LISTA AULA 3: Cálculo II Limites e Continuidade.

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata **Data**: 15 de março de 2016

1. Em cada um dos itens a continuação é dada uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Determine o Domínio U de f e estude o comportamento da função perto do ponto especificado(isto é diga se o limite existe ou não, se existir calcule-o, se não existir prove que ele não existe.)

   a. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no $(0,0)$.
   b. $f(x,y) = \dfrac{2xy^4}{x^5 + 6y^5}$ no $(0,0)$.
   c. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} + \dfrac{y - 1}{y^2 - 1}$ no $(1,1)$.
   d. $f(x,y) = \dfrac{2x^4 y}{x^8 + y^2}$ no $(0,0)$.
   e. $f(x,y) = \dfrac{(x^3 - 1)(y^4 - 1)}{(x - 1)(y^2 - 1)}$ no $(1,1)$.
   f. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^6}$ no ponto $(0,0)$.
   g. $f(x,y) = \dfrac{(y^2 + 2y - 3)(1 - \cos x)}{x^2(y - 1)}$ no $(0,0)$.
   h. $f(x,y,z) = \dfrac{\text{arcsen}(2x)\arctan(3y)}{xy}$ no $(0,0)$.
   i. $f(x,y,z) = \dfrac{\sin x \cos(3x)}{2xy}$ no $(0,0)$.
   j. $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$ no $(0,0)$.
   k. $f(x,y,z) = \dfrac{(e^x - 1)(e^{2y} - 1)}{xy}$ no $(0,0)$.
   l. $f(x,y,z) = \dfrac{x + y + z}{x^3 + y^3 + z^3}$ no $(0,0)$.
   m. $f(x,y,z) = \dfrac{x + y + z}{x + y - z}$ no $(0,0)$.

2. considere a função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela equação

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}.$$

   a. Determine o domínio U de f.
   b. Prove que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ e $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ existem e calcule seus valores.
   c. Prove que $\lim_{(x,y)\to(x,y)} f(x,y)$ não existe.
   d. O que você pode concluir dos tês itens anteriores?

3. considere a função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela equação

$$(x + y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right).$$

   a. Determine o domínio U de f.
   b. Prove que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ e $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ não existem.
   c. Prove que $\lim_{(x,y)\to(x,y)} f(x,y)$ existe e calcule-o.
   d. O que você pode concluir dos três itens anteriores?

4. Para cada uma das funções dadas a continuação determinar o Domínio, e os pontos do plano onde a função é contínua.

   a. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

   b. $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\sin y}$.

   c. $f(x,y) = \dfrac{2x + 3y^5}{x^2 + y^2 + 1}$.

   d. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + 3y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   e. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 3y^4}{x^4 + 5y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2 y^3}{x^4 + 7y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   g. $\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq y \\ y & \text{se} \quad x > y \end{cases}$

5. Nos item a continuação é dada uma função $z = f(x,y)$ que não esta definida na origem. É possível redefinir a função f na origem de maneira que seja contínua em todo o domínio? Explique claramente sua resposta.

   a. $f(x,y) = \dfrac{3x^2 y}{x^4 + y^4}$.

   b. $f(x,y) = \dfrac{3x^2 y^3}{x^4 + y^4}$.

   c. $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$.

   d. $f(x,y) = \dfrac{3x^2 y^2}{x^8 + y^8}$.

6. Considere a função $\text{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \\ -1 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$. Para cada uma das funções dadas a continuação determine o domínio e os pontos do plano onde a função é contínua. Justifique claramente suas respostas.

   a. $f(x,y) = \ln(\text{sgn}(1 + x^2 + y^2))$. Qual é a imagem de f?

   b. $f(x,y) = \ln(\text{sgn}(1 + x + y))$. Qual é a imagem de f?

   c. $f(x,y) = \text{sgn}(xy)$.

7. sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. f é chamada contínua na direção v no ponto p se $\lim\limits_{t \to 0} f(p + tv) = f(p)$.

   a. Prove que se f é continua no ponto p, então f é contínua em qualquer direção v no´ponto p.

   b. Prove que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é continua em qualquer direção no ponto $(0,0)$, mas não é contínua em $(0,0)$. isto contradiz o item a?