Teorema de Transporte de Reynolds

- Relaciona derivadas de propriedades do sistema com a formulação de volume de controle
- As equações básicas apresentadas envolvem a derivada temporal de propriedades extensivas do sistema:
  - Massa
  - Quantidade de movimento linear
  - Quantidade de movimento angular
  - Energia
  - Entropia

generalizando

$$N_{sistema} = \int_{\substack{massa\\sistema}} \eta\, dm = \int_{\substack{volume\\sistema}} \eta \rho\, d\forall$$

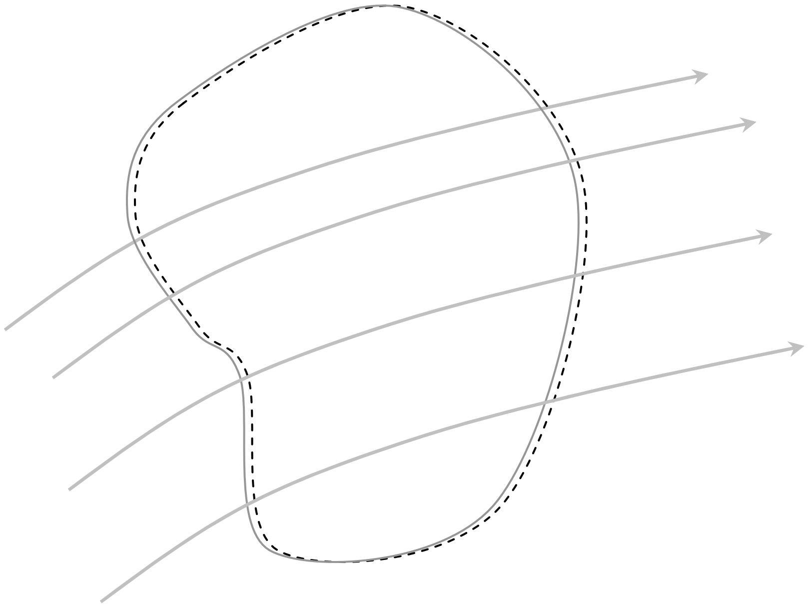
assim,

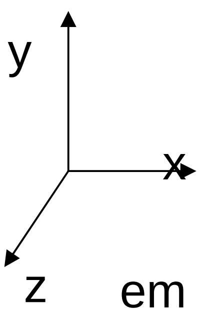
$$N = M \rightarrow \eta = 1$$

$$N = \vec{P} \rightarrow \eta = \vec{V}$$

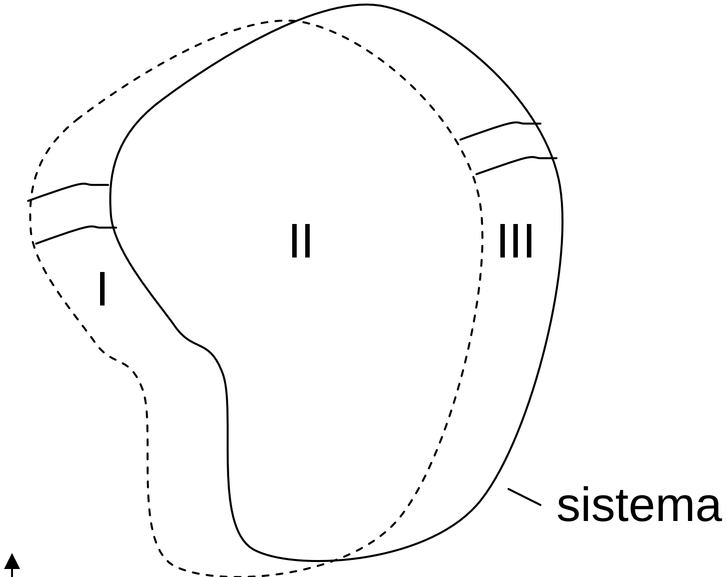
$$N = \vec{H} \rightarrow \eta = \vec{r} \times \vec{V}$$

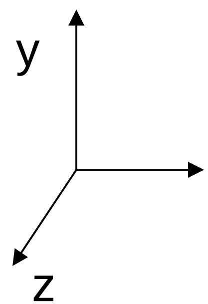
$$N = S \rightarrow \eta = s$$





tempo t_o
sistema e VC
coincidem





Tempo $t_o+\Delta t$

em $t_{o,}$ sistema e VC coincidem

para $t_o+\Delta t$, identificamos 3 regiões:

I e II formam o VC

II e III formam o sistema

Queremos relacionar $\left.\dfrac{dN}{dt}\right)_{sistema}$

com quantidades no volume de controle

Da definição de derivada,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sistema} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{s_{t_o+\Delta t}} - N_{s_{t_o}}}{\Delta t}$$

Da figura,

$$N_{s_{t_o+\Delta t}} = \left(N_{II} + N_{III}\right)_{t_o+\Delta t} = \left(N_{VC} - N_I + N_{III}\right)_{t_o+\Delta t}$$

$$e \quad N_{s_{t_o}} = N_{vc_{t_o}}$$

Substituindo na definição da derivada do sistema,

$$\frac{dN}{dt}_{sistema} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{VC} - N_{I} + N_{III}\right)_{t_{o+t}} - \left(N_{VC}\right)_{t_o}}{\Delta t}$$

A soma do limite é o limite da soma,

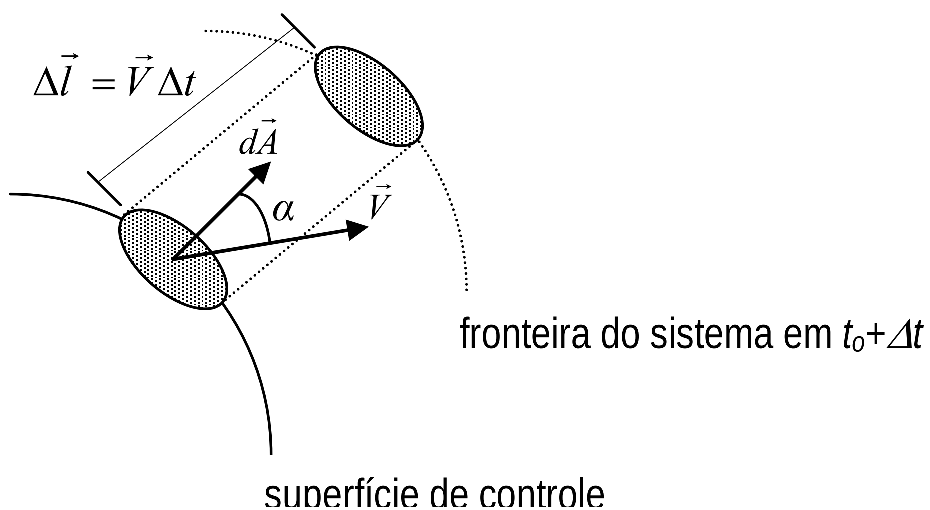
$$\frac{dN}{dt}_{sistema} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{VC_{t_o+\Delta t}} - N_{VC_{t_o}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III_{t_o+\Delta t}}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{I_{t_o} + \Delta t}}{\Delta t}$$

(1) (2) (3)

(1) $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{VC_{t_o+\Delta t}} - N_{VC_{t_o}}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho \, d\forall$$

Para avaliar (2) precisamos de uma expressão para $N_{III_{t_o+\Delta t}}$

Olhar para a sub-região 3 em III



Para esta sub-região,

$$dN_{III_{t_0}+\Delta t} = \left(\eta\rho d\forall\right)_{t_o+\Delta t}$$

$$d\forall = ?$$

Comprimento do cilindro: $d\vec{l} = \vec{V} \cdot d\vec{A}\Delta t$

$$d\forall = \Delta l\, dA cos\,\alpha = \Delta\vec{l} \cdot d\vec{A} = \vec{V} \cdot d\vec{A}\Delta t$$

Assim,

$$dN_{III_{t_o}+\Delta t} = \eta\,\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}\,\Delta t$$

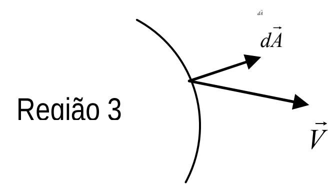
Integrando em toda a região III,

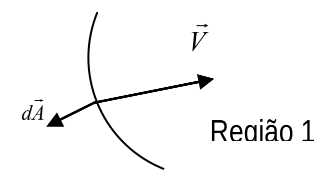
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III_{t_o+\Delta t}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{SC_{III}} dN_{III_{t_o+\Delta t}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{SC_{III}} \frac{\eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}\, \Delta t}{\Delta t} = \int_{SC_{III}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Da mesma forma para a região I, sub-região 1,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{I_{t_o+\Delta t}}}{\Delta t} = -\int_{SC_I} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

sinal negativo pois $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ é negativo





Juntando,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \underbrace{\int_{SC_I} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{SC_{III}} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{SC}$$

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Teorema de Transporte de Reynolds

Interpretação física:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sistema}$$: taxa de variação da propriedade extensiva *N* no sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho d\forall :$$ taxa de variação da propriedade extensiva *N* no *VC*

$$\int_{SC}\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} :$$ taxa líquida do fluxo da propriedade *N* através da superfície de controle

$\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$: fluxo de massa através de $d\vec{A}$ por unidade de tempo

$\eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$: fluxo de *N* através de $d\vec{A}$ por unidade de tempo

Nota: a velocidade é medida em relação ao *VC* considerado fixo em relação ao sistema de coordenadas xyz