LISTA AULA 10: Geometria Analítica PRODUTO VETORIAL

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**: 30 de Maio de 2016

1. Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{y} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Encontrar:

   a. Um vetor unitário na direção de $\vec{v} - \vec{u}$.

   b. o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$

   c. o ângulo do vetor $\vec{v} - 2\vec{w}$ com os eixos x, y e z. O coseno destes ângulos sao conhecidos como os cosenos diretores do vetor.

   d. $Proj_{\vec{u}}\vec{v}$.

   e. Um vetor unitário perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   f. A área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $-2\vec{v}$.

   g. Um escalar α tal que $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ seja ortogonal com $\vec{w}$.

   h. Escalares α e β tais que $\vec{z} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{y}$ é um vetor ortogonal a $\vec{y}$.

   i. O volume do tetraedro formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$

2. Determine um vetor unitário ortogonal ao plano formado pelos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

3. Utilize o produto vetorial para provar o teorema dos senos para triângulos.

4. Se $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ Calcule $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. conclua que o produto vetorial não é associativo.

5. Prove as seguintes propriedades do produto vetorial:

   a. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{u} + (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.

   b. $(\vec{u} \times \vec{v}).(\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{z}) - (\vec{u}.\vec{z})(\vec{v}.\vec{w})$.

   c. $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.

   d. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

   e. $\vec{u}\vec{v}.[(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u})] = [\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})]^2$.

6. Considere o tetraedro com lados(Faces) F_1, F_2, F_3, F_4 e sejam $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4$ vetores cujos comprimentos são iguais as áreas de F_1, F_2, F_3, F_4 respectivamente e cujas direções são perpendiculares aos lados do tetraedro e apontando para fora do tetraedro. Prove que

$$\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_3 + \vec{\eta}_4 = 0.$$

Área 1
Rodovia Itajubá – Lorena, Km 74,5 – Caixa Postal 116
CEP 12600-970 – Lorena – SP
Fax (12) 3153-3133
Tel. (Direto) (12) 3159-5007/3153-3209

Área II
Pólo Urbo–Industrial AI-6 – Caixa Postal 116
CEP 12600-970 – Lorena – SP
Fax (12) 3153-3006
Tel. (PABX) (12) 3159-9900

7. Sejam P, Q e R três pontos não colineares e O um ponto qualquer. Se $\vec{u} = \vec{OP}, \vec{v} = \vec{OQ}$ e $\vec{w} = \vec{OR}$, prove que $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$ é ortogonal ao plano determinado por P, Q e R.

8. Determinar escalares α e β tais que $\vec{v} = (1, \alpha, \beta)$ seja ortogonal com $\vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = (2, 5, 1)$.

9. Se $||\vec{u}|| = 2$, $\vec{v}$ é unitário e $ang(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$, determine $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} + \lambda\vec{v}$ seja ortogonal com $\vec{u}$.

10. Se $\vec{x} = (2, 3, 4)$ e $\vec{u} = (0, -2, 1)$. Escrever $\vec{x}$ como soma de dios vetores, um paralelo com $\vec{u}$ e outro ortogonal com $\vec{u}$.

11. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos com o mesmo ponto inicial. Provar que o volume do tetraedro formado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é
$$Vol = \frac{1}{6}|\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|$$
.

12. Suponha que $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ são vetores linearmente independentes e $\vec{Z} = (\vec{Y} \times \vec{X}) - \vec{Y}$.
    a. Prove que $\vec{X}$ é ortogonal a $\vec{Y} + \vec{Z}$.
    b. Prove que o ângulo entre $\vec{Y}$ e $\vec{Z}$ é maior que 90^o.
    c. se $\vec{Y}$ é unitário e $||\vec{Y} \times \vec{X}|| = 2$, calcule $||\vec{Z}||$.

13. Determinar o valor de α para que os vetores $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (\alpha, 3, 0)$ e $\vec{w} = (\alpha, \alpha, 1)$ sejam coplanares. (Pense no produto misto.)

14. É comum na literatura utilizar a seguinte notação para o produto misto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$. Prove as seguintes propriedades do produto misto:
    a. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$.
    b. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$.
    c. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.
    d. $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0$.
    e. $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]^2$.