**LISTA AULA 11**: Cálculo II — Campos de vetores e Transf. Coordenadas

**Professor**: Juan Fernando Zapata Zapata — **Data**:13 de junho de 2016

1. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores. Em cada uma das expresões a seguir, indique se fazem sentido ou não. Se não faz sentido explique porque e se faz sentido diga se o resultado é um campo vetorial ou um campo escalar.

   a. $\mathbf{Rot} f$.
   b. $\mathbf{div} F$.
   c. $\nabla F$.
   d. $\mathbf{div}(\nabla f)$.
   e. $\mathbf{Rot}(\mathbf{Rot} F)$.
   f. $(\nabla f) \times \mathbf{div} F$.
   g. $\mathbf{Rot}(\nabla f)$.
   h. $\nabla(\mathbf{div} F)$.
   i. $\nabla(\mathbf{div} f)$.
   j. $\mathbf{div}(\mathbf{div} F)$.
   k. $\mathbf{div}(\mathbf{Rot}(\nabla f))$.

2. Calcule a divergência dos seguintes campos de vetores:

   a. $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{xy}, e^{-xy}, e^{yz})$.
   b. $\mathbf{F}(x,y) = (x^3, -x\sin(xy))$.
   c. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y + \cos x, z + e^{xy})$.
   d. $\mathbf{F}(x,y) = (\sin(xy), -\cos(x^2 y))$.

3. Calcule o Rotacional dos seguintes campos de vetores:

   a. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.
   b. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3,4,5)$.
   c. $\mathbf{F}(x,y) = (\sin x, \cos x)$.
   d. $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2 - y^2)$.

4. Considere o campo de vetores $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ e o campo escalar $r(x,y,z) = ||\mathbf{r}||$. Prove as seguintes identidades:

   a. $\mathbf{div}\,\mathbf{r} = 3$.
   b. $\nabla \mathbf{r} = \frac{1}{\mathrm{r}}\mathbf{r}$.
   c. $\mathbf{div}(r\mathbf{r}) = 4r$.
   d. $\mathbf{Rot}\,\mathbf{r} = 0$.
   e. $\nabla \ln(r) = \frac{1}{r^2}\mathbf{r}$

5. Considere a a transformação em coordenadas polares que relaciona cada ponto do plano $r\theta$ com o ponto do plano $xy$ através da relação $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$, onde $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = \sin\theta$. Em cada um dos exemplos a seguir é dada uma região $B$ no plano $xy$, determine a região $S$ no plano $r\theta$ tal que $P(S) = B$ e faça um gráfico da situação.

   a. $B = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq 0\}$.
   b. $B = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.
   c. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 4x \leq 0, y \geq 0\}$.
   d. $B$ é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 3$ e as retas $y = x$ e $y = 3x$.

6. Para cada um dos conjuntos a seguir, determine uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e un retângulo $R$ tal que $T(R) = B$ se:

   a. $B$ é a região no primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$. Calcule o jacobiano de $T$.

   b. $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.Calcule o jacobiano de $T$

   c. $B$ é o paralelogramo limitado pelas retas $y = x - 2$, $y = x + 1$, $y = 2 - x$ e $y = -x$.Calcule o jacobiano de $T$.

   d. $B$ é a região limitada pelas curvas $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{x}$ e $yx = 2$. Calcule o jacobiano de $T$.

7. Seja $z = f(u - 2v, v + 2u)$ onde $f$ é uma função de classe $C^2$. Exprese $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em termos das derivadas parciais de $f$.

8. Seja $v(r, \theta) = u(x, y)$ onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Prove que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

9. Prove que a mudança de coordenadas $T(u, v) = (e^u, e^v)$ transforma a equação

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

em $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1.$

10. Seja $F(r, \theta, t) = f(x, y, t)$ onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

Prove que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right]$$