unidades na horizontal e 3 na vertical.

3. Para cada uma das transformações lineares a continuação encontrar o polinômio característico, auto-valores, auto-vetores, auto-espaços e determinar se T é diagonalizavel, se sim, encontrar uma base B tal que $[T]_B$ é uma matriz diagonal.

   a. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) = (x+2y, 2y+x, z)$.
   b. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) = (3x-z, y-x+2z, 4z)$.
   c. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por $T(x,y,z,w) = (x+y, x, z+2w, 2z+w)$.
   d. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por $T(x,y,z,w) = (x+y, y, 2z, y+2z+2w)$.
   e. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (y,-x)$.

4. Seja A uma matriz quadrada

   a. Prove que A e A^T tem os mesmos polinômios característicos e portanto os mesmos auto-valores.
   b. De um exemplo de uma matriz A de ordem 2×2 tal que A e A^T tenham auto-espaços diferentes.

5. Sejam A uma matriz quadrada de ordem n, λ um auto-valor de A e v um auto-vetor associado a λ. Prove que se $c \in \mathbb{R}$ então v é um auto-vetor de $A - cI$ e determine seu correspondente auto-valor.

6. Seja A uma matriz 2×2 com auto-vetores $(1,-1)$ e $(1,1)$ associados aos auto-valores $\frac{1}{2}$ e 2 respectivamente:

   a. Determine $A^{10}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a. Determine $A^{k}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a. Calcule $\lim_{k\to\infty} A^{k}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

7. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ prove que os autovalores de A são $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = d$ e determine os autoespaços associados a cada auto-valor. Para que valores a, b, d A é diagonalizável?

8. Diagonalize se for possível cada uma das seguintes matrizes:

   a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem, λ e μ auto-valores de A e B respectivamente.

   a. Dê um exemplo de A e B como descritas acima, mas que $\lambda + \mu$ não seja auto-valor de $A + B$.

   b. Dê um exemplo de A e B como descritas acima, mas que $\lambda\mu$ não seja auto-valor de AB.

   c. Prove que se adicionalmente λ também é auto-valor de B então $\lambda + \mu$ é auto-valor de $A + B$ e $\lambda\mu$ é auto-valor de AB.

10. Seja $\mathcal{C}$ o espaço vetorial das funções continuas em $\mathbb{R}$ e $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ a transformação linear

$$T(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{dt}$$

    T possue auto-valores?

11. Seja $\mathcal{D} : \mathbb{P}_3[x] \to \mathbb{P}_3[x]$ a tansformação linear dada pela derivada. $\mathcal{D}$ possue auto-valores? se sim, calcule-os. $\mathcal{D}$ é diagonalizável?

12. Seja $\mathcal{M}_n$ o espaço vetorial das matrizes de ordem n e $T : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ a transformação linear

$$T(A) = A^T$$

   a. Determine o polinômio característico de T.

   b. Encontrar os auto-valores e auto-espaços de T

   c. T é diagonalizável? Explique.

13. Uma Transformação linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é nilpotente se existe um numero inteiro k tal que $T^k = 0$. Prove que se T é nilpotente então 0 é o único auto-valor de T.

14. Prove que se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma trnsformação linear então T possue pelo menos um auto-valor.

15. Prove que se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma trnsformação linear e $T - I$ é inversível, então 1 não é auto-valor de T.

16. Se λ é um auto-valor de $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, prove que λ^k é um auto-valor de T^k.