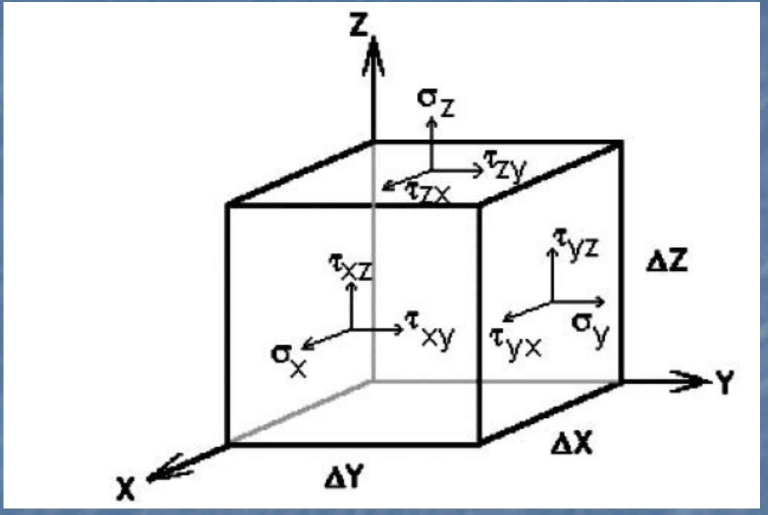
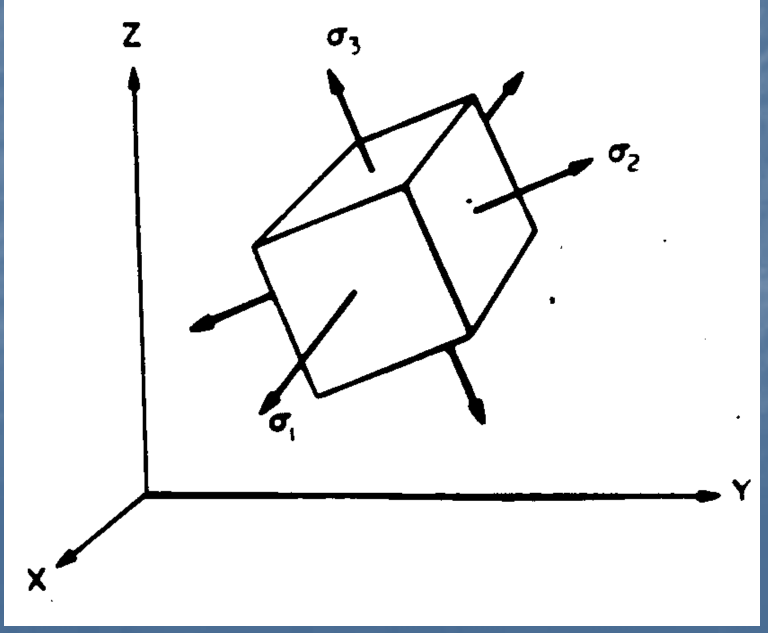
ANÁLISE DAS TENSÕES

ESTADO GERAL DE TENSÃO





Tensor de Tensões

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Tensões Principais

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Tensões Principais

Estado plano de tensão

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2}$$

Estado de tensão 3D

$$\sigma_P^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_P - I_3 = 0$$

Solução → 3 raízes → $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

I_1, I_2, I_3 → **Invariantes das tensões**

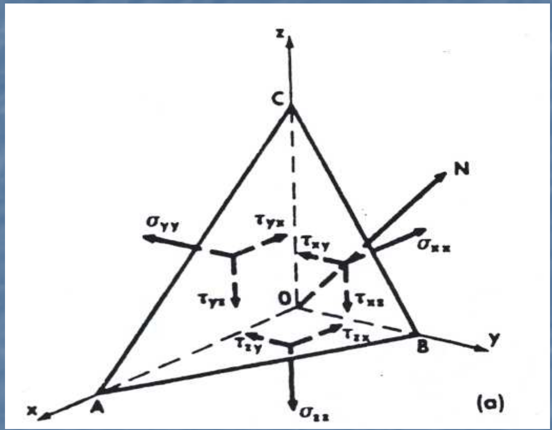
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

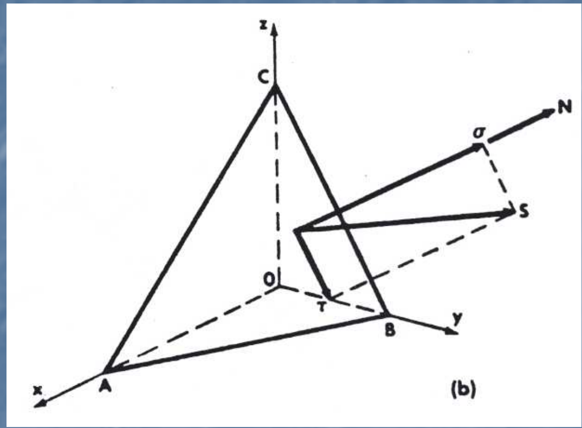
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

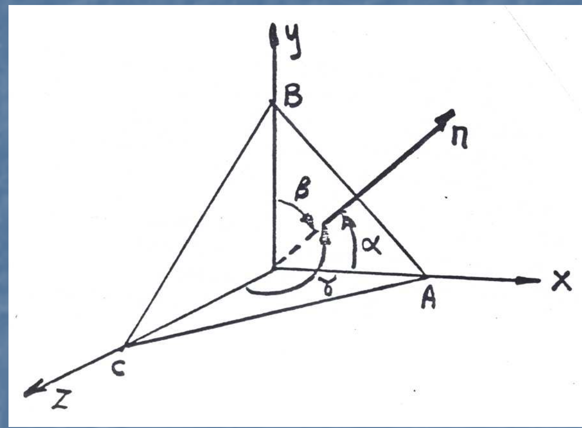
$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

Análise de Tensão 3D

Tensão normal e de cisalhamento num plano qualquer







Condição de equilíbrio

$$\sigma = \sigma_x l + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl$$

Resultante no plano ABC

$$S^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

ou

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

Cossenos diretores

$$l = \cos\alpha$$

$$m = \cos\beta$$

$$n = \cos\gamma$$

Para calcular S_x, S_y e S_z

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}].\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

$$\sigma = S_x l + S_y m + S_z n$$

Direções Principais

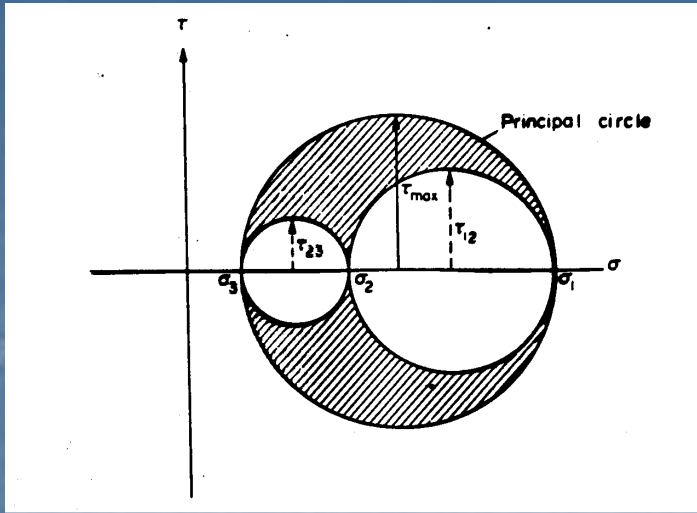
$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_p) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_p) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0$$

- Desenvolvendo a equação para σ_1 Obtém-se l_1, m_1 e n_1

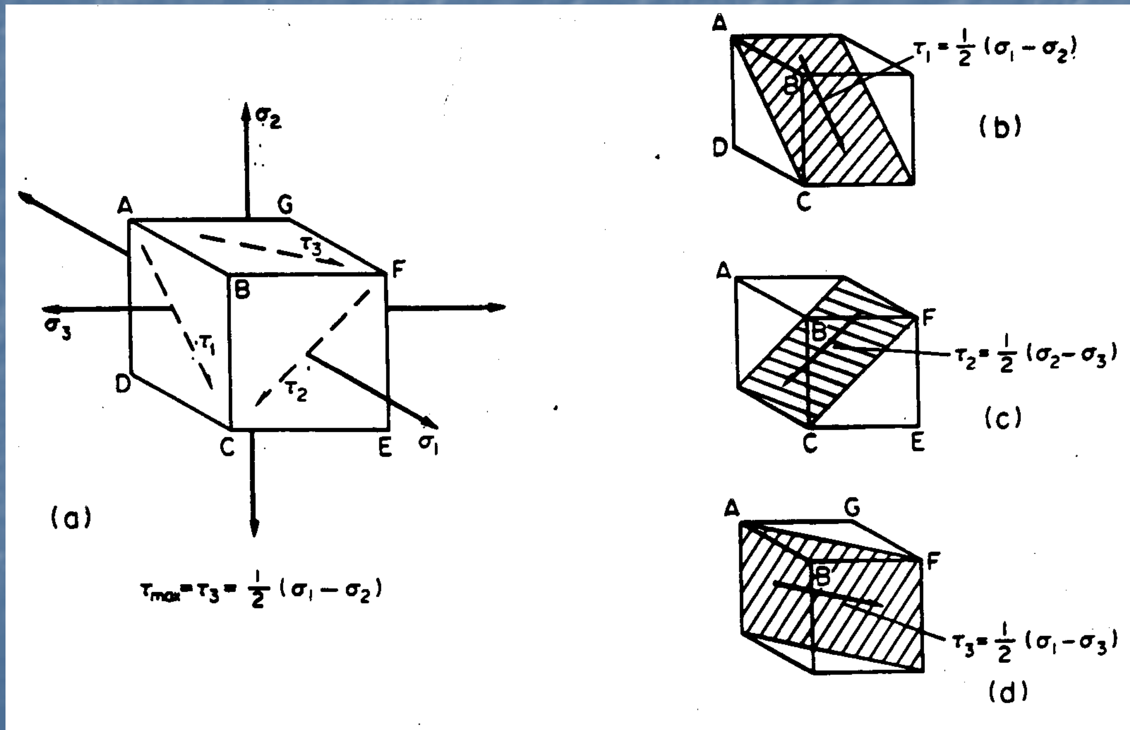
  Lembrando que $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$

- Para σ_2 obtém-se l_2, m_2 e n_2

- Para σ_3 obtém-se l_3, m_3 e n_3



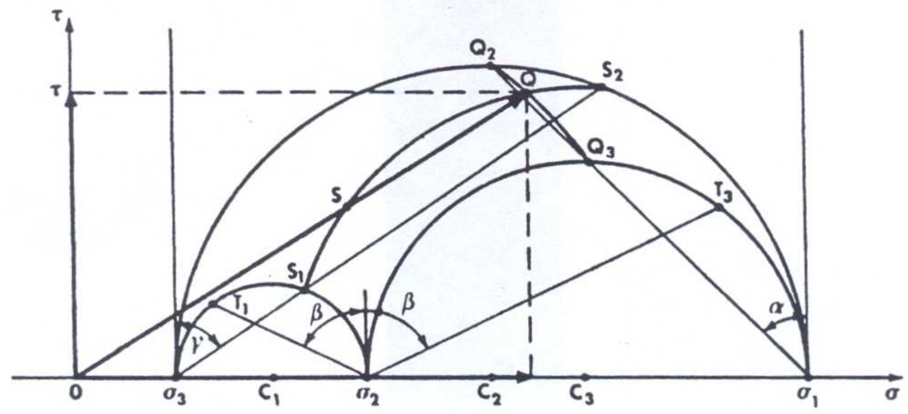
Círculo de Mohr 3D



Máximas tensões de cisalhamento no sistema 3D

CIRCULO DE MOHR PARA O ESTADO TRIPLO DAS TENSÕES

Determinação da tensão normal e de cisalhamento num plano qualquer



2. Marca-se o ângulo α = arccos l na vertical do ponto σ_1 e traça-se a linha $\sigma_1 Q_3 Q_2$ cortando os círculos de centro em C_2 e C_3, nos pontos Q_2 e Q_3 respectivamente.
3. Com centro em C_1, traça-se o arco $Q_2 Q_3$ de raio $C_1 Q_2$.
4. Marca-se o ângulo γ = arccos n na vertical do ponto σ_3 e traça-se a linha $\sigma_3 S_1 S_2$ para cortar os círculos C_1 e C_2 nos pontos S_1 e S_2, respectivamente.
5. Com centro em C_3 e raio $C_3 S_1$ traça-se o arco $S_1 S_2$.
6. A intersecção dos arcos $S_1 S_2$ e $Q_2 Q_3$ no ponto Q dá o ponto de tensão pretendido com coordenadas σ e τ. Marcando agora o ângulo β a partir da vertical que passar por σ_2 e com centro em C_2 traça-se o arco $T_1 T_3$, que, se a construção geométrica estiver certa, passará pelo ponto Q.

Critérios de Escoamentos que estudaremos:

- **Materiais Dúcteis:**
  - Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima ou Critério de Escoamento de Tresca
  - Teoria da Energia de Distorção Máxima ou Critério de von Mises.
- **Materiais Frágeis:**
  - Teoria da Tensão Normal Máxima –W. Rankine

Materiais Dúcteis
Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima ou Critério do Escoamento de Tresca

O caso mais comum de escoamento de um material dúctil, como o aço, é o deslizamento que ocorre ao longo dos planos de contato dos cristais que, aleatoriamente ordenados, formam o próprio material. Esse deslizamento deve-se a tensão de cisalhamento e, se fizermos um corpo de prova com uma tira fina altamente polida e a submetermos a um ensaio de tração simples poderá ser visto como a tensão provoca o escoamento do material como está no esboço da Figura 1.

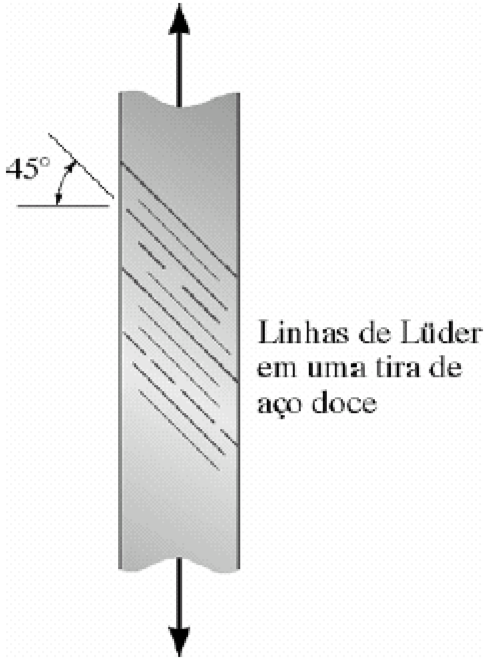


Figura1 - Escoamento do aço.

Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima ou Critério de Escoamento de Tresca

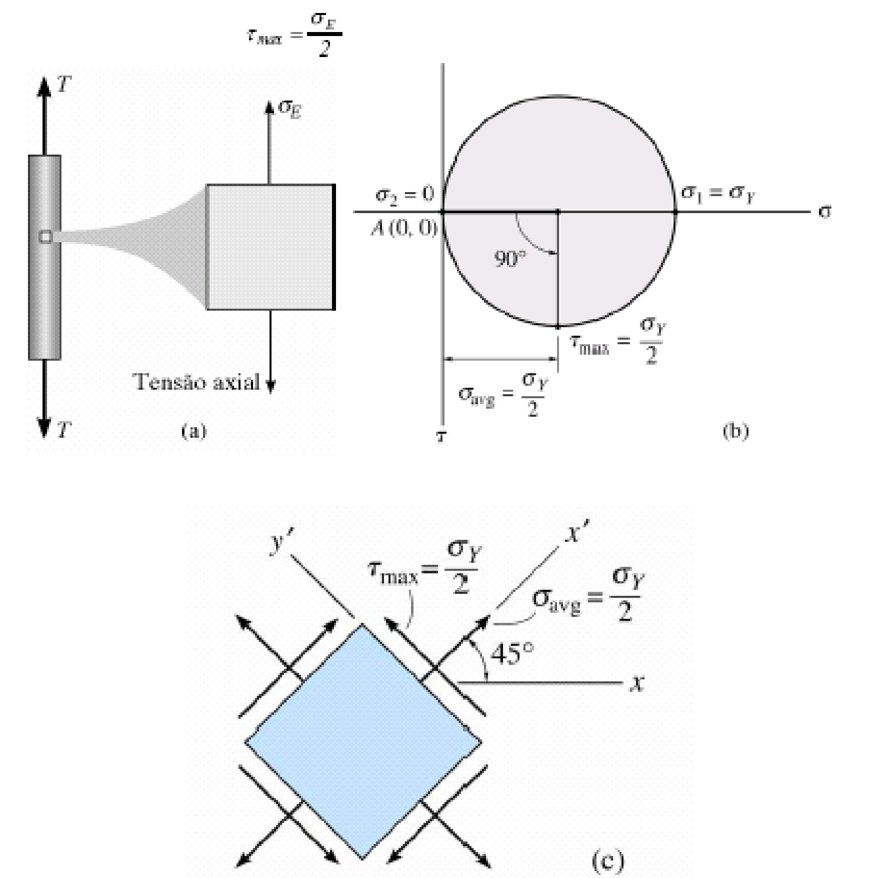


Figura 2 - Elemento de um material tirado de um corpo de prova.

$$\tau_{\substack{max \\ abs}} \geq K$$

K= tensão de escoamento no cisalhamento

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = K$$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = 2K$$

Qual o valor de K?

No teste de tração: $\sigma_{max} = \sigma_1$; $\sigma_{min}=0$

No escoamento: $\sigma_1 = \sigma_e = 2K$

$$\sigma_e - 0 = 2K$$

$$K = \frac{\sigma_e}{2} \Rightarrow \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_e$$

Fazendo σ_2=0:

$caso1: \sigma_1 \rangle 0 \rangle \sigma_3$

$\Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_e$

$caso2: \sigma_3 \rangle 0 \rangle \sigma_1$

$\Rightarrow \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_e$

$caso3: \sigma_1 \rangle \sigma_3 \rangle 0$

$\Rightarrow \sigma_1 - 0 = \sigma_e$

$caso4: \sigma_3 \rangle \sigma_1 \rangle 0$

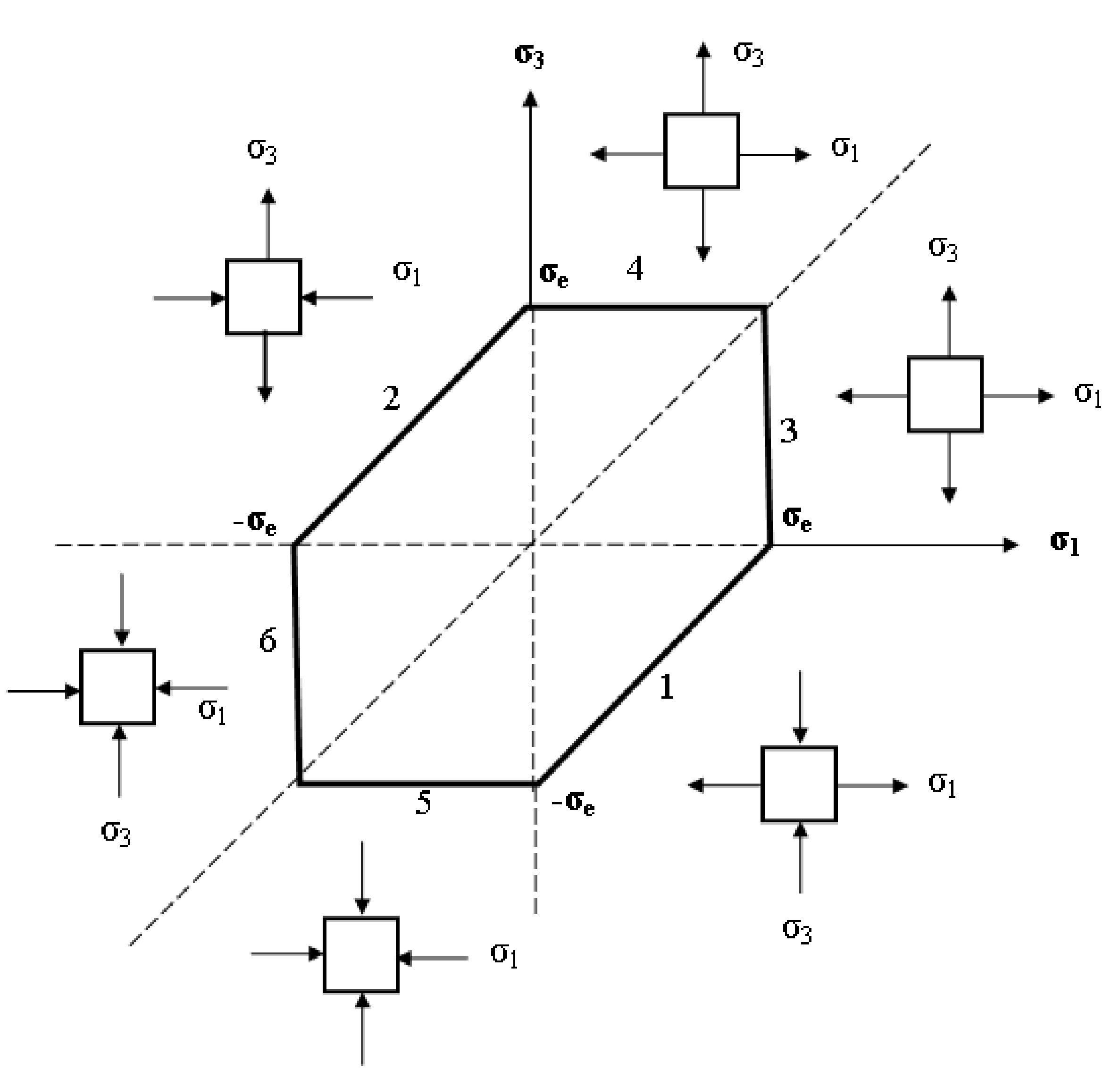
$\Rightarrow \sigma_3 - 0 = \sigma_e$

$caso5: 0 \rangle \sigma_1 \rangle \sigma_3 \rangle$

$\Rightarrow 0 - \sigma_3 = \sigma_e$

$caso6: 0 \rangle \sigma_3 \rangle \sigma_1$

$\Rightarrow 0 - \sigma_1 = \sigma_e$



Teoria da Energia de Distorção Máxima ou Critério de von Mises

Quando a energia de distorção no ponto crítico do componente atingir o mesmo valor da energia de distorção do corpo de prova no momento do seu escoamento, iniciará também o escoamento do componente naquele ponto”

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right]$$

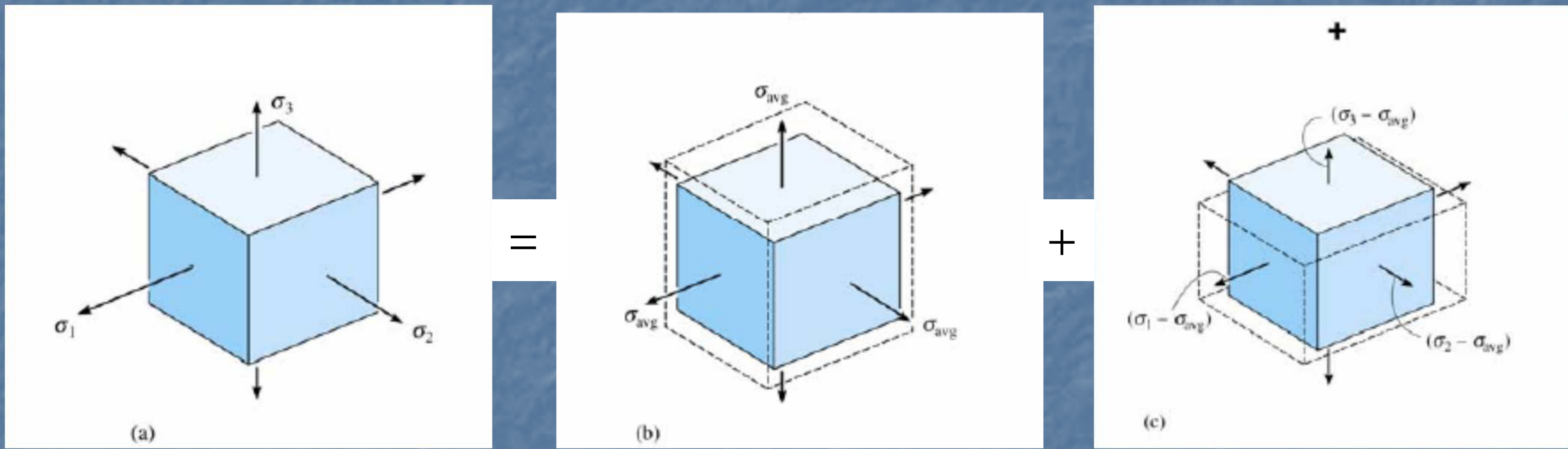
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]$$

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2\right)\right]$$

Densidade de deformação (U) é a soma de duas componentes: **Hidrostática** e **Distorção**

Hidrostática: responsável somente por mudança de volume. É associada a tensão principal média: $\sigma_{med} = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$

Distorção: responsável pela energia necessária para distorcer o elemento. Subtraindo a parte hidrostática do estado de tensão, a parte restante da tensão, $(\sigma_1-\sigma_{med})$, $(\sigma_2-\sigma_{med})$ e $(\sigma_3-\sigma_{med})$, provoca a energia de distorção como mostra a fig. C.



Substituindo-se σ_1, σ_2 e σ_3 por $(\sigma_1-\sigma_{med})$, $(\sigma_2-\sigma_{med})$ e $(\sigma_3-\sigma_{med})$, na equação de U obtém-se U_d:

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

No ensaio de tração uniaxial, $\sigma_{1=}\sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e temos:

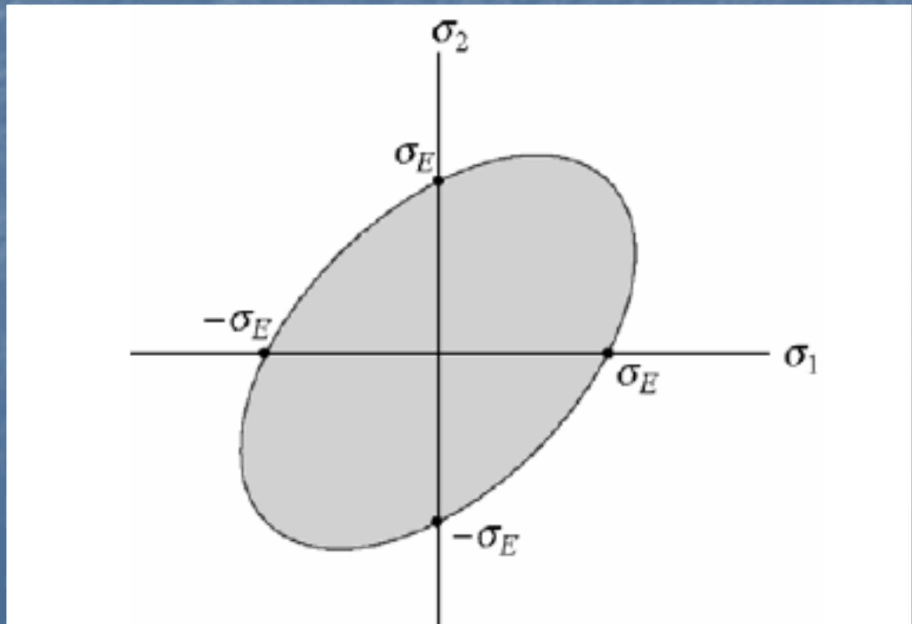
$$(U_d)_e = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_e^{\;2}$$

Como a teoria de distorção máxima requer que $U_d = (U_d)_e$ temos que:

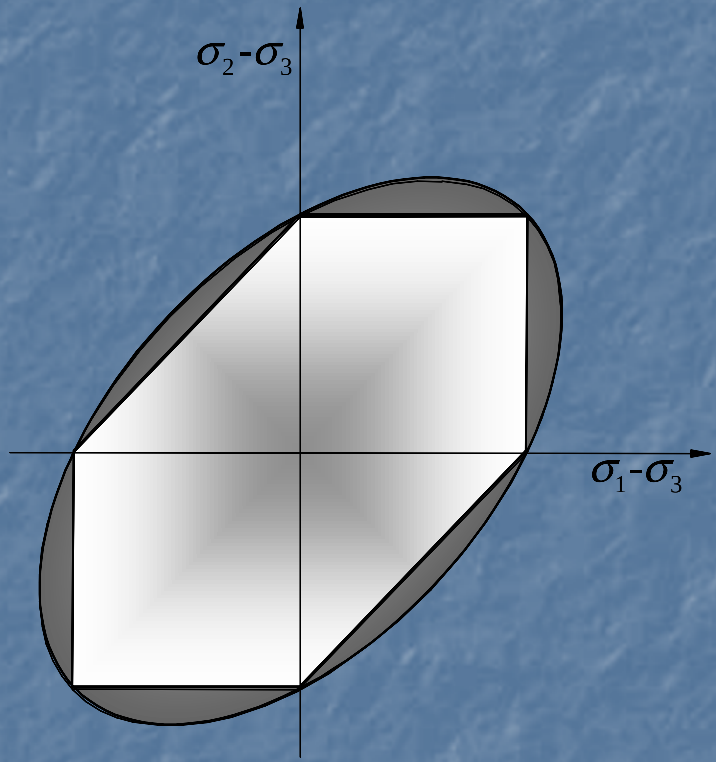
$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2}$$

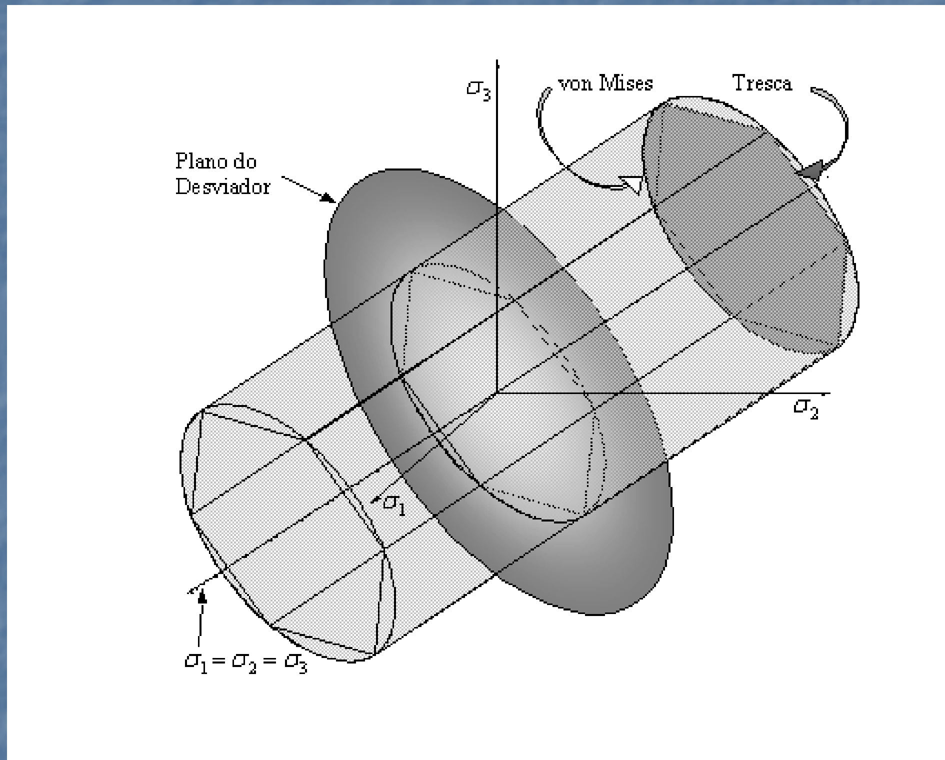
Caso do estado plano de tensões, $\sigma_3 = 0$

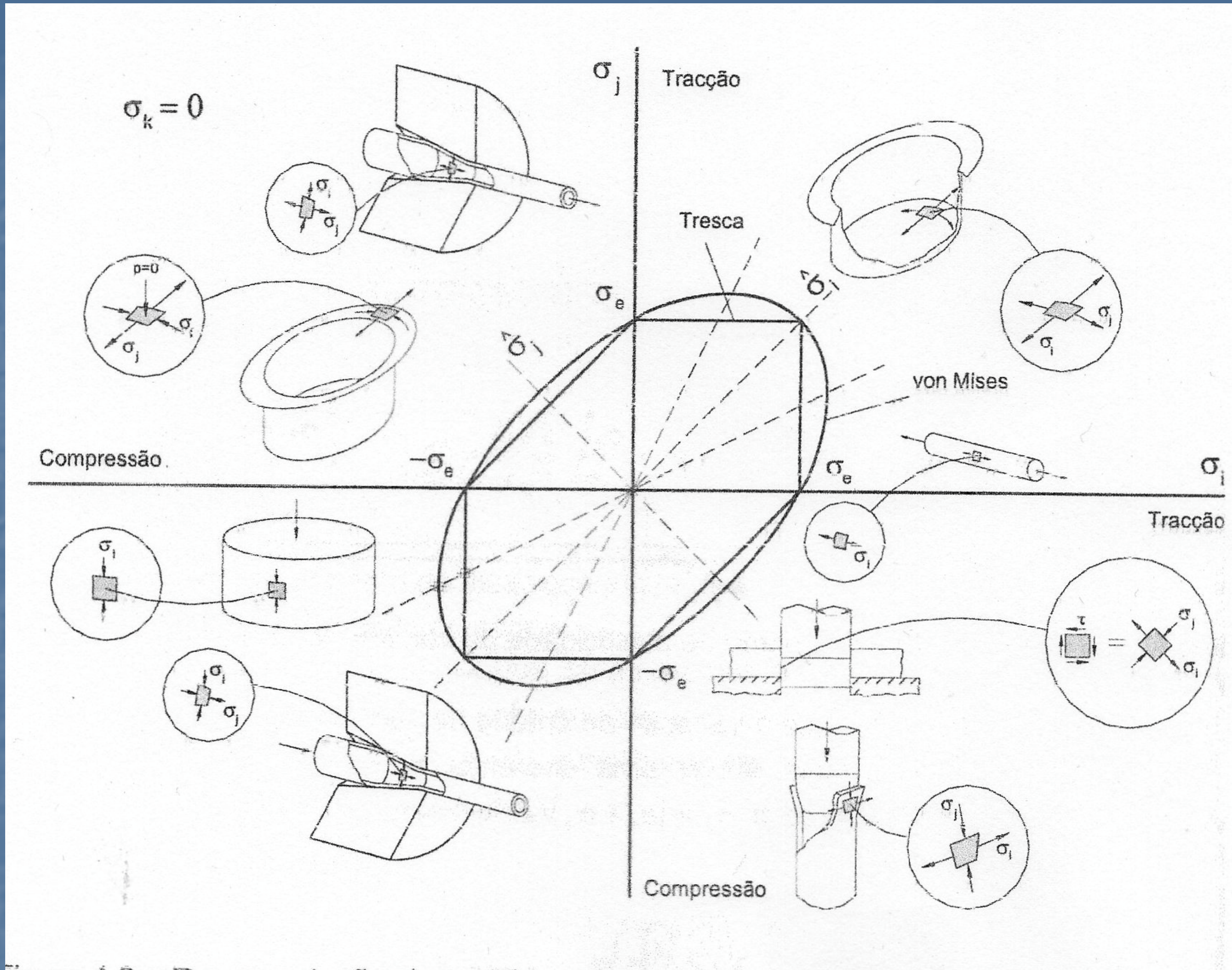
$$\sigma_1^{\;2} - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^{\;2} = \sigma_e^{\;2}$$



Representação Geométrica







Representação dos critérios de Tresca e von Mises acrescentando ainda diversos processos de conformação mecânica

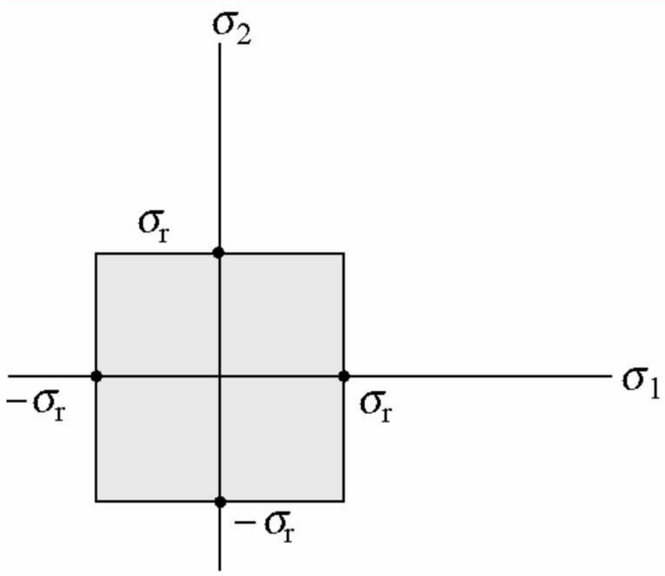
Teoria da tensão normal máxima – W. Rankine - 1800

Teoria válida para materiais frágeis

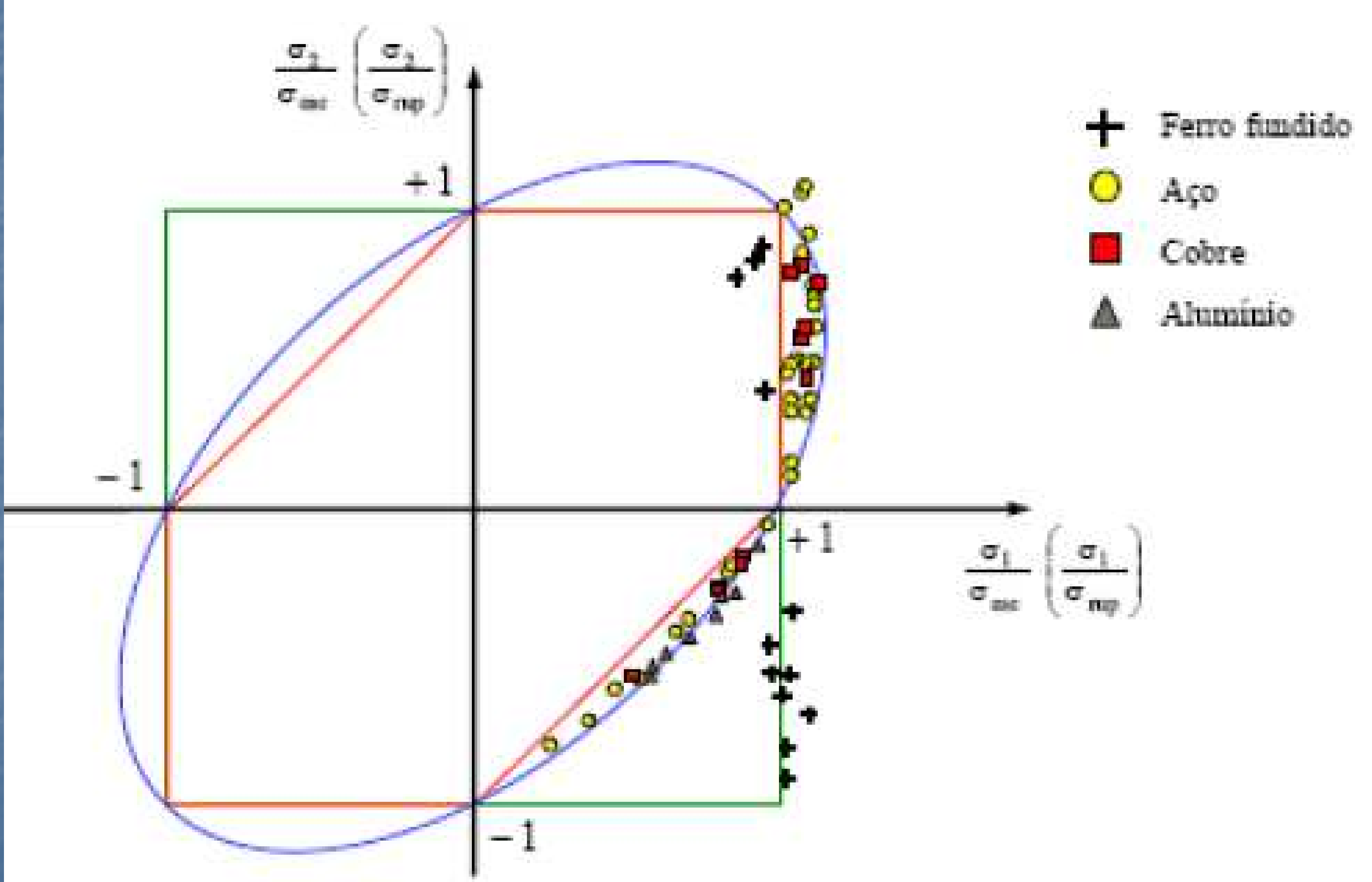
A teoria da tensão normal máxima estabelece que um material frágil falha quando a tensão principal máxima atinge um valor limite igual ao limite de resistência que o material suporta quando submetido à tração simples.

Caso o material esteja submetido ao estado plano de tensões tem-se que:

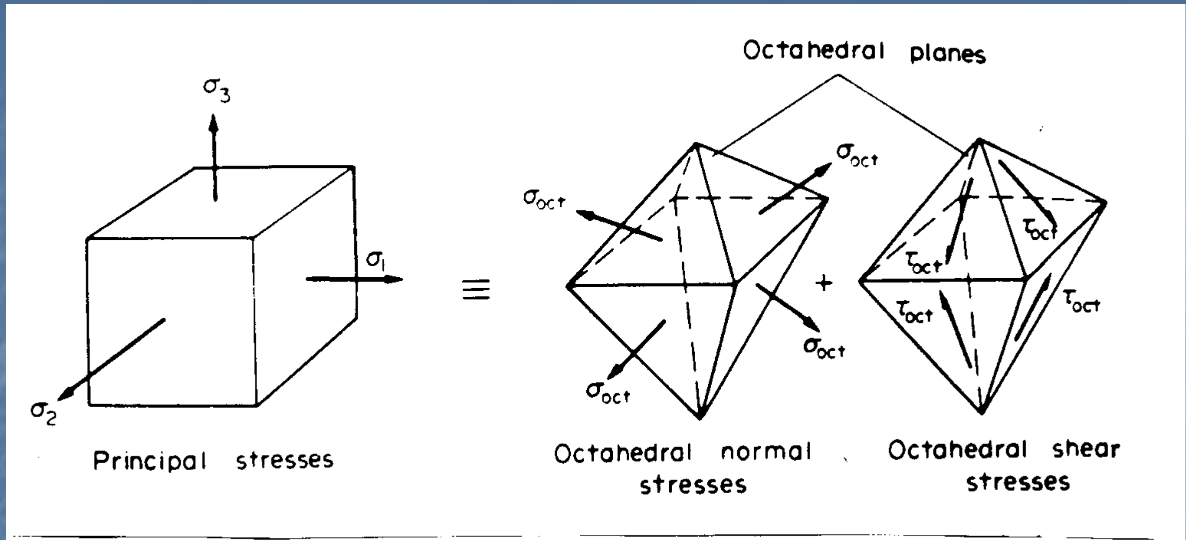
$$|\sigma_1| = \sigma_r \qquad\qquad |\sigma_2| = \sigma_r$$

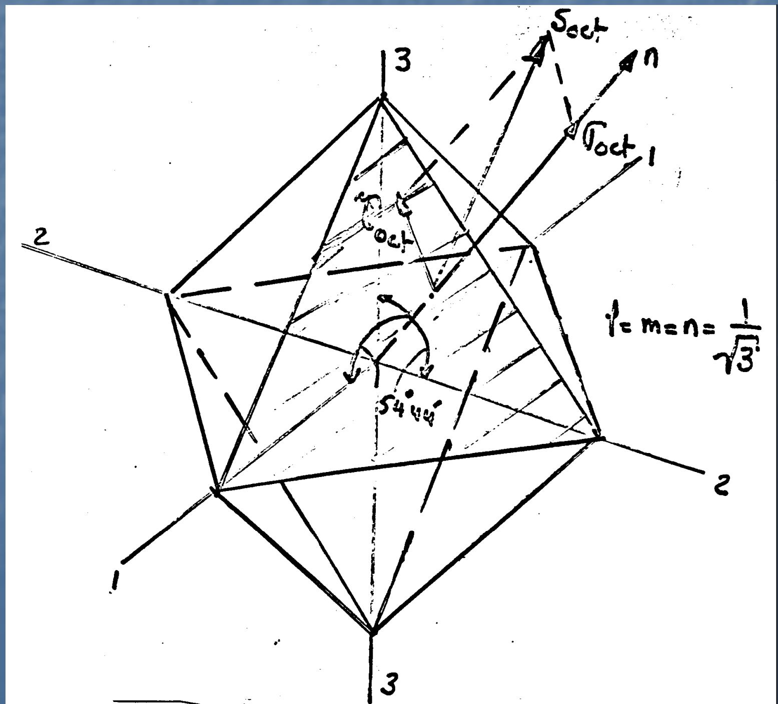


Comparação dos três critérios



Planos Octaedrais





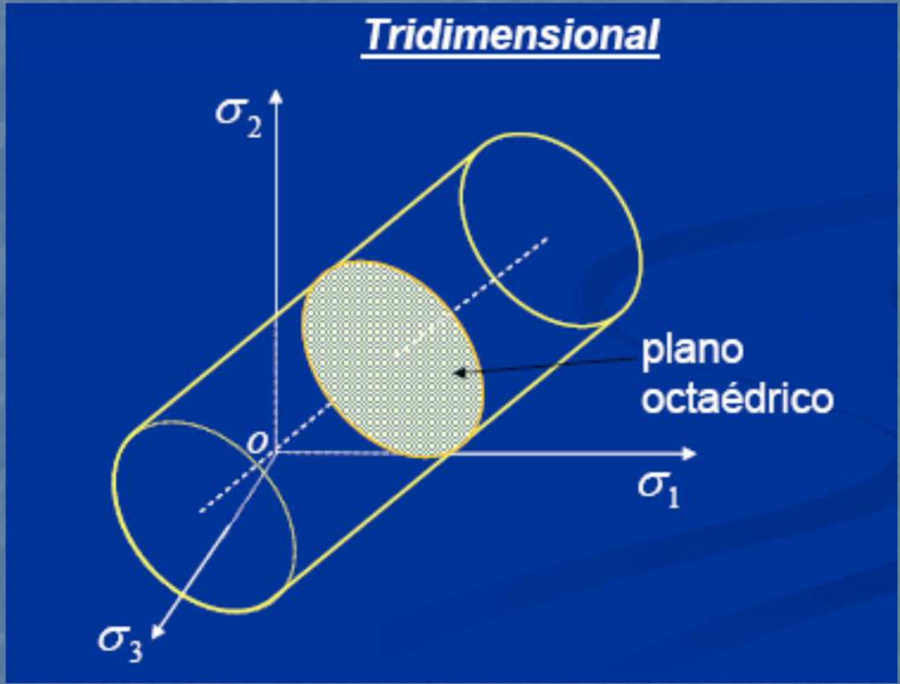
$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Interpretação Física do critério de escoamento de von Mises utilizando o valor crítico da tensão de cisalhamento octedral

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2}$$

Em tração uniaxial $\Rightarrow$ $\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_e$



Igualando as equações acima:

$$\sigma_e^{\,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2}$$

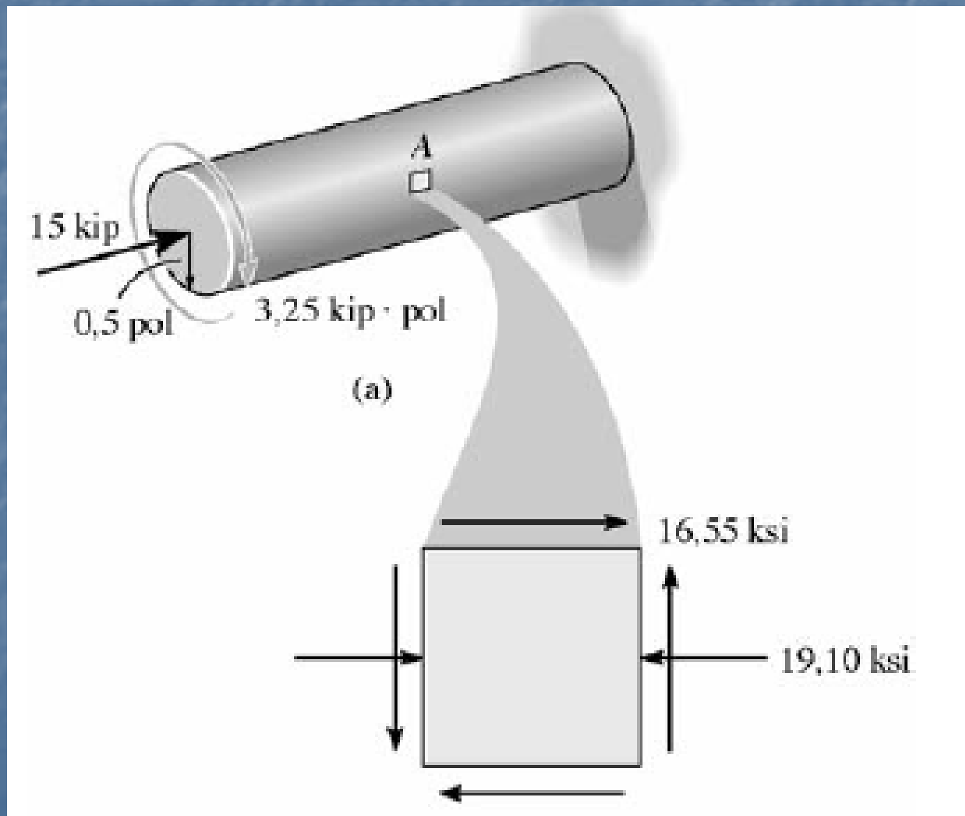
Exemplos

- **Exemplo 1–** O estado de tensão em torno de um ponto é dado pelo tensor das tensões mostrado abaixo. Determine as tensões principais.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Exemplos

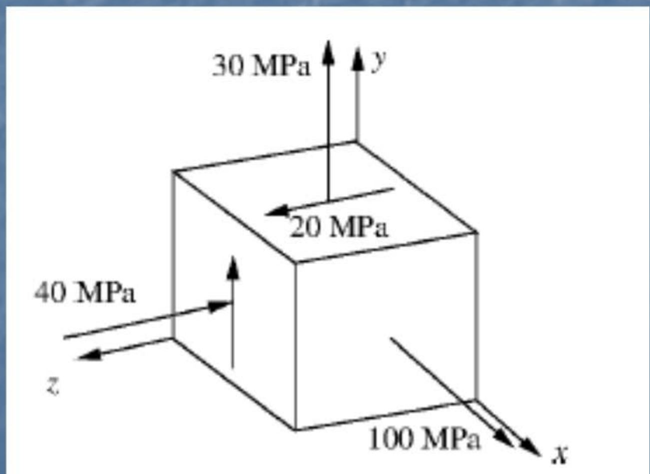
- **Exemplo 2–** O eixo maciço da figura abaixo tem raio 0,5 in e é feito de aço com limite de escoamento σ_e = 36 ksi. Determinar se o carregamento provocará falha sua falha de acordo com os critérios de Tresca e de Von Mises.



Exemplos

- **Exemplo 3 -** Um vaso de pressão cilíndrico usado em motor de foguete, de parede fina, é construído de material cujo escoamento é σ_e = 200 MPa, raio do cilindro = 1,25 m, pressão interna p = 0,7 MPa. Usando um fator de segurança igual a 2, determine a espessura do vaso, para que não ocorra falha (explosão). Obtenha a solução através dos critérios de escoamento de Tresca e de von Mises.

- Verifique, pelos critérios de Tresca e de von Mises, se o estado de tensões representado na figura abaixo é estável. Considere σ_e = 200 MPa.



- **Exemplo 4 -** Um vaso de pressão cilíndrico usado em motor de foguete, de parede fina, é construído de material cujo escoamento é σe = 200 MPa, raio do cilindro = 1,25 m, pressão interna p = 0,7 MPa. Usando um fator de segurança igual a 2, determine a espessura do vaso, para que não ocorra falha (explosão). Obtenha a solução através dos critérios de escoamento de Tresca e de von Mises.

- **Exemplo 5 -** Prove que a diferença máxima entre os critérios de escoamento de Tresca e de von Mises é da ordem de 15,4%.

- **Exemplo 6 -** Mostre que a superposição de um estado hidrostático de tensões a um estado de tensões não altera as previsões dos critérios de escoamento de Tresca e de von Mises.