LISTA AULA 6: Cálculo II — Gradiente, Diferencial e Derivadas parciais.

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata — **Data**: 11 de abril de 2016

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$

   a. Determine a curva de nivel de f que passa pelo ponto $(1,1)$.

   b. Calcule $\nabla f(1,1)$.

   c. Determine o vetor diretor da reta tangente a curva de nivel que passa por $(1,1)$.

   d. Se $\vec{v}$ é o vetor do item anterior, calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$. Conclua que $\nabla f(1,1) \perp \vec{v}$.

   e. Se (x_0, y_0) é um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, determine o vetor $\vec{v}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = 0$

2. Calcule a derivada da função $f(x,y) = x \sin y$ na direção do vetor unitário tangente a parábola $y = x^2$ no ponto $(1,1)$.

3. Prove que a derivada direcional da função $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$ nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 - 2y = 0$ na direção do vetor normal à circunferência é igual a 0.

4. Para cada um dos ítens a seguir, calcule a derivada de f no ponto p, na direção do vetor diretor da reta tangente a curva de nível que passa por p.

   a. $f(x,y) = xy, \quad P = (2,3)$.

   b. $f(x,y) = \sin(x+y), \quad P = (0,0)$.

   c. $f(x,y) = e^x e^y, \quad P = (0,0)$.

5. **Definição:** Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$é homogênea de grau α se $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ para todo $(x,y) \in U$ e para todo $t > 0$. Prove que cada uma das funções a seguir são homogêneas e calcule o grau.

   a. $f(x,y) = 8x^3 + 3x^2y + 5y^3$.

   b. $f(x,y) = \sin\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$.

   a. $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5}$.

   a. $f(x,y,z) = xy \ln\left(\frac{xy+z^2}{x(y+z)}\right)$.

6. Considere o seguinte **Teorema:** Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável e homogênea de grau α, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \frac{\alpha}{\|\vec{v}\|} f(x_0,y_0).$$

   Utilize este teorema para calcular as derivadas das funções do exercício anterior na direção de $\vec{v} = (a,b)(\vec{v} = (a,b,c)$ se o domínio for $\mathbb{R}^3)$. **Observe que calcular as derivadas direcionais de f é muito simples se a função for homogênea.**

7. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Prove que f é homogênea de grau 1, mas que não é diferenciável em $(0,0)$.

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções contínuas?

   c. f é diferenciável? Justifique claramente sua resposta.