LOM3100 Dinâmica - 2018

2. Cinemática do corpo rígido.

Movimento de corpo rígido

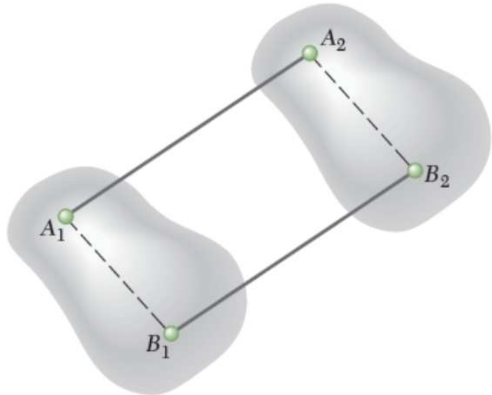


Figura 15.1

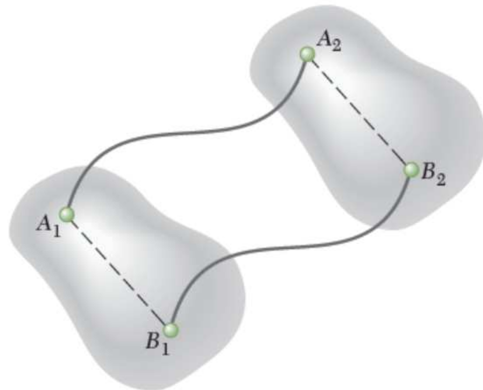


Figura 15.2

1. *Translação.* Um movimento é denominado uma translação se qualquer linha reta dentro do corpo mantiver a mesma direção durante o movimento. Pode-se observar também que em uma translação todas as partículas que constituem o corpo movem-se ao longo de trajetórias paralelas. Se essas trajetórias são linhas retas, o movimento é denominado *translação retilínea* (Fig. 15.1); se as trajetórias são linhas curvas, o movimento é uma *translação curvilínea* (Fig. 15.2).
2. *Rotação em torno de um eixo fixo.* Nesse movimento, as partículas que constituem o corpo rígido movem-se em planos paralelos ao longo de círculos centrados em um mesmo eixo fixo (Fig. 15.3). Se esse eixo, denominado *eixo de rotação,* intercepta o corpo rígido, as partículas localizadas sobre o eixo têm velocidade e aceleração nulas.

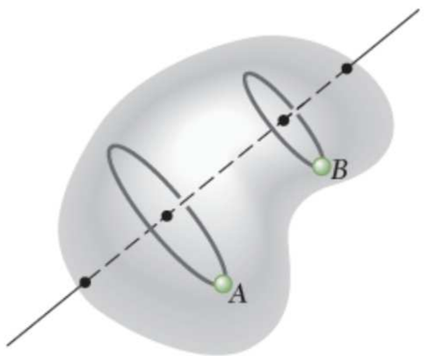


Figura 15.3

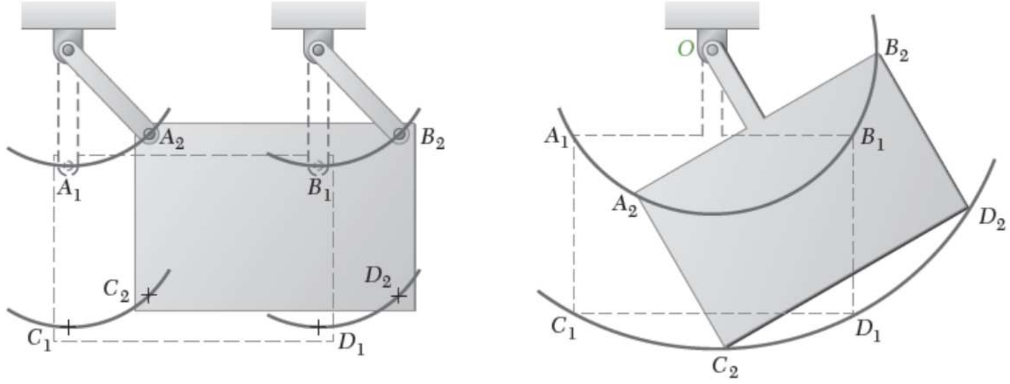
Movimento de corpo rígido

A rotação não deve ser confundida com certos tipos de translação curvilínea. Por exemplo, a placa mostrada na Fig. 15.4*a* está em translação curvilínea, com todas as suas partículas movendo-se ao longo de círculos *paralelos*, ao passo que a placa mostrada na Fig. 15.4*b* está em rotação, com todas as suas partículas movendo-se ao longo de círculos *concêntricos*.

No primeiro caso, qualquer linha reta desenhada sobre a placa manterá a mesma direção, enquanto, no segundo caso, o ponto O permanecerá fixo.

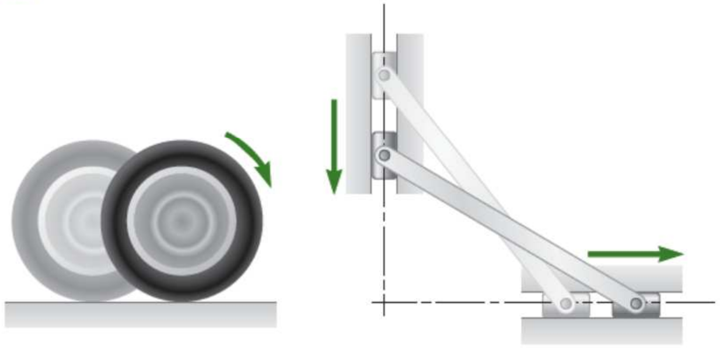
Uma vez que cada partícula move-se em um dado plano, a rotação de um corpo em torno de um eixo fixo é denominada um *movimento plano*.

3. *Movimento plano geral.* Existem muitos outros tipos de movimento plano, isto é, movimentos em que todas as partículas do corpo movem-se em planos paralelos. Todo movimento plano que não seja nem uma rotação nem uma translação é referido como um movimento plano geral. Dois exemplos de movimento plano geral estão ilustrados na Fig. 15.5.
4. *Movimento em torno de um ponto fixo.* O movimento tridimensional de um corpo rígido ligado a um ponto fixo O, como, por exemplo, o movimento de um pião sobre um piso áspero (Fig. 15.6), é conhecido como movimento em torno de um ponto fixo.
5. *Movimento geral.* Qualquer movimento que não se enquadre em alguma das categorias anteriores é referido como movimento geral.



(*a*) Translação curvilínea (*b*) Rotação

Figura 15.4



(*a*) Roda rolante (*b*) Barra deslizante

Figura 15.5

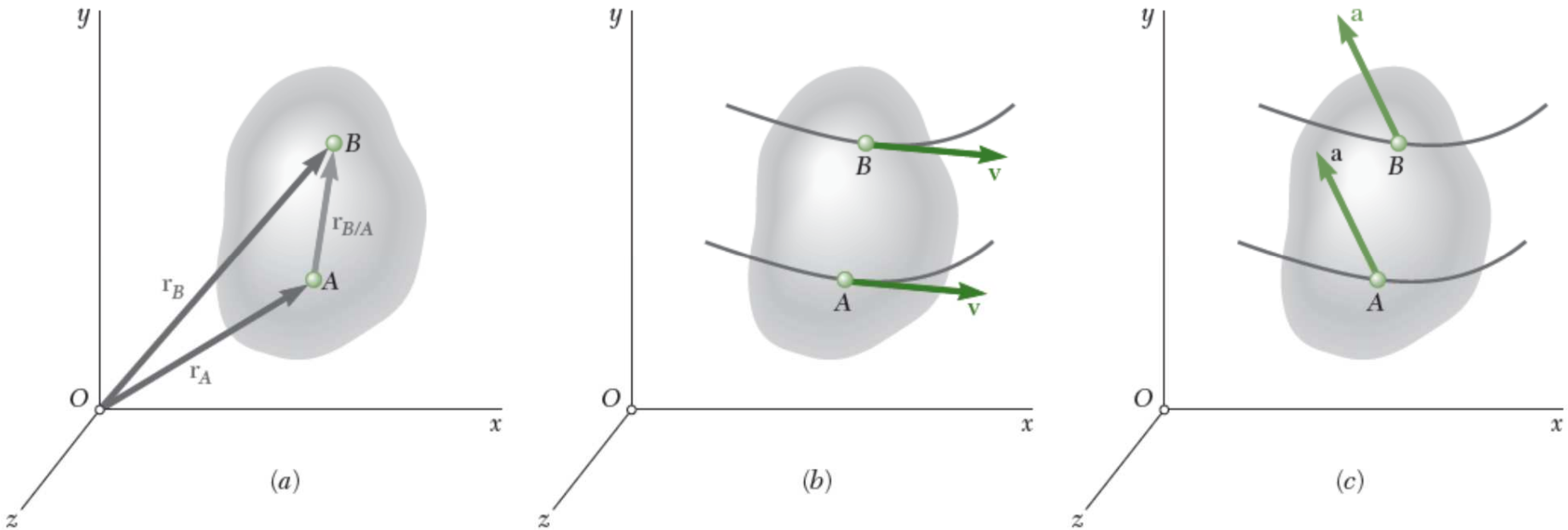
Figura 15.6

Translação de corpo rígido

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Logo, *quando um corpo rígido está em translação, todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade e a mesma aceleração em qualquer instante dado* (Fig. 15.7*b* e *c*). No caso de translação curvilínea, a velocidade e a aceleração variam tanto em direção como em intensidade a todo instante. No caso de translação retilínea, todas as partículas do corpo movem-se ao longo de linhas retas paralelas e suas velocidade e aceleração mantêm a mesma direção durante todo o movimento.



(*a*) (*b*) (*c*)

Rotação em torno de um eixo fixo

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} = 360°$$

Relembremos da Seção 11.9, que a velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ de uma partícula P é um vetor tangente à trajetória de P e de intensidade $v = ds/dt$. Observando que o comprimento Δs do arco descrito por P quando o corpo gira de um ângulo $\Delta\theta$ é

$$\Delta s = (BP)\ \Delta\theta = (r \operatorname{sen}\phi)\ \Delta\theta$$

e dividindo ambos os membros por Δt, obtemos no limite, com Δt tendendo a zero,

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \operatorname{sen}\phi \qquad (15.4)$$

onde $\dot{\theta}$ representa a derivada temporal de θ. (Observe que o ângulo θ depende da posição de P dentro do corpo, mas que a taxa de variação $\dot{\theta}$ é independente de P.) Concluímos que a velocidade $\mathbf{v}$ de P é um vetor perpendicular ao plano contendo AA' e $\mathbf{r}$, e de intensidade v definida por (15.4).

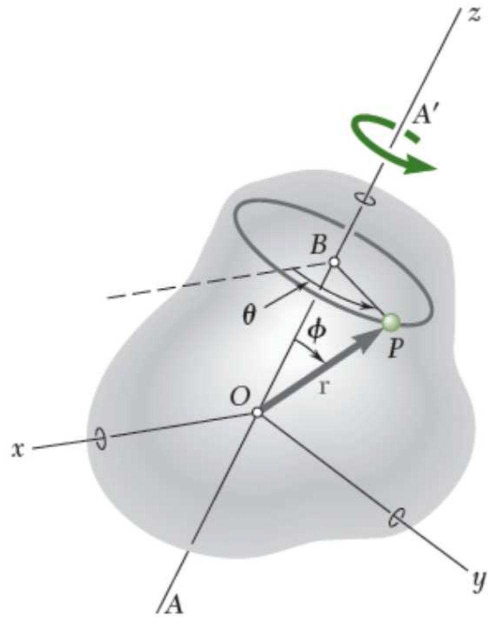


Foto 15.2 Para a engrenagem central que gira em torno de um eixo fixo, a velocidade e a aceleração angulares daquela engrenagem são vetores orientados ao longo do eixo vertical de rotação.

Rotação em torno de um eixo fixo

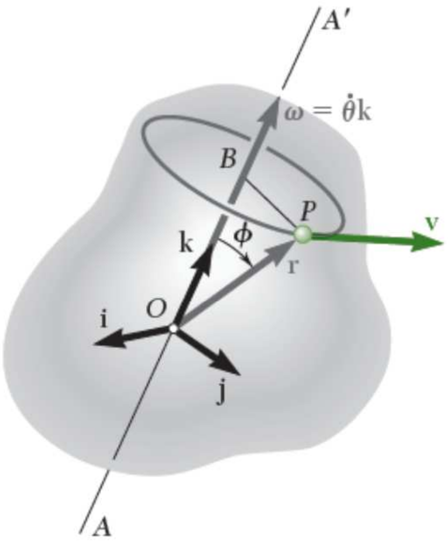


Figura 15.9

Mas esse é precisamente o resultado que obteríamos se desenhássemos ao longo de AA' um vetor $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ se efetuássemos o produto vetorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (Fig. 15.9). Escrevemos, então

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (15.5)$$

O vetor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \qquad (15.6)$$

orientado ao longo do eixo de rotação, é denominado *velocidade angular* do corpo, sendo igual em intensidade à taxa de variação $\dot{\theta}$ da coordenada angular; seu sentido pode ser obtido pela regra da mão direita

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \qquad (15.7)\\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\end{aligned}$$

O vetor $d\boldsymbol{\omega}/dt$ é representado por $\boldsymbol{\alpha}$ e é denominado *aceleração angular* do corpo. Considerando também a expressão para $\mathbf{v}$ em (15.5), temos:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (15.8)$$

Diferenciando (15.6) e lembrando que $\mathbf{k}$ é constante em intensidade e direção, temos

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \qquad (15.9)$$

Rotação em torno de um eixo fixo

Rotação de uma placa representativa. A rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo pode ser definida pelo movimento de uma placa representativa em um plano de referência perpendicular ao eixo de rotação. Vamos escolher o plano *xy* como plano de referência e admitir que ele coincide com o plano da figura, com o eixo *z* apontando para fora do papel (Fig. 15.10). Relembrando a partir da Eq. (15.6) que

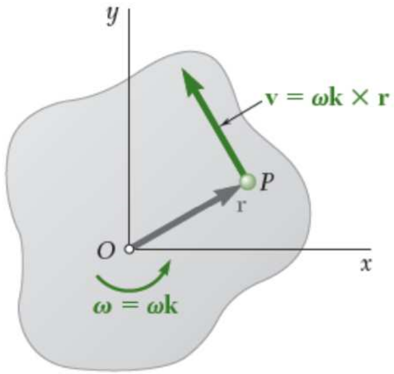


Figura 15.10

$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, verificamos que um valor positivo do escalar ω corresponde a uma rotação anti-horária da placa representativa e um valor negativo a uma rotação horária. Substituindo $\omega\mathbf{k}$ por $\boldsymbol{\omega}$ na Eq. (15.5), expressamos a velocidade de qualquer ponto *P* da placa como

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad (15.10)$$

Sendo os vetores **k** e **r** perpendiculares entre si, a intensidade da velocidade **v** é

$$v = r\omega \qquad (15.10')$$

e seu sentido pode ser obtido girando **r** 90° no sentido de rotação da placa.

Substituindo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ e $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ na Eq. (15.8) e observando que o produto vetorial de **r** por **k** duas vezes resulta em um giro de 180° do vetor **r**, expressamos a aceleração do ponto *P* como

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} \qquad (15.11)$$

Decompondo **a** em componentes tangencial e normal (Fig. 15.11), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} \qquad & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \qquad (15.11')$$

O componente tangencial $\mathbf{a}_t$ aponta para o sentido anti-horário se o escalar α é positivo e para o sentido horário se α é negativo. O componente normal $\mathbf{a}_n$ sempre aponta para o sentido oposto ao de **r**, ou seja, para *O*.

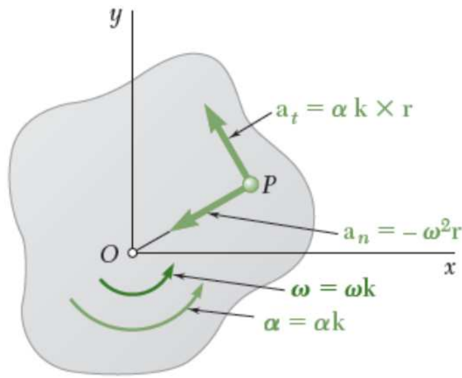


Figura 15.11

Rotação em torno de um eixo fixo

O movimento de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo AA' é considerado *conhecido* quando sua coordenada angular θ pode ser expressa como uma função conhecida de t. Na prática, porém, a rotação de um corpo rígido raramente é definida por uma relação entre θ e t. Mais frequentemente, as condições de movimento serão especificadas pelo tipo de aceleração angular do corpo. Por exemplo, α pode ser dada como uma função de t, como uma função de θ ou como uma função de ω. Retomando as relações (15.6) e (15.9), escrevemos

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

ou, resolvendo (15.12) para dt e substituindo em (15.13)

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Dois casos particulares de rotação são encontrados frequentemente:

1. *Rotação Uniforme.* Este caso é caracterizado pelo fato de que a aceleração angular é nula. Logo, a velocidade angular é constante e a coordenada angular é dada pela equação

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{15.15}$$

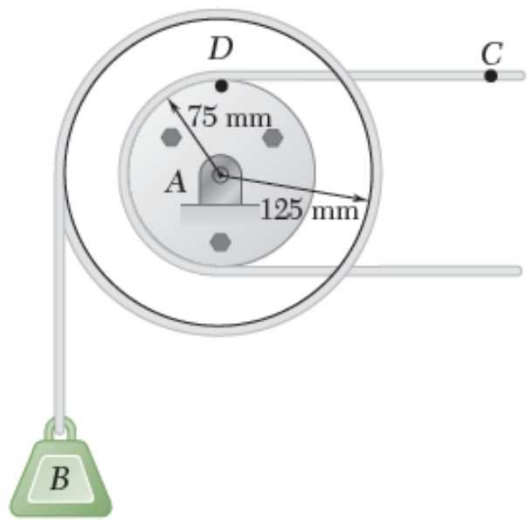
2. *Rotação Uniformemente Acelerada.* Neste caso, a aceleração angular é constante. As seguintes Eqs. que relacionam a velocidade angular, a coordenada angular e o tempo podem ser deduzidas de um modo similar àquele descrito na Seção 11.5. Fica claro a similaridade entre as fórmulas deduzidas aqui e aquelas obtidas para o movimento retilíneo uniformemente acelerado

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{15.16}$$

Deve-se enfatizar que a Eq. (15.15) só pode ser usada quando $\alpha = 0$, e que a Eq. (15.6) pode ser usada apenas quando $\alpha =$ constante. Em qualquer outro caso, as Eqs. (15.12) a (15.14) devem ser usadas.

PROBLEMA RESOLVIDO 15.1

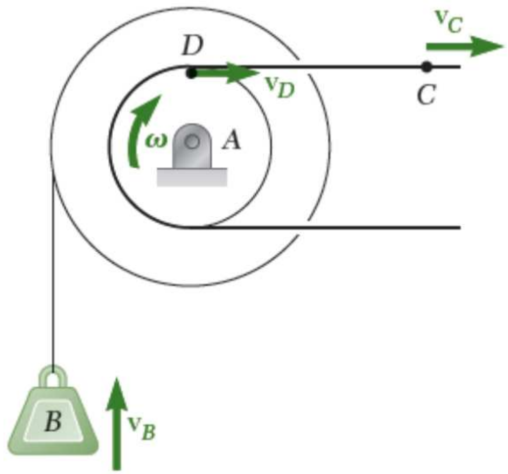
A carga B está conectada a uma polia dupla por um dos dois cabos inextensíveis mostrados na figura. O movimento da polia é controlado pelo cabo C, que tem uma aceleração constante de 225 mm/s^2 e uma velocidade inicial de 300 mm/s, ambas orientadas para a direita. Determine (a) o número de revoluções executadas pela polia em 2 s (b) a velocidade e a variação na posição da carga B após 2 s e (c) a aceleração do ponto D sobre o aro da polia interna em $t = 0$.



SOLUÇÃO

a. Movimento da polia. Como o cabo é inextensível, a velocidade do ponto D é igual à velocidade do ponto C e o componente tangencial da aceleração de D é igual à aceleração de C.

$$(\mathbf{v}_D)_0 = (\mathbf{v}_C)_0 = 300\,\text{mm/s} \rightarrow \qquad (\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 225\,\text{mm/s}^2 \rightarrow$$



Notando que a distância de D ao centro da polia é de 75 mm, escrevemos

$$(v_D)_0 = r\omega_0 \qquad 300\ \text{mm/s} = (75\,\text{mm})\omega_0 \qquad \omega_0 = 4\,\text{rad/s} \circlearrowright$$

$$(a_D)_t = r\alpha \qquad 225\,\text{mm/s}^2 = (75\,\text{mm})\alpha \qquad \boldsymbol{\alpha} = 3\,\text{rad/s}^2 \circlearrowright$$

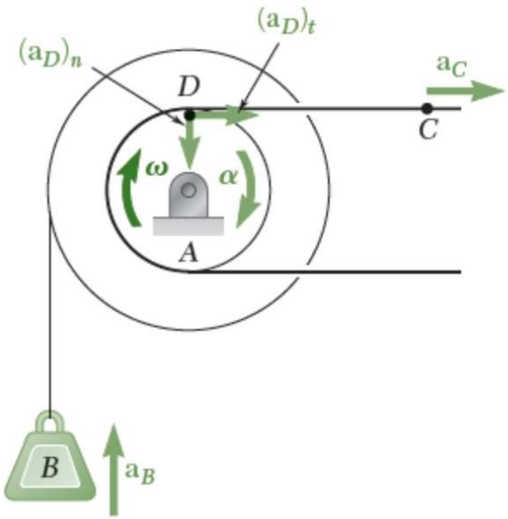
Usando as equações do movimento uniformemente acelerado, obtemos, para $t = 2$ s,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4\,\text{rad/s} + (3\,\text{rad/s}^2)(2\,\text{s}) = 10\,\text{rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} = 10\,\text{rad/s} \circlearrowright$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = (4\,\text{rad/s})(2\,\text{s}) + \tfrac{1}{2}(3\,\text{rad/s}^2)(2\,\text{s})^2 = 14\,\text{rad}$$

$$\theta = 14\,\text{rad} \circlearrowright$$



$$\text{Número de revoluções} = (14\,\text{rad})\left(\frac{1\,\text{rev}}{2\pi\,\text{rad}}\right) = 2{,}23\ \text{rev} \quad ◀$$

b. Movimento da carga *B*. Usando as seguintes relações entre movimento linear e angular, com $r = 125$ mm, escrevemos

$v_B = r\omega = (125 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}) = 1.250 \text{ mm/s}$ $\qquad$ $\mathbf{v}_B = 1{,}25 \text{ m/s}\uparrow$ ◀

$\Delta y_B = r\theta = (125 \text{ mm})(14 \text{ rad}) = 1.750 \text{ mm}$ $\quad$ $\Delta y_B = 1{,}75$ m para cima ↑ ◀

c. Aceleração do ponto *D* em *t* = 0. O componente tangencial de aceleração é

$$(\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 225 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$$

Como, em $t = 0$, $\omega_0 = 4$ rad/s, o componente normal da aceleração é

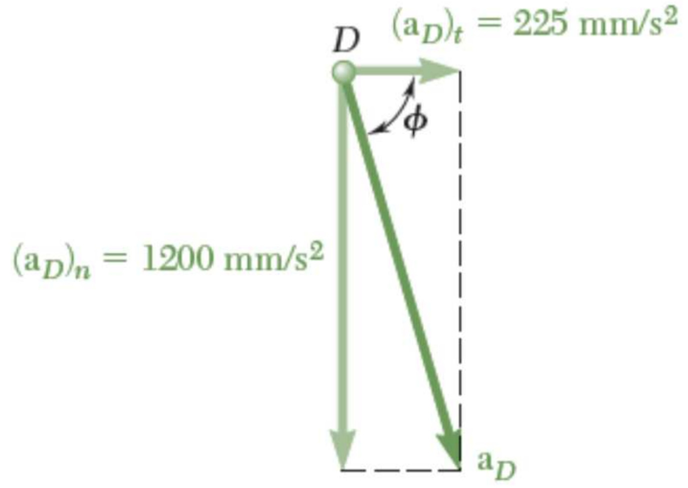
$$(a_D)_n = r_D\omega_0^2 = (75 \text{ mm})(4 \text{ rad/s})^2 = 1.200 \text{ mm/s}^2 \qquad (\mathbf{a}_D)_n = 1.200 \text{ mm/s}^2 \downarrow$$

A intensidade e direção da aceleração total pode ser obtida escrevendo-se

$$\text{tg}\,\phi = (1.200 \text{ mm/s}^2)/(225 \text{ mm/s}^2) \qquad \phi = 79{,}4°$$

$$a_D \text{ sen } 79{,}4° = 1.200 \text{ mm/s}^2 \qquad a_D = 1.220 \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_D = 1{,}22 \quad \text{m/s}^2 \measuredangle 79{,}4°$$ ◀



Cinemática do corpo rígido- exercícios

15.6 A aceleração angular de um disco oscilante é definida pela relação $\alpha = -k\theta$. Determine (*a*) o valor de k para o qual $\omega = 8$ rad/s, quando $\theta = 0$, e $\theta = 4$ rad, quando $\omega = 0$, (*b*) a velocidade angular do disco quando $\theta = 3$ rad.

15.7 Quando um motor elétrico é ligado, ele alcança sua velocidade nominal de 3.300 rpm em 6 s, e quando é desligado, o motor livre atinge o repouso em 40 s. Admitindo um movimento uniformemente acelerado, determine o número de revoluções que o motor executa (*a*) para alcançar sua velocidade nominal, (*b*) para atingir o repouso.

15.8 O rotor de uma turbina a gás está girando a uma velocidade de 6.900 rpm quando a turbina é desligada. Observa-se que são necessários 4 min para que o rotor livre atinja o repouso. Admitindo um movimento uniformemente acelerado, determine (*a*) a aceleração angular, (*b*) o número de revoluções executadas pelo rotor antes de atingir o repouso.

15.16 A Terra realiza uma revolução completa em torno de seu eixo em 23h56 min. Sabendo que o raio médio da Terra é de 6.370 km, determine a velocidade linear e a aceleração de um ponto sobre a superfície da Terra (*a*) no Equador, (*b*) na Filadélfia, a 40° de latitude norte, (*c*) no Polo Norte.

15.17 A Terra realiza uma revolução completa em torno do Sol em 365,24 dias. Admitindo que a órbita da Terra seja circular e que tenha um raio de 15×10^6 km, determine a velocidade e a aceleração do planeta.

15.12 - Para o bloco retangular da figura abaixo , que gira no sentido anti-horário, determine a velocidade e a aceleração no ponto B no instante mostrado, admitindo que a velocidade angular seja de 3,38 rad/s e decrescendo a uma taxa de 5,07 rad/s^2.