LISTA AULA 1: Cálculo II O espaço $\mathbb{R}^n$

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**: 01 de março de 2016

1. Uma pessoa esta no ponto A do plano e decide caminhar 1 metro na direção norte, depois vira um ângulo de 90 graus a esquerda e caminha 2 metros, logo vira um ângulo de 90 graus a esquerda e caminha 3 metros. Suponha que ele continua caminhando com este raciocínio até um ponto B, se no último trecho caminhou 30 metros, determine a distância de A até B.

2. Considere a função norma $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa a cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$ sua norma $\|v\|$. A função norma é injetora? justifique sua resposta. A função norma é sobrejetora? justifique sua resposta. A função norma é Linear? justifique sua resposta.

3. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ vetores ortogonais, tais que $\|v\| = 3$ e $\|u\| = 7$. Calcule $\|u + v\|$ e $\|u - v\|$.

4. Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ são vetores, tais que $\|v\| = 7$, $\|u\| = 4$ e $\|u + v\| = 7$, calcule $\|u - v\|$.

5. Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ são vetores, tais que $\|v\| = 23$, $\|u\| = 11$ e $\|u - v\| = 30$, calcule $\|u + v\|$.

6. Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwartz para provar que se $x_1, x_2 \ldots x_n$ são números reais então
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

7. (Teorema de Pitagoras no $\mathbb{R}^n$) Se $x_1, x_2 \ldots x_n$ são vetores do $\mathbb{R}^n$ ortogonais a dois então
$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$

8. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Prove cada um dos enunciados a continuação:

   a. $u.v > 0$ se, e somente se $\|u + v\| > \|u - v\|$.

   b. $u.v < 0$ se, e somente se $\|u + v\| < \|u - v\|$.

   a. u e v são ortogonais se, e somente se $\|u + v\| = \|u - v\|$.

9. **Definição de ângulo para vetores no $\mathbb{R}^n$:** Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ dois vetores não nulos, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz sabemos que $|u.v| \leq \|u\|\|v\|$ assim $\frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$. Também sabemos que a função coseno é injetora no intervalo $[0, \pi]$ sobre o intervalo $[0, 1]$, portanto sabemos que existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$. O valor θ é chamado de ângulo entre u e v e denotado por $\measuredangle(u, v)$.

a. Se $\measuredangle(u,v)=\frac{\pi}{3}$, $\|v\|=4$, $\|u\|=3$ calcule $u.v$, $\|u+v\|$ e $\|u-v\|$.

b. Sejam $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ tal que cada dupla de vetores formam um ângul de $\frac{\pi}{3}$. Se $\|v\|=2$, $\|u\|=1$ e $\|w\|=4$ calcule $\|u+v+w\|$.

c. Sejam $u,v,\in\mathbb{R}^n$ NÃO NULOS tais que $\|v\|=\|u\|=\|u-v\|$. Calcule $\measuredangle(u,v)$, $\measuredangle(u,u-v)$ e $\measuredangle(v,u-v)$. Interprete os resultados encontrados quando $n=2$.

d. Sejam $u,v,\in\mathbb{R}^n$ NÃO NULOS tais que $\|u\|=\|u-v\|$. Prove que $\measuredangle(u,v)=\measuredangle(u,u-v)$. Interprete o resultado quando $n=2$.

10. Para cada um dos conjuntos a continuação, determine se ele é aberto, fechado, limitado ou compacto. Justifique claramente suas respostas:

a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}$.

b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, y<2-x\}$.

c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\}$.

d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\}$.

i. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x^2+y^2-4)(1-x^2-y^2)>0\}$.

e. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$.

f. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq -1\}$.

g. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

h. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sin x\leq 0\}$.

j. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2>x^2+y^2\}$.

j. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : xyz<0\}$.

k. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\leq x^2+z=-y^2\}$.

11. Prove que a união ou intersecção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

12. Prove que a união ou intersecção de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

13. É possível que a intersecçãode um número infinito de conjuntos abertos seja um conjunto fechado? Justifique!

14. É possível que a uni ao de um número infinito de conjuntos fechados seja um conjunto aberto? Justifique!