LISTA AULA 2: Cálculo II Conjuntos de Nivel e Definição de Limite.

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**: 08 de março de 2016

1. Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   a. Seja $g(x,y) = f(x,y) + k$, onde k é um número real dado. Qual é o domínio da função g? Como é o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f?

   b. $g(x,y) = f(x - x_0, y - y_0)$ onde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Qual é o domínio da função g? Como é o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f?

   c. $g(x,y) = f(-x,-y)$. Qual é o domínio da função g? Como é o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f?

2. Para cada um dos itens a continuação encontre um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

   a. O nivel 1 seja $\{1\}$.

   b. O nivel 1 seja $\{1,3\}$.

   c. O nivel 1 seja $\{x \in \mathbb{R} : x \in [1,3]\}$.

   d. O nivel 1 seja $\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}\}$.

3. Para cada um dos itens a continuação Encontre um exemplo de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $c \in \operatorname{Im} f$ tal que:

   a. $f^{-1}(c)$ seja um ponto.

   b. $f^{-1}(c)$ seja o primeiro quadrante do plano xy sem incluir os eixos.

   c. $f^{-1}(c)$ seja o $\mathbb{R}^2$.

4. Para cada uma das funções dadas a continuação determinar o Domínio, a Imagem e fazer uma descrição dos conjuntos de nivel.

   a. $f(x,y) = |x| - y$

   b. $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$.

   c. $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x + y)$.

   d. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

   e. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$

5. A função Mínimo, $\min(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por: $\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq y \\ y & \text{se} \quad x > y \end{cases}$

   a. Calcule $\min(3,\pi)$ e $\min(e,\pi)$.

   b. Obtenha uma formula explicita para $\min(x,y)$.

   c. Descreva todos os conjuntos de nível de $\min(x,y)$.

   d. Descreva todos os conjuntos de nível de $g(x,y) = \min(|x|,|y|)$.

6. A função Máximo, $\max(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por: $\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq y \\ y & \text{se} \quad x < y \end{cases}$

    a. Calcule $\max(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})$ e $\max(2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{3}{2}})$.

    b. Obtenha uma formula explicita para $\max(x,y)$.

    c. Descreva todos os conjuntos de nível de $\max(x,y)$.

    d. Descreva todos os conjuntos de nível de $g(x,y) = \max(x^2, y)$.

7. Para cada uma dos itens a continuação encontrar uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

    a. O conjunto de nivel 1 seja a superfície $z = x^2 + y^2$

    b. O conjunto de nivel -7 seja a superfície $z = \ln^2(\sin^4(x + y^8) + 7)$

    c. O conjunto de nivel 0 seja a bola aberta com centro em 0 e raio 1.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = 2y$ Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 8$. Dado $\epsilon = 0.1$ determine o valor de δ tal que $\|(x,y) - (1,2)\| < \delta$ implique que $|f(x,y) - 8| < \epsilon$

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = 5x - 2y$ Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 3$. Dado $\epsilon = 0.2$ determine o valor de δ tal que $\|(x,y) - (1,1)\| < \delta$ implique que $|f(x,y) - 3| < \epsilon$.

10. Considere o seguinte **teorema:** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to p} g(x) = 0$. Então $\lim_{x\to p} g(x)f(x) = 0$.

    Para cada uma das funções $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas a continuação, utilize este resultado para calcular $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x)$. justifique claramente o porque este teorema pode ser utilizado.

    a. $h(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$.

    b. $h(x,y) = \dfrac{y^2x^3}{x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$.

    c. $h(x,y) = \ln(x^2+y^2)\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), \quad (x_0,y_0) = (1,0)$.

    e. $h(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$.

    f. $h(x,y) = \dfrac{7x^2y^2}{2x^2+2y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$.

    g. $h(x,y) = \dfrac{y^3}{x^4+y^4}\ln(x^2+y^2), \quad (x_0,y_0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.