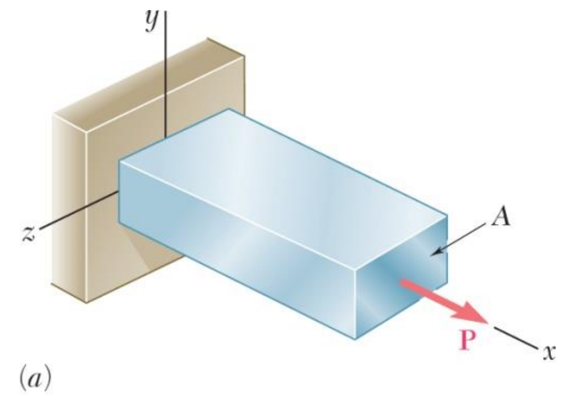
LOM 3081 - Introdução à Mecânica dos Sólidos

CAP. 2 – ANÁLISE DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

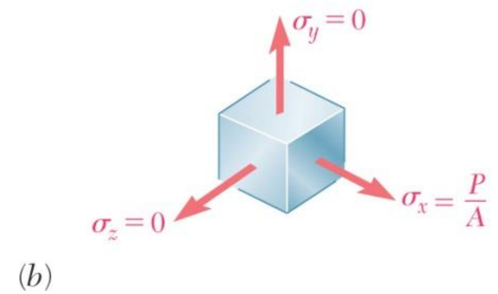
PARTE 2 – ANÁLISE DE DEFORMAÇÃO

COEFICIENTE DE POISSON



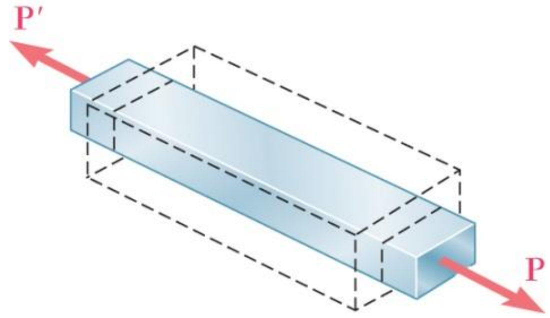
Para uma barra delgada submetida a uma carga axial:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$$



A deformação produzida na direção *x* da força é acompanhada por uma contração em qualquer direção transversal. Supondo o material isotrópico (sem dependência direcional):

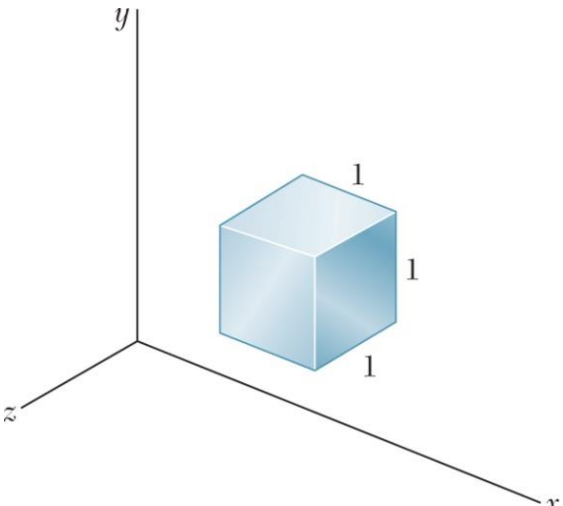
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$



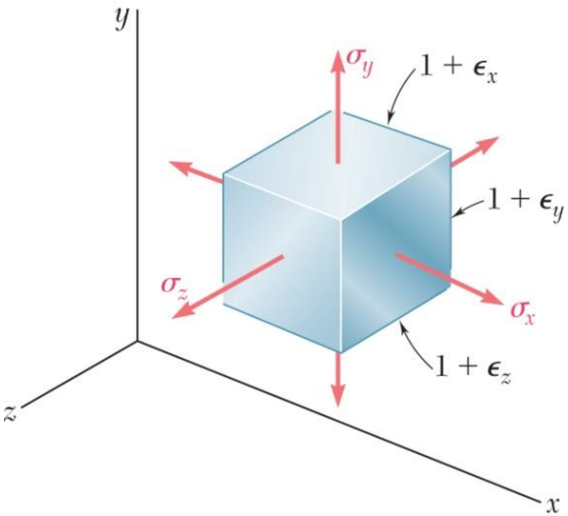
O Coeficiente de Poisson é definido como:

$$\nu = \left| \frac{\text{deformacao lateral}}{\text{deformacao axial}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

LEI DE HOOKE GENERALIZADA



(a)



(b)

Para um componente sujeito a carregamento multiaxial, os elementos de tensão normais resultantes de componentes de tensão podem ser determinados a partir do *princípio da sobreposição*. Isto requer:

1) Cada efeito está linearmente relacionado com a força que o produz.
2) A deformação é pequena.

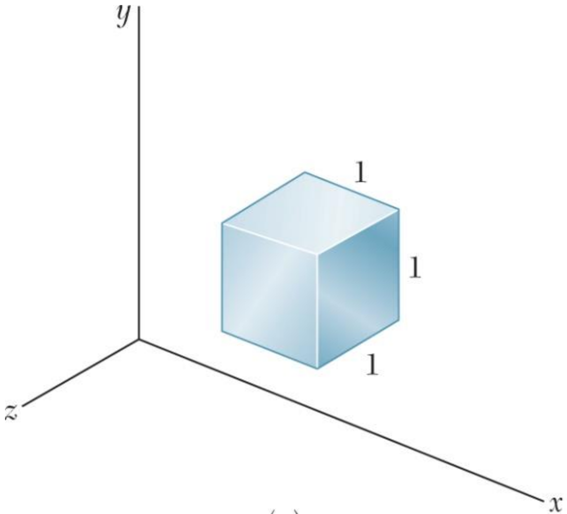
Com estas restrições:

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

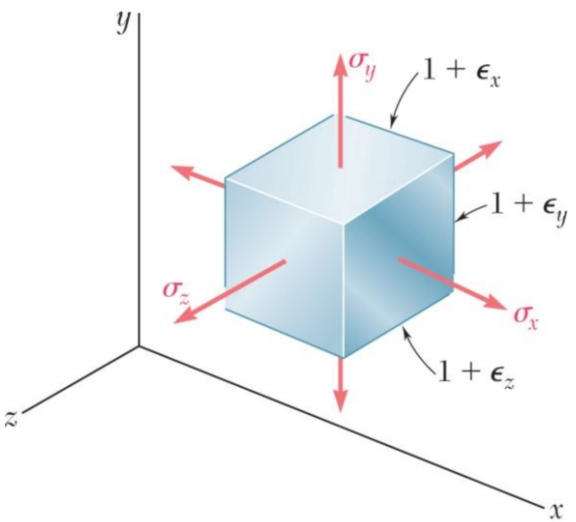
$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

DILATAÇÃO



(a)



(b)

Em relação ao estado livre de tensões, a variação de volume é

$$e = -1 + \left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\right] \approx -1 + \left[1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right]$$

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right) = \text{dilatação específica}$$

Para o elemento submetido à pressão hidrostática constante:

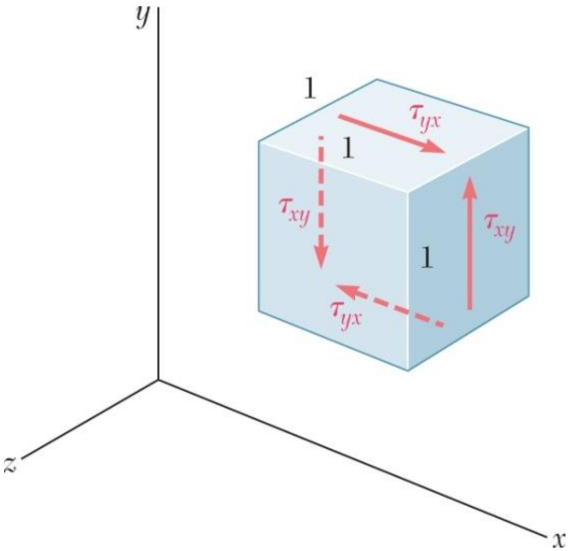
$$e = -p\frac{3(1-2\nu)}{E} = -\frac{p}{k}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \text{Módulo Volumétrico}$$

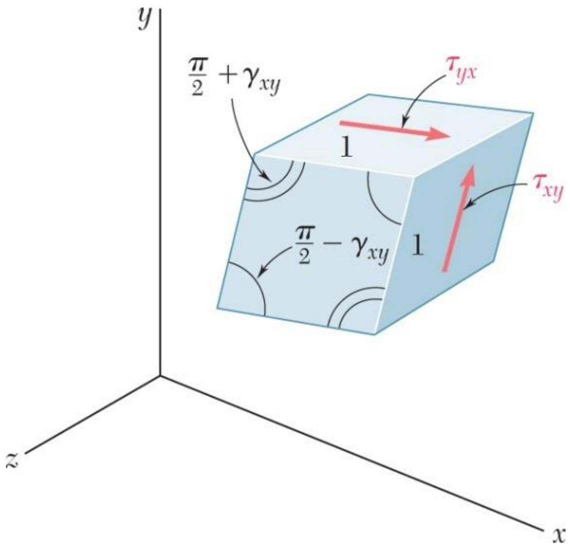
Sob pressão uniforme, a dilatação deve ser negativa, portanto:

$$0 < \nu < \tfrac{1}{2}$$

DEFORMAÇÃO ANGULAR



Um elemento cúbico submetido a uma tensão de cisalhamento irá deformar em um rombóide. A deformação de cisalhamento correspondente é quantificada em termos de variação do ângulo entre os lados: $\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$



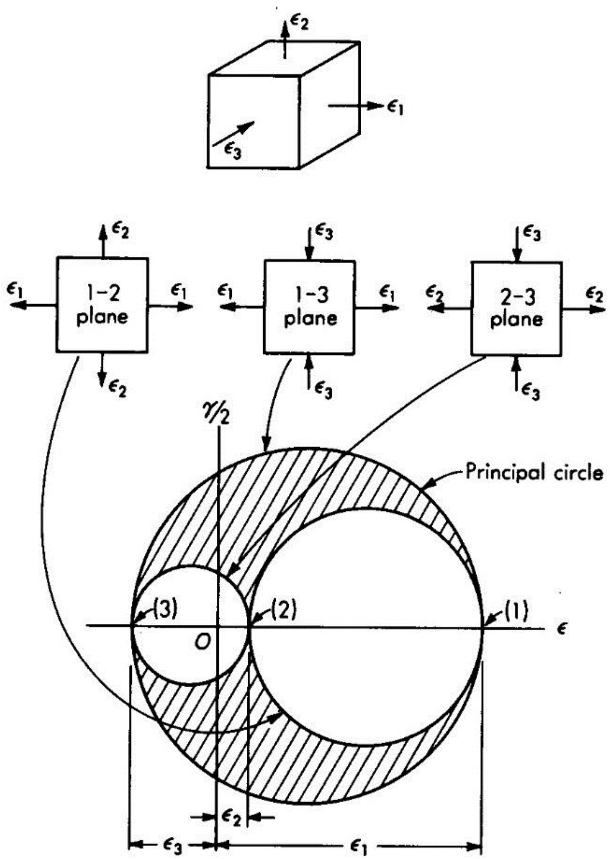
Um gráfico de tensão de cisalhamento *vs*. deformação de cisalhamento é similar aos gráficos anteriores de tensão normal *vs*. deformação axial, exceto que os valores de resistência são aproximadamente metade. Para pequenas deformações:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

Onde *G* é denominado *Módulo de Cisalhamento* ou *módulo transversal de elasticidade*

TRANSFORMAÇÃO DE DEFORMAÇÕES NO CASO PLANO

Círculo de Mohr das deformações:



$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} sen(2\theta)$$

$$\gamma_\theta = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) sen(2\theta) + \gamma_{xy} \cos(2\theta)$$

$$tg(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

RESUMO

Relações Tensão-Deformação no Regime Elástico:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

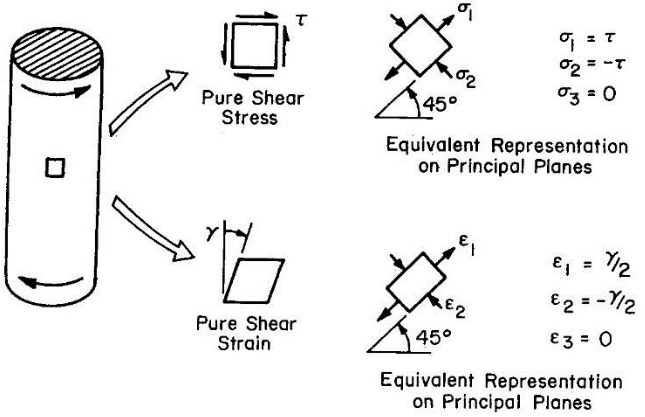
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = G\gamma_{yz}$$

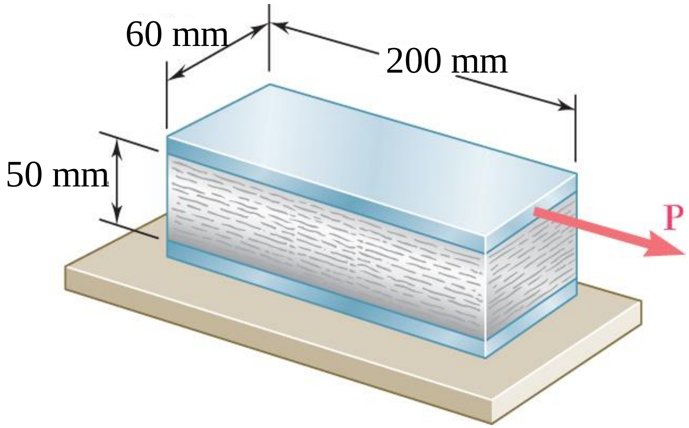
$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} = G\gamma_{zx}$$

Interdependência entre as constantes elásticas:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$



DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO: EXEMPLO



Um bloco retangular de um material com um módulo de elasticidade transversal *G* = 620 MPa é colado a duas placas rígidas horizontais. A placa inferior é fixa, enquanto a placa superior está submetida a uma força horizontal **P** . Sabendo que a placa superior se desloca 1,0mm sob a ação da força, determine:

(*a*) a deformação de cisalhamento média no material e

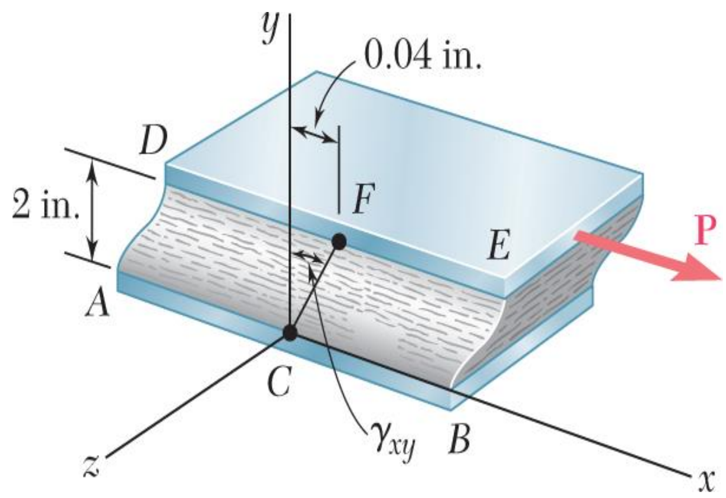
(*b*) a força **P** que atua na placa superior.

SOLUÇÃO:

- Determinar a deformação angular média do bloco.

- Aplicar a lei de Hooke para encontrar a tensão de cisalhamento correspondente.

- Utilizar a definição de tensão de cisalhamento para encontrar a força **P**.



- Determinar a deformação angular média ou deformação de cisalhamento do bloco.

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{1\,\text{mm}}{50\,\text{mm}} \qquad \gamma_{xy} = 0{,}020\,\text{rad}$$

- Aplicar a lei de Hooke para encontrar a tensão de cisalhamento correspondente:

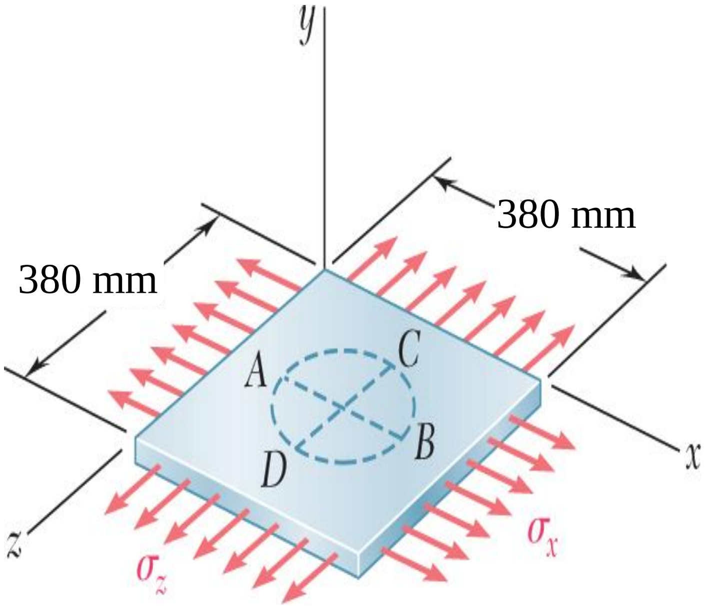
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (620\,\text{MPa})(0{,}020\,\text{rad}) = 12{,}4\,\text{MPa}$$

- Utilizar a definição de tensão de cisalhamento para encontrar a força **P**:

$$P = \tau_{xy} A = (12{,}4\,\text{MPa})(200\,\text{mm})(60\,\text{mm}) = 148{,}8 \times 10^3\,\text{N}$$

$$\boxed{P = 148{,}8\,\text{kN}}$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS



1) Um círculo de diâmetro d = 220 mm é desenhado em uma placa de alumínio livre de tensões e espessura t = 19 mm. Forças que atuam posteriormente no plano da placa provocam tensões normais $\sigma_x = 82$ MPa e $\sigma_z = 138$ MPa.

Para $E = 69$ GPa e $\nu = \frac{1}{3}$, determine a variação:

a) do comprimento do diâmetro *AB*
b) do comprimento do diâmetro *CD*
c) da espessura da placa
d) do volume da placa.

SOLUÇÃO:

Aplicar a Lei de Hooke generalizada para encontrar os componentes da deformação:

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{69\times 10^3\,\mathrm{MPa}}\left[(82\,\mathrm{MPa}) - 0 - \frac{1}{3}(138\,\mathrm{MPa})\right]$$

$$= +0{,}522\times 10^{-3}\,\mathrm{mm/mm}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{69\times 10^3\,\mathrm{MPa}}\left[-\frac{1}{3}(82\,\mathrm{MPa}) + 0 - \frac{1}{3}(138\,\mathrm{MPa})\right]$$

$$= -1{,}063\times 10^{-3}\,\mathrm{mm/mm}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{69\times 10^3\,\mathrm{MPa}}\left[-\frac{1}{3}(82\,\mathrm{MPa}) - 0 + (138\,\mathrm{MPa})\right]$$

$$= +1{,}604\times 10^{-3}\,\mathrm{mm/mm}$$

Determinação das variações:

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = \left(+0{,}522\times 10^{-3}\,\mathrm{mm/mm}\right)(220\,\mathrm{mm})$$

$$\boxed{\delta_{B/A} = +0{,}114\,\mathrm{mm}}$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = \left(+1{,}604\times 10^{-3}\,\mathrm{mm/mm}\right)(220\,\mathrm{mm})$$

$$\boxed{\delta_{C/D} = +0{,}353\,\mathrm{mm}}$$

$$\delta_t = \varepsilon_y t = \left(-1{,}063\times 10^{-3}\,\mathrm{mm/mm}\right)(19\,\mathrm{mm})$$

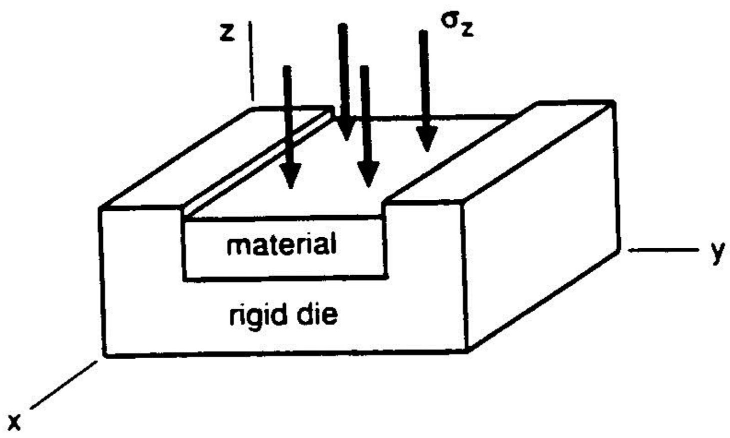
$$\boxed{\delta_t = -0{,}020\,\mathrm{mm}}$$

2) Uma amostra, submetida à tensão compressiva na direção **z**, está confinada de modo que não pode se deformar na direção **y**, mas a deformação na direção **x** é permitida. Considerando que o material exibe comportamento linear elástico, determine:

a) a tensão na direção **y**;

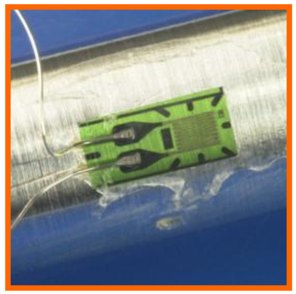
b) a deformação na direção **z**;

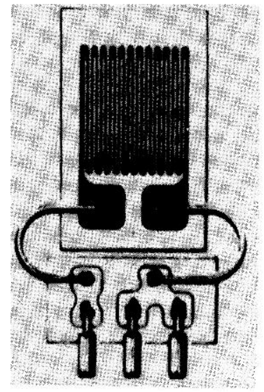
c) a deformação na direção **x**.

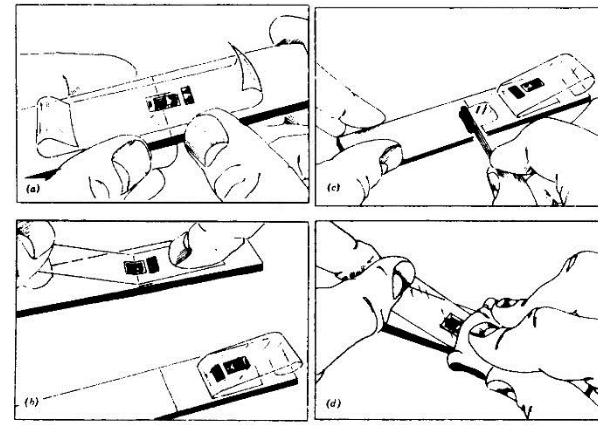


MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

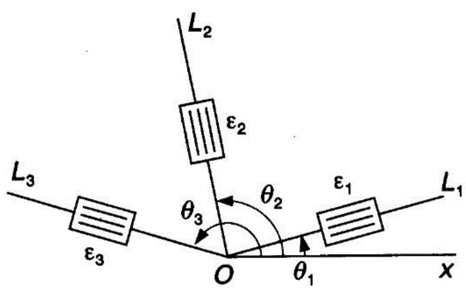
Extensômetro Elétrico de Resistência







Rosetas

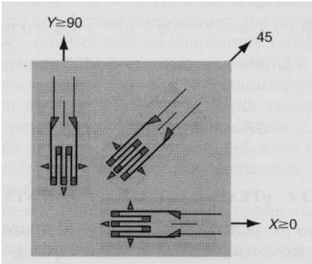


$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3$$

Roseta Retangular



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + / - \frac{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}}{2}$$

$$\tan 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y$$

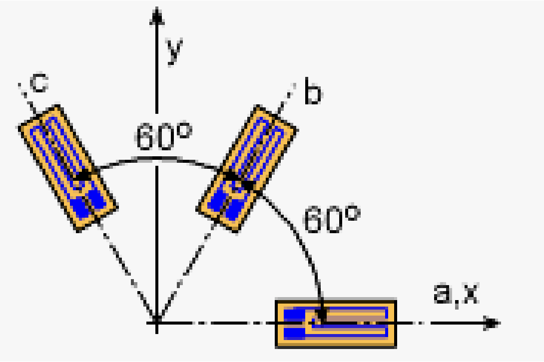
MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO: EXEMPLO

Medidas de deformação foram feitas no ponto crítico de um componente estrutural feito de aço (E = 200 GPa, ν = 0,3). Nessas medidas, foi usada uma roseta de 60°. As leituras da roseta foram:

$\varepsilon_a = 190\ \mu st$, $\varepsilon_b = 200\ \mu st$, $\varepsilon_c = -300\ \mu st$.

Determine as tensões e deformações principais no plano **XY** e suas direções.

SOLUÇÃO:

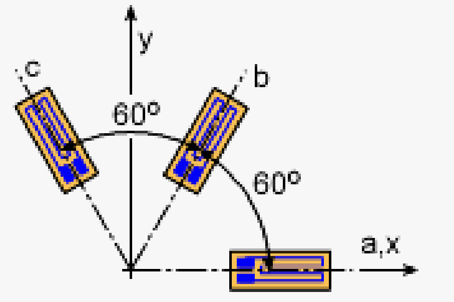


$$\varepsilon_a = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO: EXEMPLO



$$\varepsilon_a = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_b = \tfrac{1}{4}\varepsilon_x + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_c = \tfrac{1}{4}\varepsilon_x + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_y = \tfrac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$$

Upon substituting numerical values we obtain $\varepsilon_x = 190\,\mu$, $\varepsilon_y = -130\,\mu$, and $\gamma_{xy} = 577\,\mu$. Then, from Eq. (2.11), the principal strains are

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{190-130}{2}\mu \pm \mu\left[\left(\frac{190+130}{2}\right)^2 + \left(\frac{577}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= 30\,\mu \pm 330\,\mu$$

or

$$\varepsilon_1 = 360\,\mu, \qquad \varepsilon_2 = -300\,\mu \qquad \text{(c)}$$

The orientations of the principal axes are given by Eq. (2.10):

$$2\theta_p = \tan^{-1}\frac{577}{320} = 61^\circ \qquad \text{or} \qquad \theta_p' = 30.5^\circ, \qquad \theta_p'' = 120.5^\circ \qquad \text{(d)}$$

When θ_p' is substituted into Eq. (2.9) together with Eq. (b), we obtain $360\,\mu$. Therefore 30.5° and 120.5° are the respective directions of ε_1 and ε_2, measured from the horizontal axis in a counterclockwise direction. The principal stresses may now be found from the generalized Hooke's law. Thus, the first two equations of (2.15) for plane stress, letting $\sigma_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_1$, and $\sigma_y = \sigma_2$, together with Eqs. (c), yield

$$\sigma_1 = \frac{200\times 10^9}{1-0.09}[360 + 0.3(-300)](10^{-6}) = 59.341\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{200\times 10^3}{0.91}[-300 + 0.3(360)] = -42.198\text{ MPa}$$