Aula-9

Dinâmica Relativística

+ Efeito Comptom

Dinâmica relativística

Momento linear relativístico

Entretanto, pode-se mostrar que teremos uma quantidade conservada definindo:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

A massa depende da velocidade $\longrightarrow$

$$m = \gamma\, m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa do corpo no referencial em que ele se encontra em repouso. A força é, então, dada por

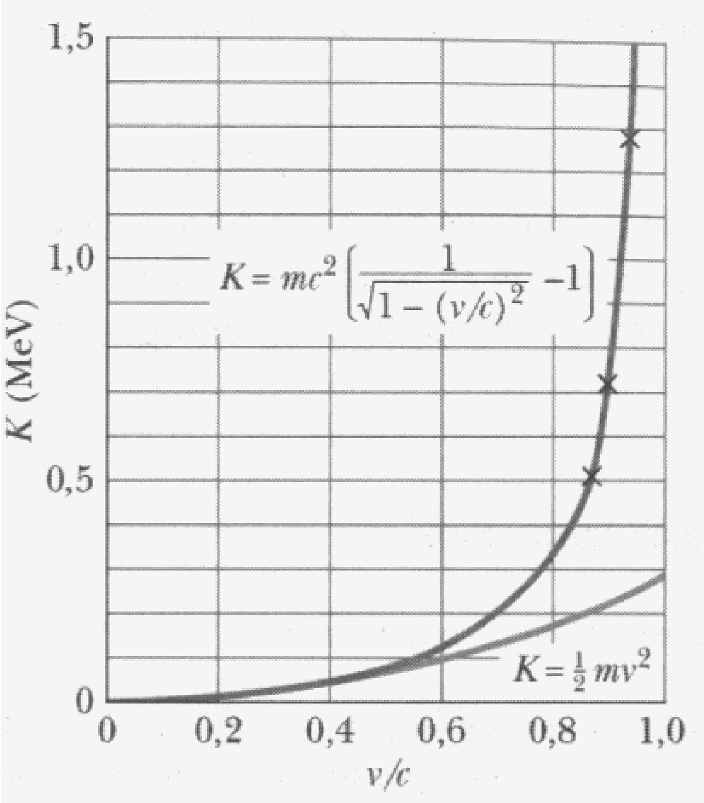
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma\, \vec{v})$$

Energia relativística

$$E_{total} = K + m_0 c^2$$

Energia cinética

Energia de repouso



Mas $$E_{total} = \gamma m_0 c^2 = mc^2$$

Portanto:

$$K = (m - m_0)c^2 = (\gamma - 1)m_0 c^2 \qquad onde: \qquad m = \gamma m_0$$

Relação energia-momento linear

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Usando que $\vec{p} = m\vec{v}$ temos $\vec{p} = \dfrac{mc^2\vec{v}}{c^2} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{c^2\vec{p}}{E}$

Como $E^2 = m^2c^4 = \gamma^2 m_0^2 c^4$ obtemos:

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{\left(1 - \dfrac{c^4 p^2}{c^2 E^2}\right)} \rightarrow$$

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Se $m_0 = 0$ ⇨ $E = pc$

• Lembrando que a radiação eletromagnética transporta momento linear $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{U} / \mathbf{c}$, podemos imaginá-la como composta por corpúsculos de massa zero (*fótons*), como veremos mais adiante.

- **Limite clássico da energia**

Expandindo $E = mc^2$ para $v/c \ll 1$:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \ldots \right)$$

$$\Downarrow$$

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3 m_0 v^2}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \ldots$$

Energia de repouso: $E = m_0 c^2$

Energia cinética para $v/c \ll 1$: $\boxed{\Delta K \approx \frac{m_0 v^2}{2}}$

Energia relativística

• A energia de um sistema isolado se mantém constante

➢ Portanto, se um sistema libera uma quantidade de energia $\Delta E = E_f - E_i = -Q$, deve apresentar uma redução de massa:

$$\Delta m = m_f - m_i = -\frac{Q}{c^2}$$

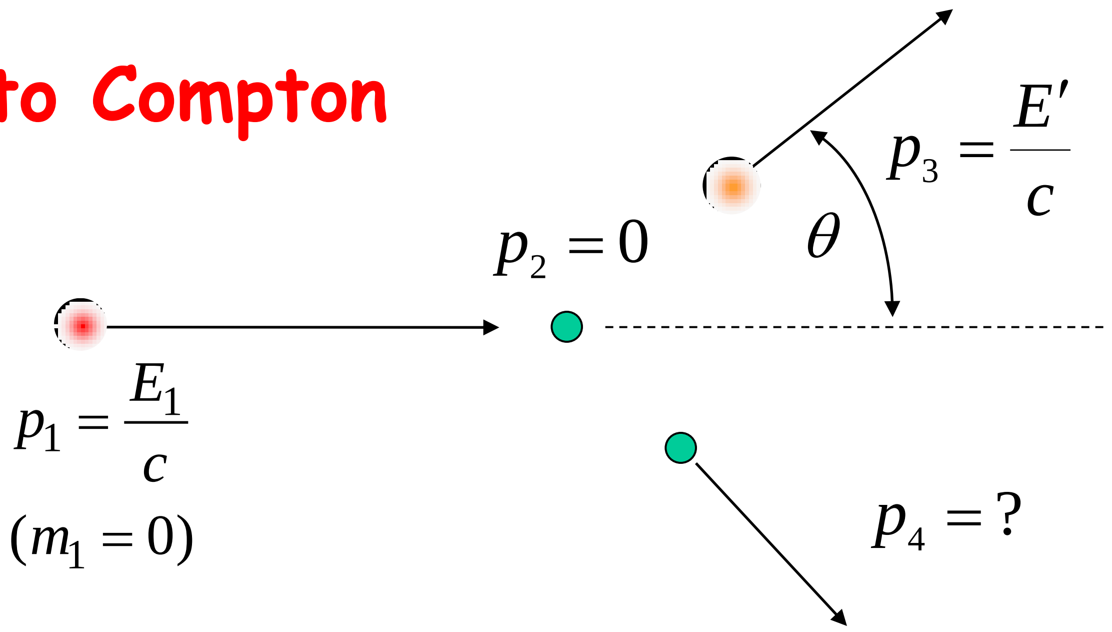
Isto vale tanto para reações químicas quanto para reações nucleares, embora a variação de massa no primeiro caso seja imperceptível.

➢ Se a energia de um sistema aumenta, (ex.: aumentando a sua velocidade), sua massa também aumenta:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

Colisões relativísticas

- **Efeito Compton**



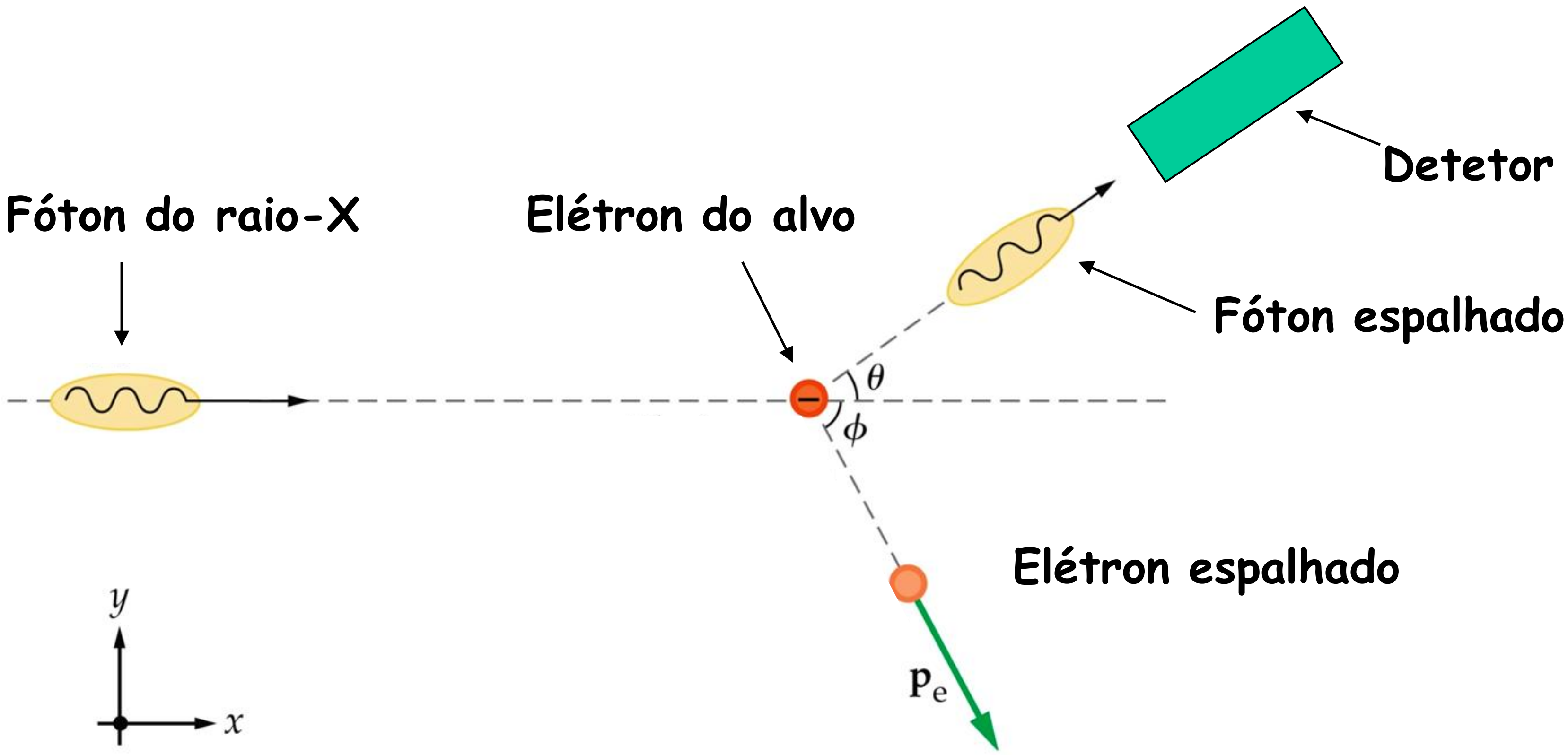
$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4}$$

$$\boxed{E_1 + E_2 = E_3 + E_4}$$

Efeito Compton

O Efeito Compton

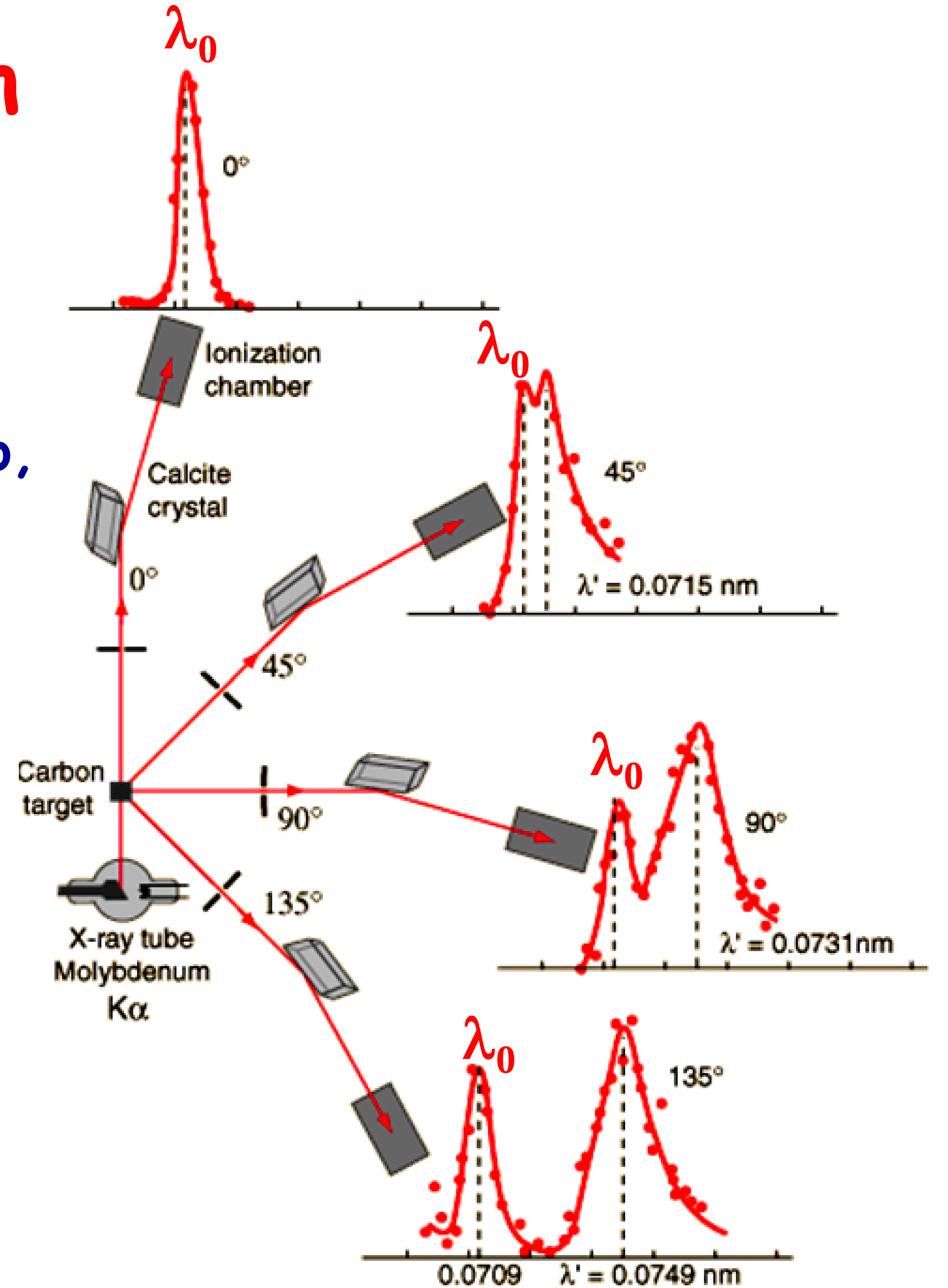
• Em 1916 Einstein propôs que o fóton teria um momento linear $p = h/\lambda$. Esta idéia foi confirmada experimentalmente por Compton (1923), ao incidir raios-X sobre um alvo de carbono:



O efeito Compton

Classicamente esperaríamos somente um pico de $\lambda = \lambda_0$ da radiação incidente; entretanto, aparece outro pico...

A explicação é baseada no fato do fóton carregar momento linear ($\vec{p}$) e energia (E).



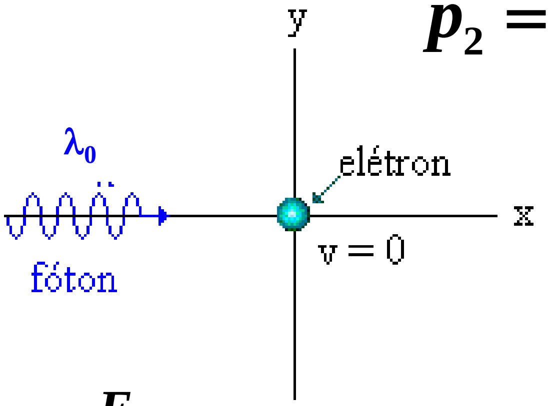
Interpretação de Compton

- Feixe de raios-X incidente não é onda.
- Feixe de raios-X é um pacote de fótons, cada fóton com energia: $E = hf = hc/\lambda$.

Fótons colidem com elétrons como bolas de bilhar.

Conservação de Energia
+
Conservação do momento

$$p_2 = 0$$

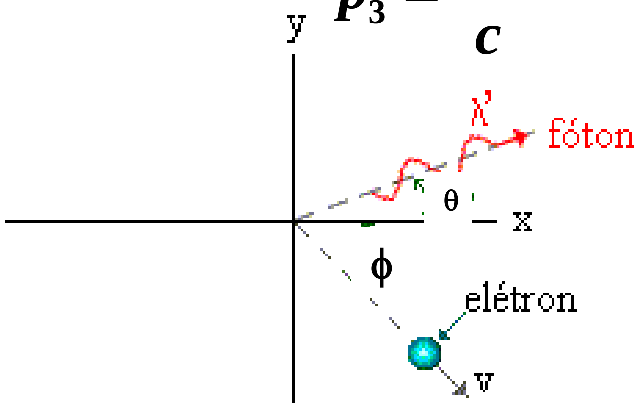


$$p_1 = \frac{E}{c}$$

Antes da colisão

$$(m_1 = 0)$$

$$p_3 = \frac{E'}{c}$$



Depois da colisão

$$p_4 = ?$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_3 = \vec{p}_4 \Longrightarrow p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2 p_1 p_3 \cos\theta$$

$$\underset{E_1}{E} + \underbrace{m_0 c^2}_{E_2} = \underbrace{E'}_{E_3} + \underbrace{\sqrt{p_4^2 c^2 + m_0^2 c^4}}_{E_4} \Longrightarrow (E - E' + m_0 c^2)^2 = p_4^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)}$$

Como $E = hf$ podemos escrever:

$$\frac{1}{hf'} - \frac{1}{hf} = \frac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\theta) \rightarrow \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \lambda_c (1-\cos\theta)} \qquad \lambda_c \equiv \frac{h}{m_0 c} \approx 2{,}43 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

λ_C é o ***comprimento de onda de Compton*** da partícula espalhada.

- **O elétron é que espalha a radiação, pois está fracamente ligado ao átomo de carbono, $m_0 = m_e$.**

Prob. 3:

Considere um feixe de raios-X com comprimento de onda de 1,00 Å. Se a radiação espalhada pelos elétrons livres é observada a 90º do feixe incidente, determine:

a) O deslocamento Compton.
b) A energia cinética fornecida ao elétron.
c) A percentagem da energia do fóton incidente que é cedida ao elétron.

ONDAS E PARTÍCULAS: Fótons (Resumo)

Efeito Fotoelétrico e Compton → Existência do fóton: natureza corpuscular da matéria

A luz ao interagir com a matéria comporta-se como se fosse constituída de partículas (fótons) que têm energia hf e momento h/λ

Interferência e Difração → Luz se comporta como onda eletromagnética

A teoria dos fótons e a teoria ondulatória da luz são mutuamente complementares

LUZ

- BAIXA FREQÜÊNCIA (λs GRANDES)
- Fótons têm baixa energia (~10^{-8} eV, f ~ Mhz).
- Para detectar são necessários muitos fótons → tende a natureza contínua → não é possível detectar um fóton individualmente ⇒ onda

- + ALTAS FREQUENCIAS (λs MENORES)
- Faixa do visível
- Ambas as naturezas podem ser detectadas ⇒
- onda ou partícula

- +++ ALTAS FREQUENCIAS (λs MUITO MENORES)
- Energias mais altas, momentos maiores.
- Fácil detectar absorção de um fóton de raios-x; interferência e difração é mais difícil a medida que λ diminui (fenda muito estreita) ⇒ partícula

POSTULADO DE *DE BROGLIE* (1923)

"Em virtude de que os fótons têm características ondulatórias e corpusculares, talvez todas as formas de matéria tenham também estas duas características"

O elétron também tem comportamento <u>dual onda-partícula</u>. De Broglie dizia que:

"ACOMPANHANDO CADA ELÉTRON HAVERIA UMA ONDA (NÃO ELETROMAGNÉTICA!) QUE "PILOTARIA" OS ELÉTRONS ATRAVÉS DO ESPAÇO"

Onda: $p = h/\lambda$; $E_c = hc/\lambda$

Partícula: $p = mv$; $E_c = mv^2/2$ (ou relativística)