UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena-EEL

LISTA AULA 9: ÁLGEBRA LINEAR DETERMINANTES

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**: 4 de Novembro de 2015

1. Utilize as propriedades dos determinantes para calcular os determinantes das seguintes matrizes:

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-2\cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & 1-2\sin^2\theta \end{pmatrix}$.

2. Suponha que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 4$, calcule:

   a. $\det\begin{pmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{pmatrix}$.

   b. $\det\begin{pmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{pmatrix}$.

   c. $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

3. Determine os valores de k para que as matrizes $\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ k^2 & 4 & k^2 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}$ sejam inversíveis, e para os valores encontrados calcule a inversa.

4. Determine os valores de x tais que $\det\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} = 0$

5. Sejam A, B e P matrizes de ordem n tais que $\det A = 3$ e $\det B = -2$. Calcule:

   a. $\det(AB)$.
   b. $\det(B^{-1}A)$.
   c. $\det(AA^T)$.
   d. $\det(P^{-1}AP)$.
   e. $\det(A^2(B^T)^{-1})$
   f. $\det(-A^2(\mathrm{Adj}A)^{-1})$

6. prove que $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$ e conclua que a matriz é inversível se e somente se $x \neq y$, $x \neq z$ e $z \neq y$.

7. Prove que se A e B são matrizes tais que $B = P^{-1}AP$ então $\det(A) = \det(B)$.

8. Uma martiz quadrada A é dita *idempotente* se $A^2 = A$. Determine todos os valores possíveis para $\det(A)$ se A é indempotente.

9. Uma martiz quadrada A é dita *nilpotente* se existe k tal que $A^k = 0$. Determine todos os valores possíveis para $\det(A)$ se A é nilpotente.

10. Seja A uma martiz quadrada tal que $AA^T = I$. Determine todos os valores possíveis para $\det(A)$.

11. Determine quais dos seguintes enunciados são verdadeiros e quais falsos. Prove os verdadeiros e dé um contra-exemplo dos falsos.

    a. $\det(I - A) = 1 - \det(A)$.

    b. $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

    c. $\det(AB - BA) = 0$

    d. $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$

    e. Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = AC$, então $B = C$