LISTA AULA 8: ÁLGEBRA LINEAR ISOMORFISMOS, MATRIZES E T.L

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**:05 de outubro de 2015

OBSERVAÇÃO: A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é $\{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$ e a base canônica de $\mathbb{P}_n[x]$ é $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$.

1. Se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é um conjunto Linearmente independente de vetores de V e $T:V\to W$ é injetora então $\{Tv_1,Tv_2,\ldots,Tv_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores de W.

2. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n. se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é base de V e $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ é base de W, prove que a transformação linear $T(v)=\alpha_1Tv_1+\alpha_2Tv_2+\ldots+\alpha_nTv_n$ onde $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n$ é um isomorfismo entre V e W.

3. Se $T:\mathbb{P}_3[x]\to\mathbb{P}_2[x]$ é definida por $T(a+bx+cx^2+dx^3)=b+cx+dx^2$, determinar bases para Ker$T$ e ImT.

4. Sejam $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definidas por $T(x,y,z)=(x+2y+3z,2x+y,z-x)$ e $S(x,y,z)=(y-z,x+y,z-2x)$

   a. Calcule as matrizes de S e T em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   b. Determine bases para Ker$T$ e ImT.

   c. S é isomorfismo? Se sim, encontre uma expresão para $S^{-1}(u,v,w)$. T é isomorfismo? Explique!

   d. $S\circ T=T\circ S$? Explique!

5. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(-y,x)$

   a. Qual é a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

   b. Qual é a matriz de T em relação a base $E=\{(1,2),(1,-1)\}$.

   c. Prove que o operador $T-cI$ é inversível para qualquer valor de $c\in\mathbb{R}$.

6. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(3x+z,-2x+y,-x+2y+4z)$

   a. Qual é a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   b. Qual é a matriz de T em relação a base $E=\{(1,0,1),(-1,2,1),(2,1,1)\}$.

   c. Para que valores de $c\in\mathbb{R}$ $T-cI$ é inversível?

7. Se $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ é definida por $P(x,y,z)=(x,y,0)$. calcule a matriz de P em relação a base canônica. P é isomorfismo? De uma expresão para $P\circ P(x,y,z)$.

8. A matriz de $P : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ em relação a base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

T é isomorfismo? Se sim, determine uma expresão para $P^{-1}(a + bx + cx^2)$.

9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x + y, 2z - x)$

   a. Qual é a matriz de T em relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

   b. Qual é a matriz de T em relação as bases $E = \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ e $\{(0,1),(1,0)\}$.

   c. Calcule $\dim(\mathrm{Ker}T)$ e $\dim(\mathrm{Im}T)$. T é injetora? Explique! T é sobrejetora? Explique!

10. Se $T(x,y,z) = (y,x,z)$ e A é a matriz que representa T em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$, Calcule A^2. T é inversível? se sim, calcule $T^{-1}(u,v,w)$.

11. Encontrar a matriz que representa a transformação linear identidade $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nas bases:

    a. $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

    b. $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que a matriz que representa T em relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Prove que $T^2 - (a+d)T + (ad - cb)I = 0$.

13. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz que representa $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$. T é isomorfismo?

14. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definida por $T(x,y,z,w) = (0,x,y,z)$. Se A é a matriz que representa T em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$ Calcule A^{2015}. existe a transformação linear inversa T^{-1}?

15. Considere a integral no interválo $[0,1]$ como uma transformação linear $T : \mathbb{P}_3[x] \to \mathbb{R}$, isto é, $T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$.

    a. Determine a matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{P}_3[x]$.

    b. Utilize a matriz encontrada no item a. para determinar $\int_0^1 \pi x^3 - 2\sqrt{2}x + 1\mathrm{d}x$.

16. Se $T : \mathbb{P}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear definida por $T(p(x)) = \left(p(0), \int_0^1 p(x)\mathrm{dx}\right)$, determine a matriz de T em relação as bases canônicas.

17. Se a matriz que representa a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

provar que T é um isomorfismo e calcular $T^{-1}(u,v,w)$

18. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (0,y,z)$. Se A é a matriz que representa T em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$ Calcule A^2. Existe T^{-1}? Se sim, calcule $T^{-1}(u,v,w)$.

19. Seja $T : \mathbb{P}_3[x] \to \mathbb{P}_5[x]$ a transformação linear dada pela formula $T(p(x)) = (1 + x - x^2)p(x)$.

   a. T é injetora? Explique.
   b. T é sobrejetora? Explique.
   c. T é isomorfismo? Explique.
   d. Determine a matriz que representa a transformação linear T nas bases canônicas.

20. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a trnasformação linear cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar uma base para o Ker$T$ e ImT.

21. Determine duas bases de $\mathbb{R}^2$ de maneira que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ representem a mesma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.