

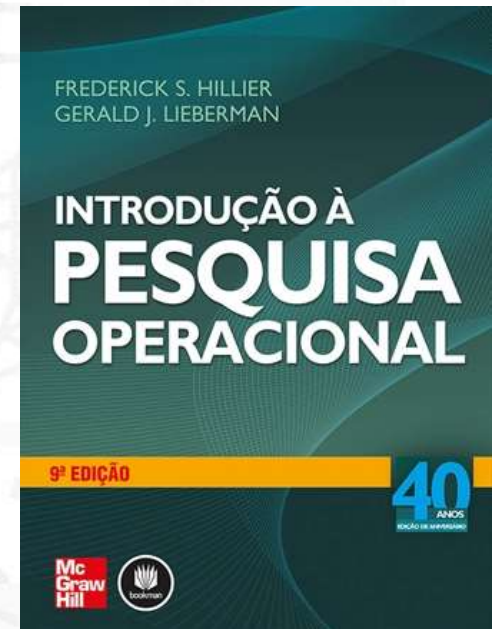
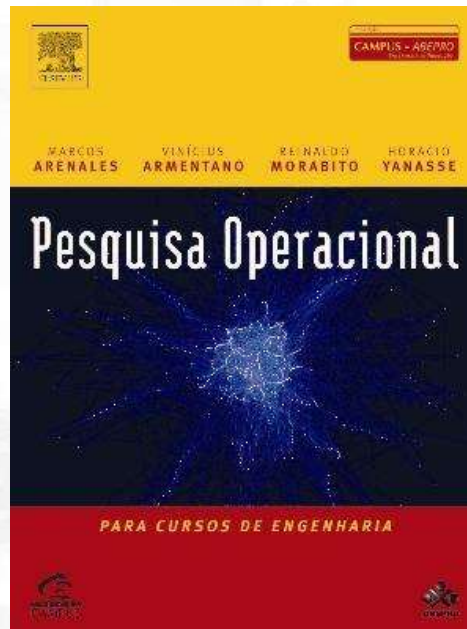
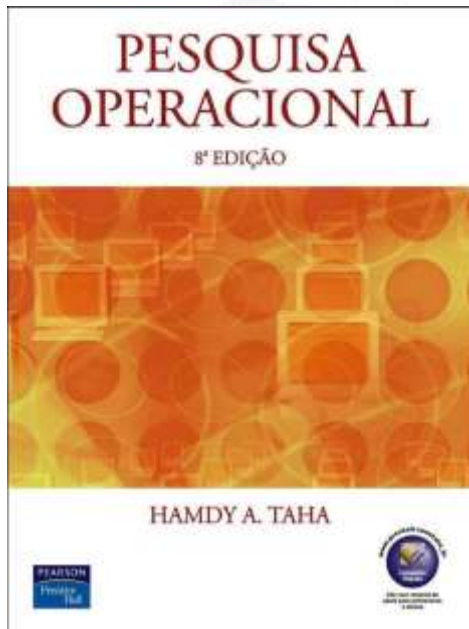


Universidade de São Paulo
Brasil

Pesquisa Operacional II

Prof. Fabrício Maciel Gomes
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

Referências Bibliográficas





Sistema de Avaliação

Duas Provas teóricas
Um Trabalho em Grupo

$$MédiaFinal = 0,4 \cdot P1 + 0,4 \cdot P2 + 0,2 \cdot Trabalho$$

P1 – 22 de setembro de 2016

P2 – 24 de novembro de 2016

Recuperação – 15 de dezembro de 2016

Projeto POLARIS (Década de 50)



Este projeto envolvia a participação de 250 grandes empresas e 9.000 empresas sub-contratadas diferentes. Além de milhares de peças comuns já usadas em outros projetos, nada menos que 70.000 novos tipos de peças diferentes tinham que ser fabricadas.



PERT/CPM

Embora os problemas técnicos fossem difíceis, o maior de todos era controlar todo o projeto, dado o gigantesco número de atividades a serem realizadas, principalmente porque havia grande pressão de se fazer o projeto no menor tempo possível.

Com a finalidade de controlar o projeto, foi desenvolvido por uma equipe mista da Lockheed, Booz Allen e Marinha dos E.Unidos um sistema para controle de projetos que recebeu o nome de PERT (**P**rogram **E**valuation and **R**evue **T**echnique). Poderíamos traduzir por Técnica de Avaliação e Controle de Projetos. O projeto Polaris teve sua duração reduzida dos **5** anos previstos para apenas **3**. Grande parte desta redução foi atribuída ao uso do PERT.



PERT/CPM

Na mesma época (1957) a Dupont apresentou um sistema de controle de Projetos, similar ao PERT, mas tendo como enfoque principal o controle dos custos de um projeto. O nome dado a este sistema era CPM (**C**ritical **P**ath **M**ethod) ou Método do Caminho Crítico em português.

O sucesso do PERT no projeto Polaris e do CPM na Dupont, provocaram a partir de 1960, uma “corrida” ao uso destas ferramentas que passaram a ser conhecidas pela sigla PERT/CPM. Com o passar dos anos o nome CPM deixou de ser usado e o uso deste tipo de técnica passou a ser conhecida como Rede PERT.

Pode-se dizer, sem medo de errar, que este tipo de ferramenta é usada pela maioria das empresas de médio e grande porte.



Construção da Rede

ATIVIDADE: É a execução efetiva de uma operação. São consumidos tempo e recursos. Ex: Assistir aula de P.Operacional, fazer uma laje de concreto, etc...

EVENTO: É um marco que caracteriza um determinado instante em um projeto. Não são consumidos tempo ou recursos. Ex: Início da aula de P.Operacional, fim da aula de P.Operacional, início de fazer a laje de concreto, etc...

Para se construir a rede PERT de um determinado projeto precisamos conhecer:

- a) As atividades, ou seja, a lista de tarefas que compõem o projeto.
- b) A ordem das atividades, isto é, quais as atividades antecedentes e quais as subsequentes à cada atividade.
- c) A duração prevista para cada atividade.

OBS: No caso do CPM, precisamos conhecer também o custo de cada atividade.

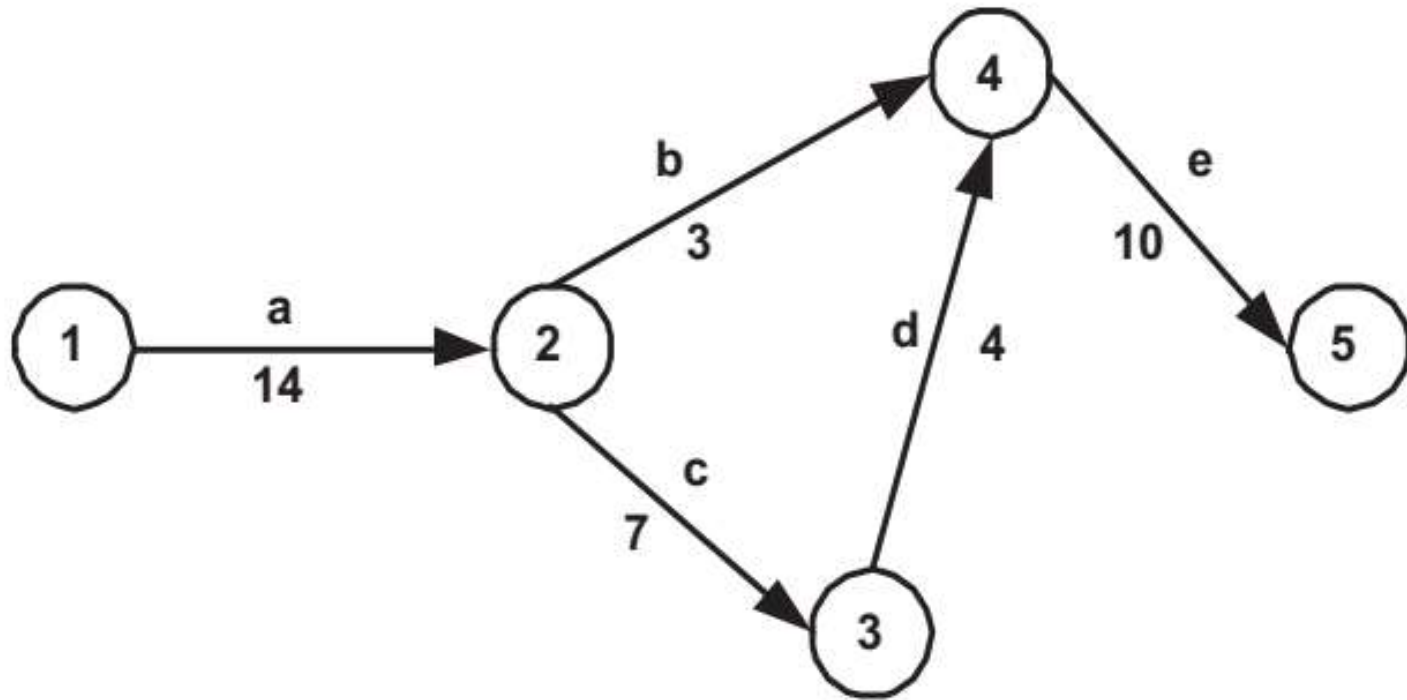


Construção da Rede

Exemplo: Vamos imaginar que a área financeira de uma pequena empresa, que produz e vende determinado produto, precisa fazer a previsão orçamentária para o próximo exercício fiscal. Como a confecção deste orçamento envolve áreas diferentes da empresa, foi decidido usar o PERT para controle e acompanhamento do projeto. As atividades do projeto bem como a interdependência entre elas além da suas durações, está mostrado na tabela a seguir:

Identificação	Atividade	Duração em dias	Antecessoras Imediatas
a	Previsão das unidades a serem vendidas	14	—
b	Determinar o preço de venda do produto	3	a
c	Levantar material necessário na produção	7	a
d	Levantar custos de produção	4	c
e	Fazer o Orçamento	10	b, d

Construção da Rede



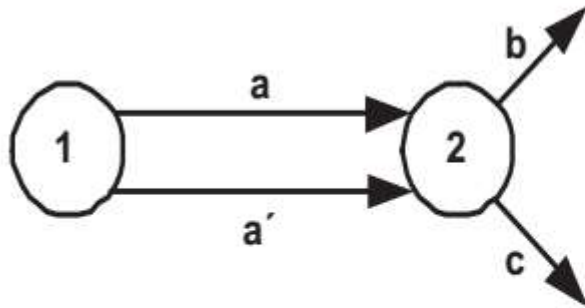


Complicação na Construção da Rede

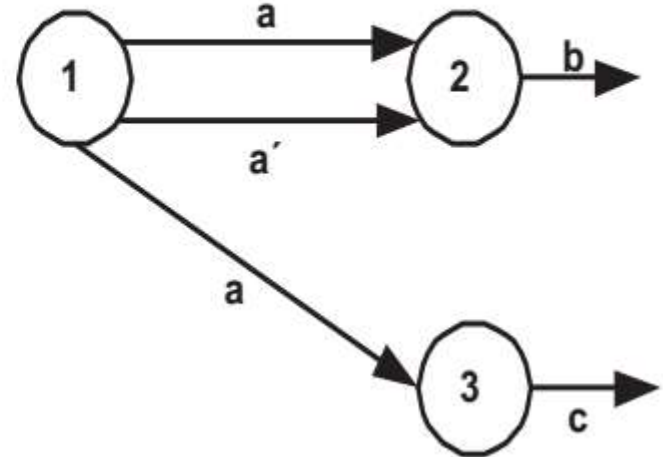
Identificação	Atividade	Duração em dias	Antecessoras Imediatas
a	Previsão das unidades a serem vendidas	14	—
a'	Estudar preço dos concorrentes	3	—
b	Determinar o preço de venda do produto	3	a, a'
c	Levantar material necessário na produção	7	a
d	Levantar custos de produção	4	c
e	Fazer o Orçamento	10	b, d

Complicação na Construção da Rede

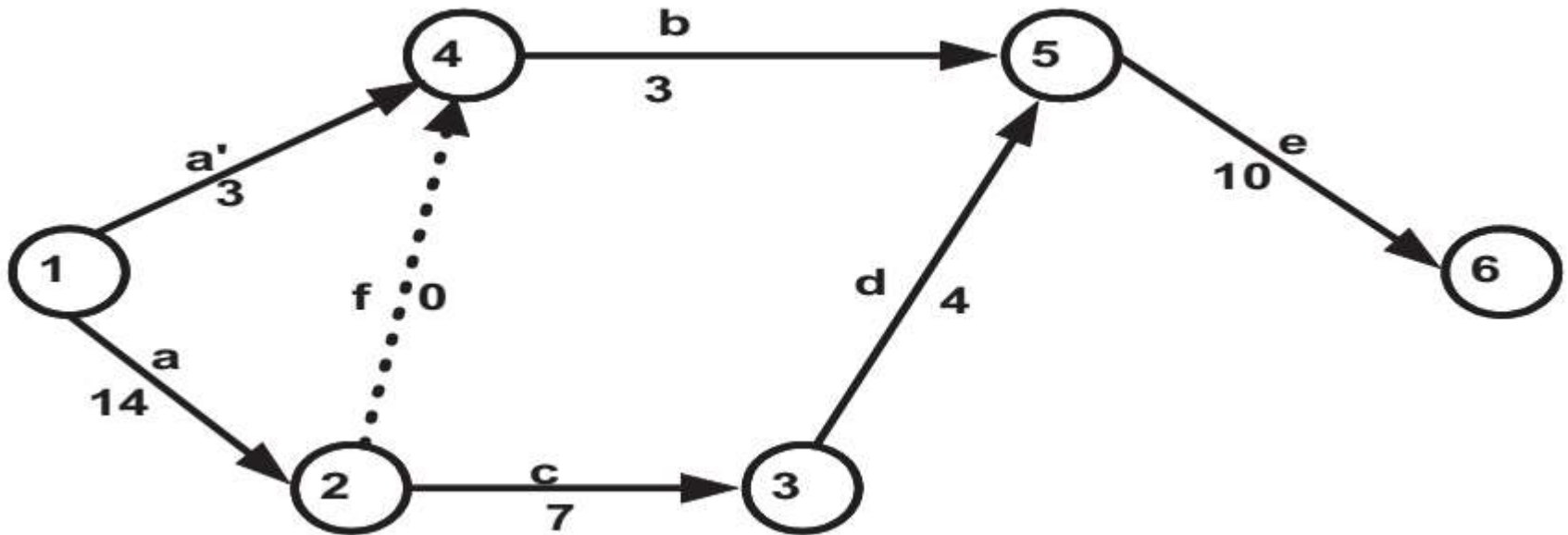
Opção 1



Opção 2



Atividade Fantasma





Determinação do Caminho Crítico

Caminho Crítico: é o caminho mais longo percorrido pela rede para a finalização de um projeto

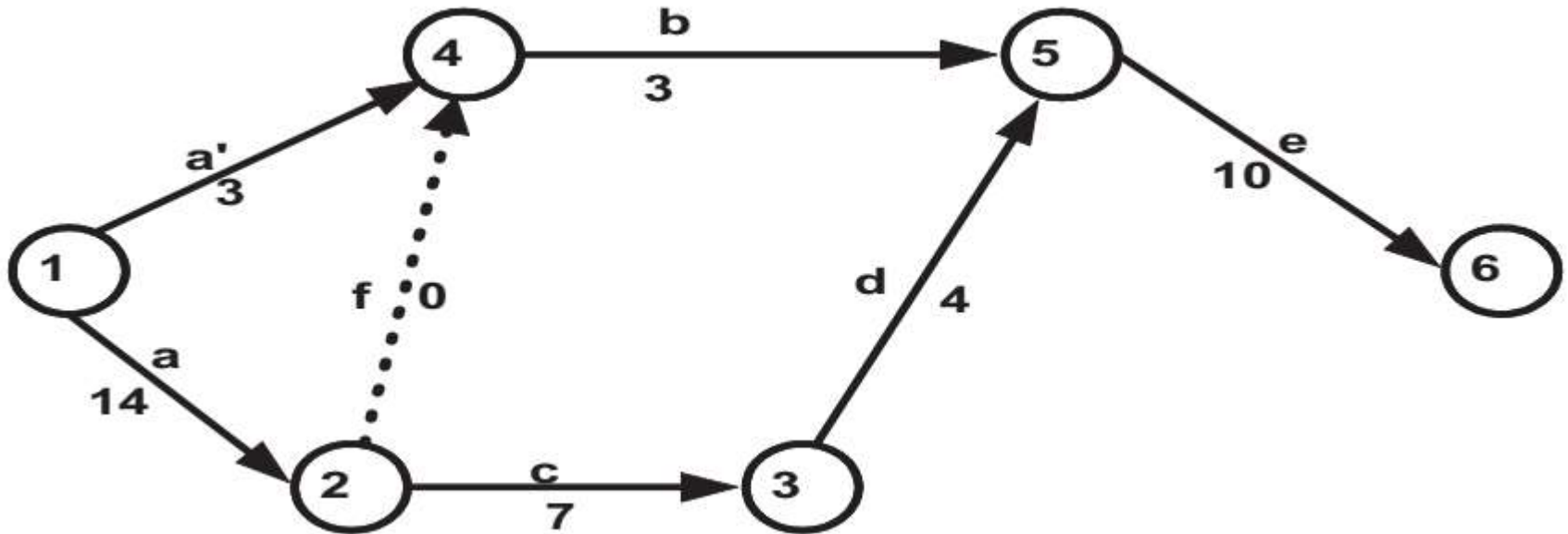
Data de Início do projeto: É a data em que o projeto inicia. Como teremos que fazer contas com datas, o que é trabalhoso e enfadonho, vamos trabalhar com datas absolutas. Desta forma, daqui para a frente, esta data será sempre igual a 0.

Data mais cedo de início de uma atividade: É a data mais cedo possível em que uma atividade pode começar. Em inglês é usada a sigla E.S, que é a abreviação de *Early Start*.

Data mais cedo de fim de uma atividade: É a data mais cedo em que uma atividade pode acabar. Em inglês é usada a sigla E.F, que é a abreviação de *Early Finish*.

Determinação do Caminho Crítico

Retomando o Exemplo





Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14					
1 – 4	3					
2 – 4	0					
2 – 3	7					
4 – 5	3					
3 – 5	4					
5 – 6	10					



Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14			
1 – 4	3	0	3			
2 – 4	0	14	14			
2 – 3	7	14	21			
4 – 5	3					
3 – 5	4					
5 – 6	10					



Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14			
1 – 4	3	0	3			
2 – 4	0	14	14			
2 – 3	7	14	21			
4 – 5	3	14	17			
3 – 5	4	21	25			
5 – 6	10					



Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14			
1 – 4	3	0	3			
2 – 4	0	14	14			
2 – 3	7	14	21			
4 – 5	3	14	17			
3 – 5	4	21	25			
5 – 6	10	25	35			



Determinação do Caminho Crítico

Data mais tarde de início de uma atividade: É a data mais tarde em que uma atividade pode começar sem comprometer a duração do projeto. Em inglês é usada a sigla L.S, que é a abreviação de *Latest Start*.

Data mais tarde de fim de uma atividade: É a data mais tarde em que uma atividade pode acabar sem comprometer a duração do projeto. Em inglês é usada a sigla L.F, que é a abreviação de *Latest Finish*.



Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14			
1 – 4	3	0	3			
2 – 4	0	14	14			
2 – 3	7	14	21			
4 – 5	3	14	17	22	25	
3 – 5	4	21	25	21	25	
5 – 6	10	25	35	25	35	



Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14			
1 – 4	3	0	3	19	22	
2 – 4	0	14	14	22	22	
2 – 3	7	14	21	14	21	
4 – 5	3	14	17	22	25	
3 – 5	4	21	25	21	25	
5 – 6	10	25	35	25	35	



Determinação do Caminho Crítico

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14	0	14	
1 – 4	3	0	3	19	22	
2 – 4	0	14	14	22	22	
2 – 3	7	14	21	14	21	
4 – 5	3	14	17	22	25	
3 – 5	4	21	25	21	25	
5 – 6	10	25	35	25	35	



Determinação do Caminho Crítico

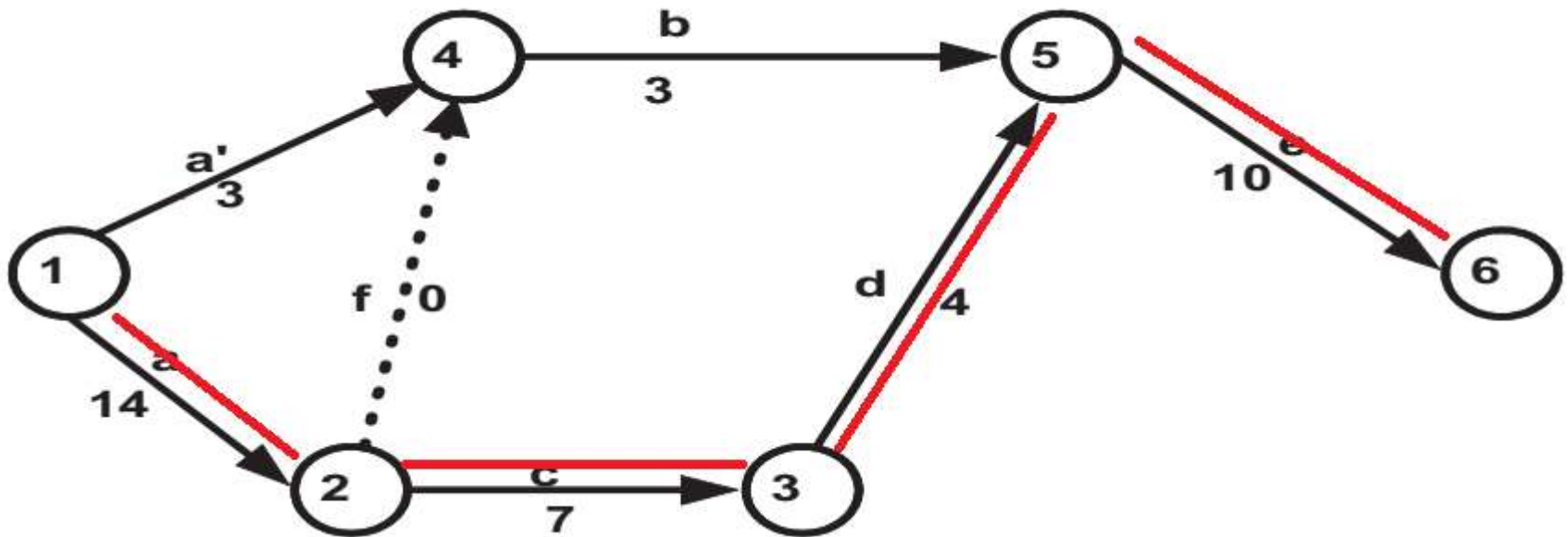
Folga Total é quanto uma atividade pode ser atrasada sem atrasar a data de fim do projeto.

Atividade	Duração	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	14	0	14	0	14	0
1 – 4	3	0	3	19	22	19
2 – 4	0	14	14	22	22	8
2 – 3	7	14	21	14	21	0
4 – 5	3	14	17	22	25	8
3 – 5	4	21	25	21	25	0
5 – 6	10	25	35	25	35	0

As atividades com folga total igual a zero são as chamadas atividades críticas e formam o chamado **caminho crítico**.

Qualquer atraso em uma dessas atividades implicará em atraso na duração do projeto.

Determinação do Caminho Crítico





O Modelo PERT

D_o $\Rightarrow$ Duração Otimista, ou seja, a duração mais provável se a execução da atividade não tiver nenhum problema. Em termos estatísticos, é uma estimativa para o limite inferior da distribuição de probabilidade da duração da atividade.

D_p $\Rightarrow$ Duração Pessimista, ou seja, a duração mais provável se a execução da atividade tiver problemas. Em termos estatísticos, é uma estimativa para o limite superior da distribuição probabilística.

D_m $\Rightarrow$ Duração Mais Provável, ou seja, a duração provável se a execução da atividade for realizada em condições normais. É uma estimativa para a moda (ponto mais alto) da distribuição de probabilidade.



O Modelo PERT

Estudos realizados indicaram que a Distribuição Beta era a que melhor se adaptava às durações reais da maioria das atividades de um grande número de projetos examinados.

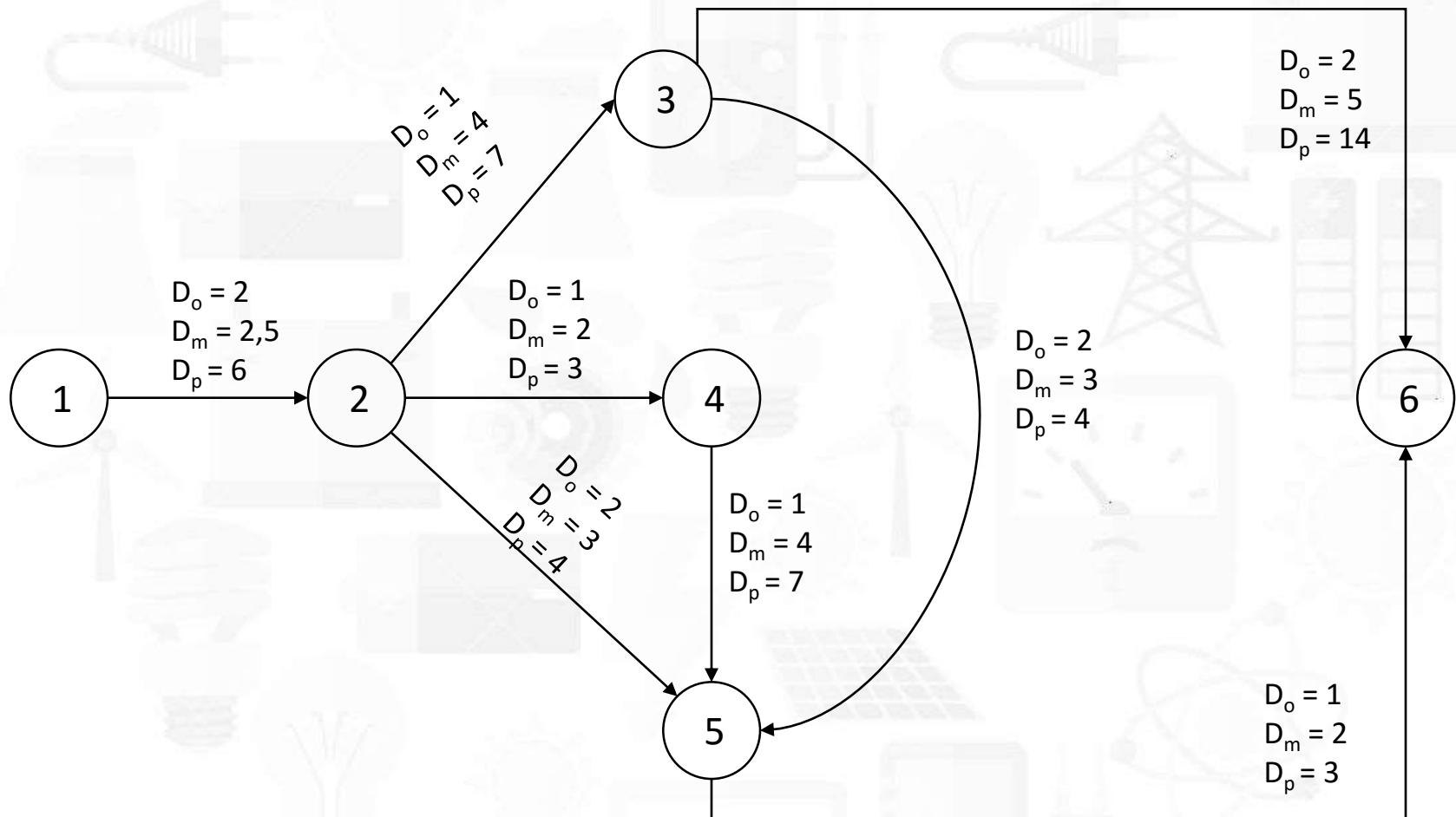
Podemos resumir então a premissa básica do modelo PERT: A duração de uma atividade é uma variável aleatória que segue a chamada Distribuição Beta que tem os seguintes parâmetros:

$$\text{Média} = \text{Duração Esperada } (D_e) = \frac{D_o + 4 \cdot D_m + D_p}{6}$$

$$\text{Variância} = \sigma^2 = \left(\frac{D_p - D_o}{6} \right)^2$$

O Modelo PERT

Exemplo:



O Modelo PERT

Atividade	Duração (dias)		
	D_o	D_m	D_p
1 – 2	2	2,5	6
2 – 3	1	4	7
2 – 5	2	3	4
2 – 4	1	2	3
4 – 5	1	4	7
3 – 5	2	3	4
5 – 6	1	2	3
3 – 6	2	5	14

O Modelo PERT

	Duração (dias)				
Atividade	D_o	D_m	D_p	D_e	σ^2
1 – 2	2	2,5	6	3	0,444
2 – 3	1	4	7	4	1
2 – 5	2	3	4	3	0,111
2 – 4	1	2	3	2	0,111
4 – 5	1	4	7	4	1
3 – 5	2	3	4	3	0,111
5 – 6	1	2	3	2	0,111
3 – 6	2	5	14	6	4



O Modelo PERT

Atividade	D_e	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	3	0	3	0	3	0
2 – 3	4	3	7	3	7	0
2 – 5	3	3	6	8	11	5
2 – 4	2	3	5	5	7	2
4 – 5	4	5	9	7	11	2
3 – 5	3	7	10	8	11	1
5 – 6	2	10	12	11	13	1
3 – 6	6	7	13	7	13	0

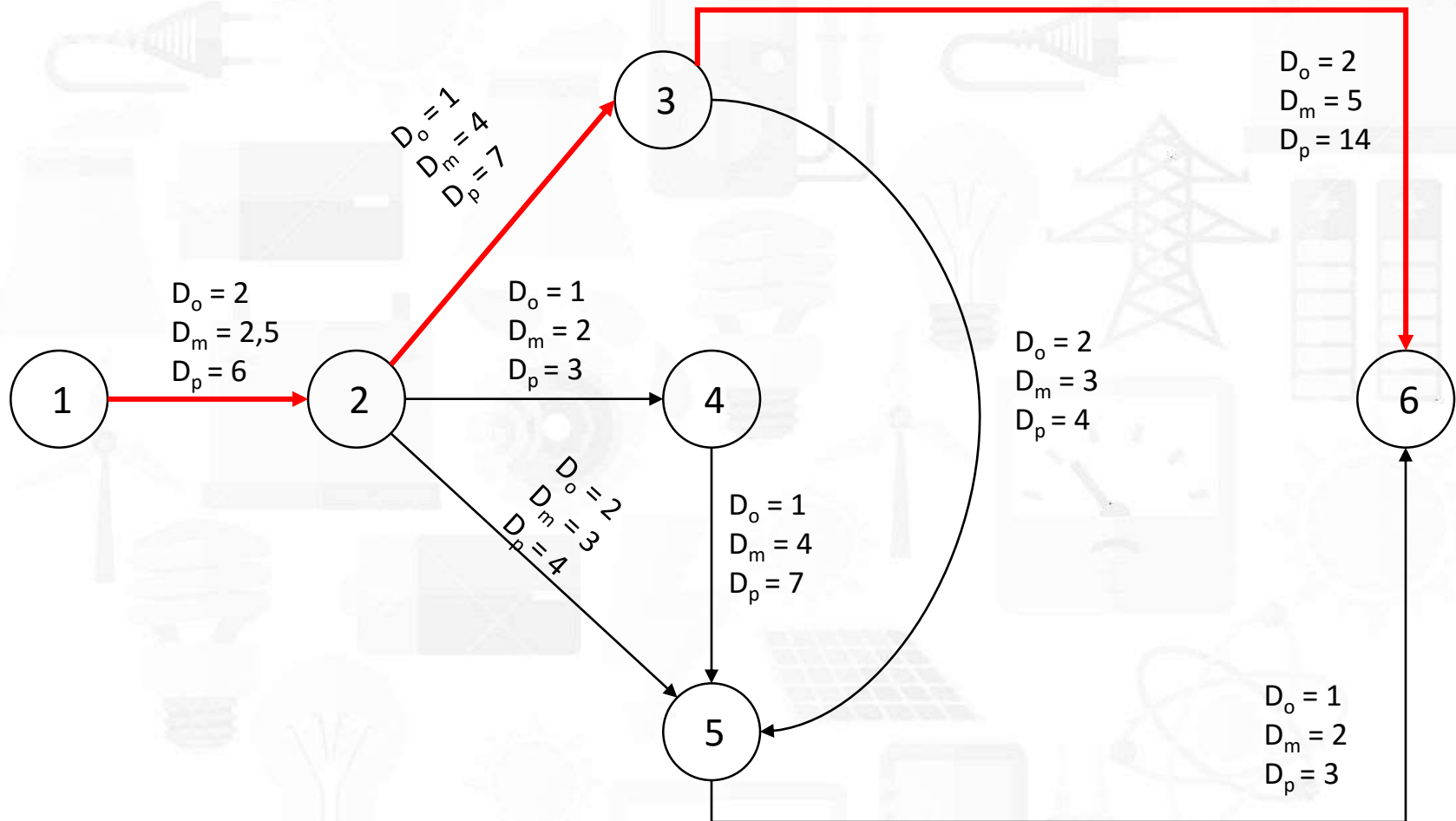
Duração esperada do projeto: $D_{ep} = 13 \text{ dias}$

$\sigma^2 = \text{Variância do projeto} = \sum \sigma^2$ das atividades do caminho crítico

$$\sigma^2 = 5,444$$

O Modelo PERT

Caminho Crítico:





O Modelo PERT

Considerando que a duração de uma atividade é independente da duração de cada uma das outras atividades do projeto, ou seja, a variável aleatória “duração da atividade” é uma variável aleatória independente, temos que a duração esperada do projeto (D_{ep}) é a soma das durações das atividades do caminho crítico, ou seja é a soma de variáveis aleatórias independentes.

Pelo teorema do Limite Central, uma variável aleatória que é a soma de variáveis aleatórias, segue a Distribuição Normal.

Desta forma, no modelo PERT, a duração do projeto é uma variável aleatória que segue a Distribuição Normal com:

$$\text{Média} = \mu = D_{ep}$$

$$\text{Desvio Padrão} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$



O Modelo PERT

No nosso exemplo:

$$\mu = 13$$

$$\sigma = \sqrt{5,444} = 2,333$$

Respondendo outros tipos de perguntas:

- Qual a probabilidade do projeto demorar mais de 14 dias?

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{14 - 13}{2,333} = 0,43$$

$$\Pr(\textit{duração} > 14) = 0,5 - 0,1664 = 0,3336$$

A probabilidade do projeto demorar mais de 14 dias é de **33,36%**



O Modelo PERT

- Qual deve ser a duração do projeto para que o risco do não cumprimento do Prazo seja de 5%?

$$\Pr(Duração > x) = 0,05$$

$$\Pr(Duração < x) = 0,45$$

$$1,645 = \frac{x-13}{2,333} = 16,97 \text{ dias}$$



Problemas do Modelo PERT

- 1) Estimar, com precisão, durações para atividades de um projeto não é, via de regra, tarefa das mais simples. Estimar 3 durações para cada atividade é, obviamente, uma tarefa muito mais difícil.
- 2) O postulado básico no qual o modelo PERT está baseado, ou seja de que as atividades de um projeto são independentes entre si, é difícil de ser justificado. O mais comum em um projeto é a execução de uma atividade acabar influenciando a execução de outras.



Problemas do Modelo PERT

- 3) O outro postulado do modelo PERT de que as durações das variáveis seguem uma distribuição beta tem sido contestado, com inúmeros exemplos já publicados.
- 4) Pela própria natureza do modelo PERT, um caminho crítico pode deixar de ser crítico se, por exemplo, as atividades de um outro caminho começarem, por algum problema, a serem executadas na duração pessimista. Como os resultados, por exemplo a duração esperada do projeto, foram calculados em cima do caminho crítico “original”, os resultados teriam que ser todos recalculados.



O Modelo CPM

Como visto anteriormente, o enfoque principal do CPM é controlar os custos do projeto. Está baseado na ideia de que se colocarmos mais recursos na execução de uma atividade, conseguiremos fazê-la mais rapidamente, embora aumentando o seu custo.

É usado em projetos onde a duração das atividades é conhecida com bastante precisão, como projetos de construção civil, por exemplo.

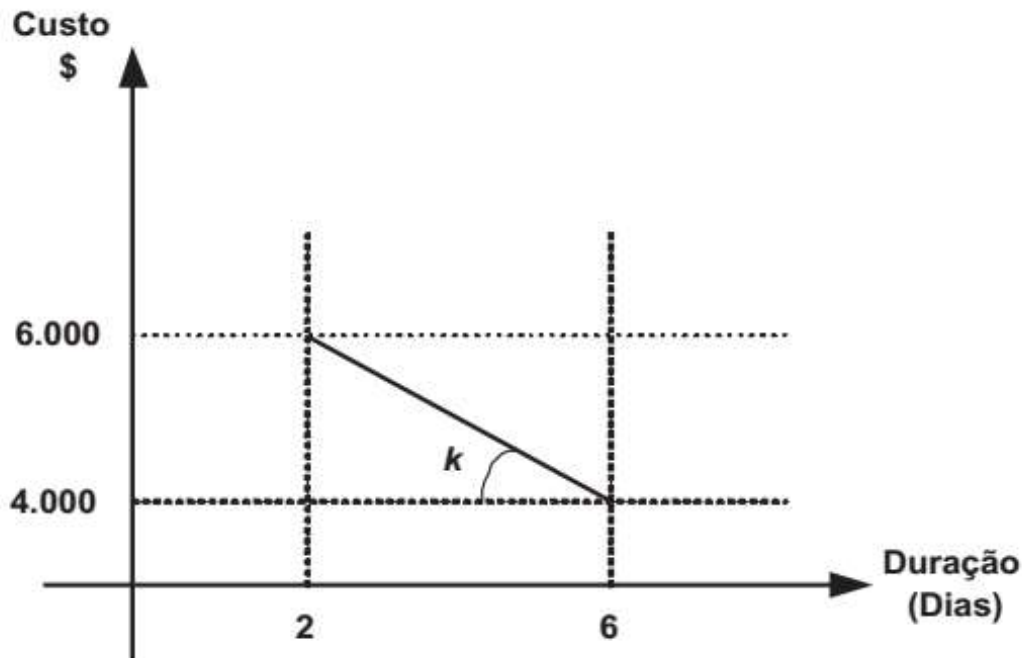
No CPM, para cada atividade, são feitas 2 estimativas de duração que estão associadas a 2 custos:

- a) **Duração Normal (D_n)**, que tem associado o chamado **Custo Normal (C_n)**.
- b) **Duração Acelerada (D_a)**, que tem associado o chamado **Custo Acelerado (C_a)**.



Relações entre Duração/Custo

Seja, por exemplo, uma atividade cuja duração normal é de 6 dias com custo normal de \$4.000. Vamos supor que sua duração acelerada seja de 2 dias e seu custo acelerado seja de \$6.000.



Coeficiente angular

$$\tan k = \frac{C_a - C_n}{D_n - D_a}$$

$$\tan k = \frac{6000 - 4000}{6 - 2}$$

$$\tan k = 500$$



Compressão da Rede

Vamos ver o uso do modelo CPM aplicado a um projeto cujos dados estão a seguir:

Atividade	Duração (semanas)		Custo (\$)	
	Normal	Acelerada	Normal	Acelerado
1 – 2	6	3	4.000	5.000
1 – 3	6	2	4.000	6.000
2 – 4	7	5	4.000	6.000
3 – 4	5	2	4.000	6.000
2 – 5	5	3	3.000	6.000
4 – 5	9	6	5.000	10.000
4 – 6	6	4	3.000	6.000
5 – 7	4	1	2.000	5.000
6 – 7	2	1	2.000	4.000



Compressão da Rede

Podemos calcular para cada atividade o seu Custo Incremental:

Atividade	Custo Incremental $(C_a - C_n)/(D_a - D_n)$
1 – 2	333
1 – 3	500
2 – 4	1.000
3 – 4	667
2 – 5	1.500
4 – 5	1.667
4 – 6	1.500
5 – 7	1.000
6 – 7	2.000



Compressão da Rede

Usando a duração/custo **normal**, construímos o quadro PERT:

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	6	0	6	0	6	0
1 – 3	6	0	6	2	8	2
2 – 4	7	6	13	6	13	0
3 – 4	5	6	11	8	13	2
2 – 5	5	6	11	17	22	11
4 – 5	9	13	22	13	22	0
4 – 6	6	13	19	18	24	5
5 – 7	4	22	26	22	26	0
6 – 7	2	19	21	24	26	5

Duração = 26 semanas

Caminho Crítico: (1-2), (2-4), (4-5), (5-7)

Custo = \$ 31.000



Compressão da Rede

No processo precisaremos das seguintes definições:

Δt = número de unidades de tempo que a atividade ainda pode ser reduzida.

Folga Mínima = É a menor folga diferente de zero que aparece no quadro PERT.

Atividade	Custo Incremental	Δt
1 – 2	333	3
2 – 4	1.000	
4 – 5	1.667	
5 – 7	1.000	

Como podemos observar, a atividade (1 – 2) é a mais barata para ser acelerada. Surge então a pergunta: Quanto podemos acelerar (1 – 2) ? O máximo que pode ser acelerado é o mínimo entre o Δt da atividade e a Folga Mínima.

Logo o máximo que podemos acelerar (1 – 2) é:

$\text{Min}(\Delta t, \text{Folga Mínima}) = \text{Min}(3, 2) = 2$ semanas.



Compressão da Rede

Calculando o quadro PERT com a nova duração de (1 – 2) temos:

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Inicio	Fim	Inicio	Fim	
1 – 2	4	0	4	0	4	0
1 – 3	6	0	6	0	6	0
2 – 4	7	4	11	4	11	0
3 – 4	5	6	11	6	11	0
2 – 5	5	4	9	15	20	11
4 – 5	9	11	20	11	20	0
4 – 6	6	11	17	16	22	5
5 – 7	4	20	24	20	24	0
6 – 7	2	17	19	22	24	5

Duração: 24 semanas

Caminhos Críticos: (1 – 2) (2 – 4) (4 – 5) (5 – 7)
(1 – 3) (3 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

Custo = 31.000 + 2 × 333 = \$31.666



Compressão da Rede

Agora temos 2 caminhos críticos. Para diminuir a duração do projeto temos que reduzir o comprimento dos 2 caminhos críticos.

Atividade	Custo Incremental	Δt
(1 – 2) (1 – 3)	$333 + 500 = 833$	1 e 4
(1 – 2) (3 – 4)	$333 + 667 = 1.000$	
(2 – 4) (1 – 3)	$1.000 + 500 = 1.500$	
(2 – 4) (3 – 4)	$1.000 + 667 = 1.667$	
(4 – 5)	1.667	
(5 – 7)	1.000	

$\text{Min} [\Delta t \text{ de } (1-2), \Delta t \text{ de } (1-3), \text{Folga M\u00ednima}] = \text{Min}(1,4,5) = 1 \text{ semana.}$



Compressão da Rede

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	3	0	3	0	3	0
1 – 3	5	0	5	0	5	0
2 – 4	7	3	10	3	10	0
3 – 4	5	5	10	5	10	0
2 – 5	5	3	8	14	19	11
4 – 5	9	10	19	10	19	0
4 – 6	6	10	16	15	21	5
5 – 7	4	19	23	19	23	0
6 – 7	2	16	18	21	23	5

Duração: 23 semanas

Caminhos Críticos: (1 – 2) (2 – 4) (4 – 5) (5 – 7)
(1 – 3) (3 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

Custo = $31.666 + 1 \times 833 = \32.500



Compressão da Rede

Atividade	Custo Incremental	Δt
(2 - 4) (1 - 3)	$1.000 + 500 = 1.500$	
(2 - 4) (3 - 4)	$1.000 + 667 = 1.667$	
(4 - 5)	1.667	
(5 - 7)	1.000	3



Compressão da Rede

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	3	0	3	0	3	0
1 – 3	5	0	5	0	5	0
2 – 4	7	3	10	3	10	0
3 – 4	5	5	10	5	10	0
2 – 5	5	3	8	14	19	11
4 – 5	9	10	19	10	19	0
4 – 6	6	10	16	12	18	2
5 – 7	1	19	20	19	20	0
6 – 7	2	16	18	18	20	2

Duração: 20 semanas

Caminhos Críticos: (1 – 2) (2 – 4) (4 – 5) (5 – 7)
(1 – 3) (3 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

Custo = 32.500 + 3 × 1.000 = \$35.500



Compressão da Rede

Atividade	Custo Incremental	Δt
(2 - 4) (1 - 3)	$1.000 + 500 = 1.500$	2 e 3
(2 - 4) (3 - 4)	$1.000 + 667 = 1.667$	
(4 - 5)	1.667	



Compressão da Rede

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	3	0	3	0	3	0
1 – 3	3	0	3	0	3	0
2 – 4	5	3	8	3	8	0
3 – 4	5	3	8	3	8	0
2 – 5	5	3	8	12	17	9
4 – 5	9	8	17	8	17	0
4 – 6	6	8	14	10	16	2
5 – 7	1	17	18	17	18	0
6 – 7	2	14	16	16	18	2

Duração: 18 semanas

Caminhos Críticos: (1 – 2) (2 – 4) (4 – 5) (5 – 7)
(1 – 3) (3 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

Custo = $35.500 + 2 \times 1.500 = \38.500



Compressão da Rede

Atividade	Custo Incremental	Δt
(4 – 5)	1.667	3

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	3	0	3	0	3	0
1 – 3	3	0	3	0	3	0
2 – 4	5	3	8	3	8	0
3 – 4	5	3	8	3	8	0
2 – 5	5	3	8	10	15	7
4 – 5	7	8	15	8	15	0
4 – 6	6	8	14	8	14	0
5 – 7	1	15	16	15	16	0
6 – 7	2	14	16	14	16	0

Duração: 16 semanas

Caminhos Críticos: (1 – 2) (2 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

(1 – 2) (2 – 4) (4 – 6) (6 – 7)

(1 – 3) (3 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

(1 – 3) (3 – 4) (4 – 6) (6 – 7)

Custo = $38.500 + 2 \times 1.667 = \41.833



Compressão da Rede

Atividade	Custo Incremental	Δt
(4 - 5) (4 - 6)	$1.667 + 1.500 = 3.167$	1 e 2
(4 - 5) (6 - 7)	$1.667 + 2.000 = 3.667$	



Compressão da Rede

Atividade	Dur	Data mais cedo		Data mais tarde		Folga Total
		Início	Fim	Início	Fim	
1 – 2	3	0	3	0	3	0
1 – 3	3	0	3	0	3	0
2 – 4	5	3	8	3	8	0
3 – 4	5	3	8	3	8	0
2 – 5	5	3	8	9	14	6
4 – 5	6	8	14	8	14	0
4 – 6	5	8	13	8	13	0
5 – 7	1	14	15	14	15	0
6 – 7	2	13	15	13	15	0

Duração: 15 semanas

Caminhos Críticos: (1 – 2) (2 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

(1 – 2) (2 – 4) (4 – 6) (6 – 7)

(1 – 3) (3 – 4) (4 – 5) (5 – 7)

(1 – 3) (3 – 4) (4 – 6) (6 – 7)

Custo = $41.833 + 1 \times 3.167 = \45.000



Compressão da Rede

Vamos ver o uso do modelo CPM aplicado a um projeto cujos dados estão a seguir:

Atividade	Duração (semanas)		Custo (\$)	
	Normal	Acelerada	Normal	Acelerado
1 – 2	6	3	4.000	5.000
1 – 3	6	2	4.000	6.000
2 – 4	7	5	4.000	6.000
3 – 4	5	2	4.000	6.000
2 – 5	5	3	3.000	6.000
4 – 5	9	6	5.000	10.000
4 – 6	6	4	3.000	6.000
5 – 7	4	1	2.000	5.000
6 – 7	2	1	2.000	4.000



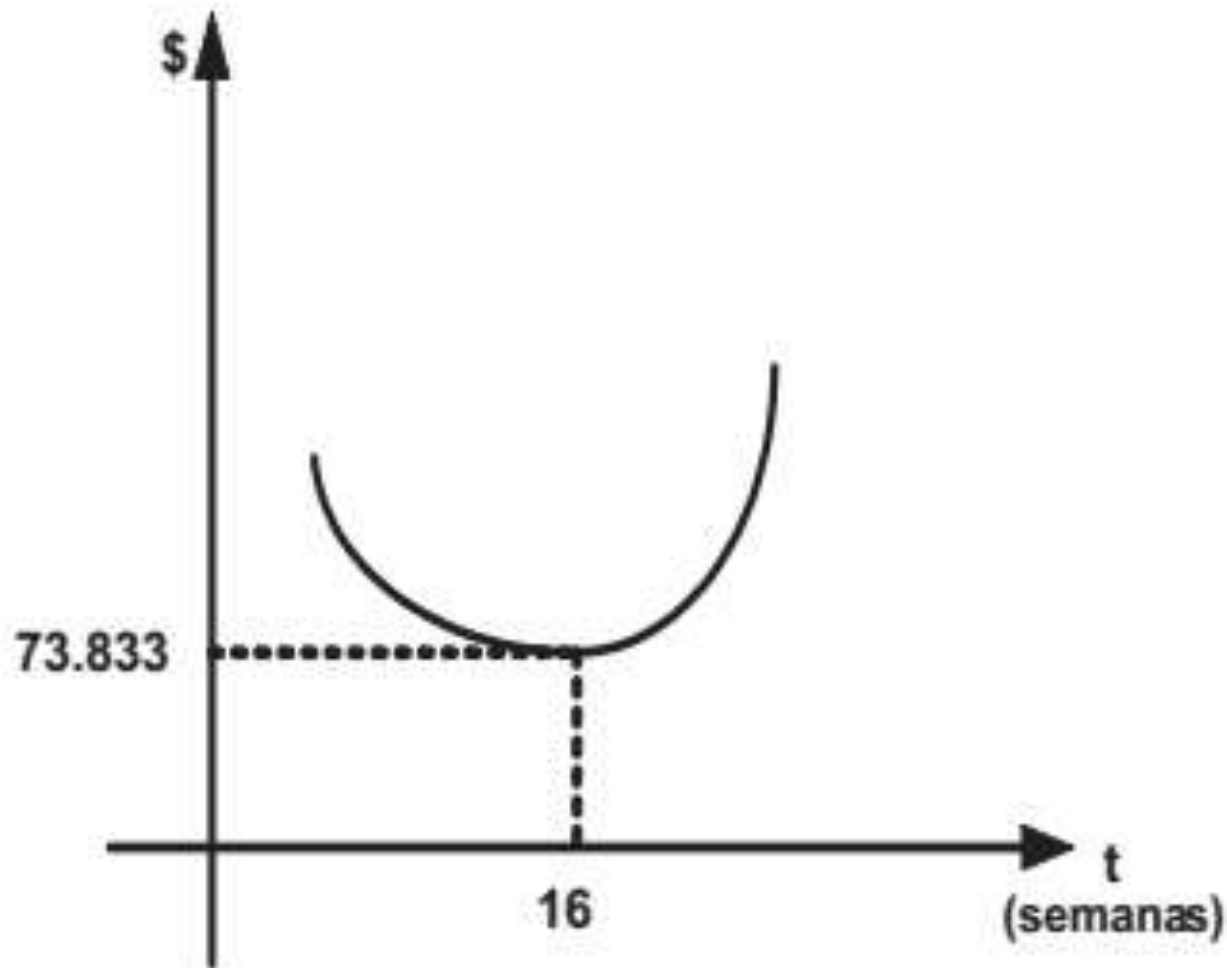
Duração Ótima para o Projeto

Exemplo: Vamos supor que no exemplo visto até aqui, os custos indiretos sejam de \$2.000 por semana, existindo ainda uma multa contratual de \$2.000 por semana que o projeto passar de 20 semanas.

Duração (semanas)	Custos		Multa	Custo total
	Diretos	Indiretos		
26	31.000	52.000	12.000	95.000
24	31.666	48.000	8.000	87.666
23	32.500	46.000	6.000	84.500
20	35.500	40.000	–	75.500
18	38.500	36.000	–	74.500
16	41.833	32.000	–	73.833
15	45.000	30.000	–	75.000



Duração Ótima para o Projeto





Resolvendo por Programação Linear

Exemplo:

Atividade	Duração (semanas)		Custo (\$)	
	Normal	Acelerada	Normal	Acelerado
1 – 2 (a)	14	6	1.400	3.200
1 – 3 (b)	12	8	1.000	4.000
2 – 5 (c)	18	14	1.600	3.000
2 – 4 (d)	6	4	800	4.000
3 – 4 (e)	4	2	400	500
4 – 5 (f)	8	6	400	900
5 – 6 (g)	12	8	800	2.500
			6.400	



Resolvendo por Programação Linear

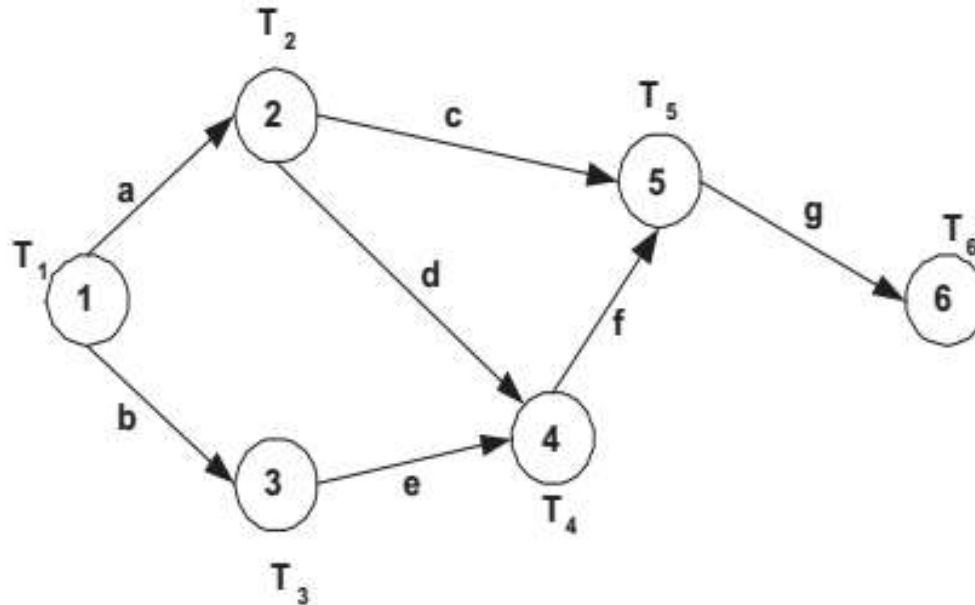
Atividade	Custo Incremental
1 – 2 (a)	225
1 – 3 (b)	750
2 – 5 (c)	350
2 – 4 (d)	1600
3 – 4 (e)	50
4 – 5 (f)	250
5 – 6 (g)	425



Resolvendo por Programação Linear

Duração	Custo
44 (Normal)	\$6.400
40	\$7.300
36	\$8.200
34	\$9.000
32	\$9.850
30	\$10.700
28	\$11.900

Resolvendo por Programação Linear



Definido as variáveis de decisão:

T_i = datas em que ocorrem os eventos

x_i = quanto a atividade i pode ser acelerada



Resolvendo por Programação Linear

Restrições:

$$x_a \leq 8$$

$$x_b \leq 4$$

$$x_c \leq 4$$

$$x_d \leq 2$$

$$x_e \leq 2$$

$$x_f \leq 2$$

$$x_g \leq 4$$

$$T_2 + x_a \geq 14$$

$$T_3 + x_b \geq 12$$

$$T_4 - T_2 + x_d \geq 6$$

$$T_4 - T_3 + x_e \geq 4$$

$$T_5 - T_2 + x_c \geq 18$$

$$T_5 - T_4 + x_f \geq 8$$

$$T_6 - T_5 + x_g \geq 12$$



Resolvendo por Programação Linear

Vamos supor que queremos encontrar o melhor custo para fazer o projeto em 34 semanas. Devemos colocar a restrição $T_6 = 34$.

Definindo a Função Objetivo:

$$(Min)Z = 225x_a + 750x_b + 350x_c + 1600x_d + 50x_e + 250x_f + 425x_g$$



Resolvendo por Programação Linear

Resolvendo pelo LINGO:



Lindo Model - AULA PERT

```
MIN 225Xa + 750Xb + 350Xc + 1600Xd + 50Xe + 250Xf + 425Xg
S.T.
Xa<=8
Xb<=4
Xc<=4
Xd<=2
Xe<=2
Xf<=2
Xg<=4
T6=34
T2+Xa>=14
T3+Xb>=12
T4-T2+Xd>=6
T4-T3+Xe>=4
T5-T2+Xc>=18
T5-T4+Xf>=8
T6-T5+Xg>=12
```



Resolvendo por Programação Linear

Resolvendo pelo LINGO:

Solution Report - AULA PERT		
Global optimal solution found.		
Objective value:	2600.000	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	2	
Model Class:	LP	
Total variables:	11	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	15	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	32	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
XA	8.000000	0.000000
XB	0.000000	700.0000
XC	2.000000	0.000000
XD	0.000000	1600.000
XE	2.000000	0.000000
XF	0.000000	200.0000
XG	0.000000	25.00000
T6	34.00000	0.000000
T2	6.000000	0.000000
T3	12.00000	0.000000
T4	14.00000	0.000000
T5	22.00000	0.000000