LISTA AULA 4: Cálculo II — Existência de Máximos, Mínimos e Derivadas Parciais.

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata — **Data**: 29 de março de 2016

1. a temperatura de uma chapa metálica quadrada de lado 2π é dada em cada ponto (x,y) por $T(x,y) = |\sin x|$.

   a. Determine todos os pontos da chapa que estão a uma temperatura constante k.

   b. Determine todos os pontos da chapa onde a temperatura é máxima.

   c. Determine todos os pontos da chapa onde a temperatura é mínima.

   d. Quais são as temperaturas máximas e mínimas da chapa?

2. Considere a função $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$.

   a. Determine o domínio, a imagem as curvas de nivel de f.

   b. f tém máximo? f tém mínimo? Justifique claramente sua resposta.

   c. Se o domínio de f for restrito ao conjunto $\mathcal{C} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$, tém máximo? f tém mínimo? se sim, calcule os pontos de máximo ou mínimo.

   d. Se o domínio de f for restrito ao conjunto $\mathcal{R} = \{(x,y) : x \in [-1,1], \quad y \in [-1,1]\}$. f tém máximo? f tém mínimo? se sim, calcule os pontos de máximo ou mínimo.

   e. Represente o graficamente os resultados dos itens anteriores.

3. Refaça o exercício anterior para as seguintes funções:

   a. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   b. $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}$.

   c. $f(x,y) = y^2$.

4. Calcule a equação da reta tangente à intersecção entre a superfície $z = x^3y + 5y^2$ e o plano $x = 2$ no ponto onde $y = 1$.

5. Calcule a equação da reta tangente à intersecção entre a superfície $z = x^2 + y^3x$ e o plano $y = 2$ no ponto onde $x = 2$.

6. Se $f(x,y,z) = \ln(xyz)$, determine o domínio de f e calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1).$$

7. Para cada uma das funções a seguir, determine o domínio e calcule as derivadas parciais:

a. $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

b. $f(x,y) = x\ln y - y\ln x$.

c. $f(x,y) = (2y)^x - 2^y$.

d. $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln^2(1+x^2+y^2)}$.

8. Encontre o domínio e calcule as derivadas parciais da função

$$f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}} + x^{\frac{z}{y}} + y^{\frac{x}{z}} + y^{\frac{z}{x}} + z^{\frac{x}{y}} + z^{\frac{y}{x}}$$

no ponto $(1,1,1)$.

9. Encontre o domínio e calcule as derivadas parciais da função

$$f(x,y,z) = x^{y^z} + x^{z^y} + y^{x^z} + y^{z^x} + z^{x^y} + z^{y^x}$$

no ponto $(1,1,1)$.

10. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. f é contínua em $(0,0)$? Explique.

b. Se $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

c. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe? se sim, calcule.

d. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe? se sim, calcule.

11. Prove que se $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ e $(x_0,y_0) \in \operatorname{Dom} f$ então (x_0,y_0) é ortogonal com $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

12. Seja $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y e^{\,t}\,\mathrm{d}t$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$(Ajuda: utilize o teorema fundamental do cálculo.)

13. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ defina

$$f(x,y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Para quais valores de (x,y), $f(x,y) > 0$?

a. Para quais valores de (x,y), $f(x,y) < 0$?

a. Qual é o nivel 0 da função f?

d. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

14. Refaça o exercício anterior se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar e $g(t) > 0$ para todo $t > 0$.