Aula 3 – Introdução à hidrodinâmica

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Introduzir noções acerca do movimento dos fluidos.
- Estabelecer critérios para o estudo do escoamento de um fluido.
- Obter a equação da continuidade de um fluido.

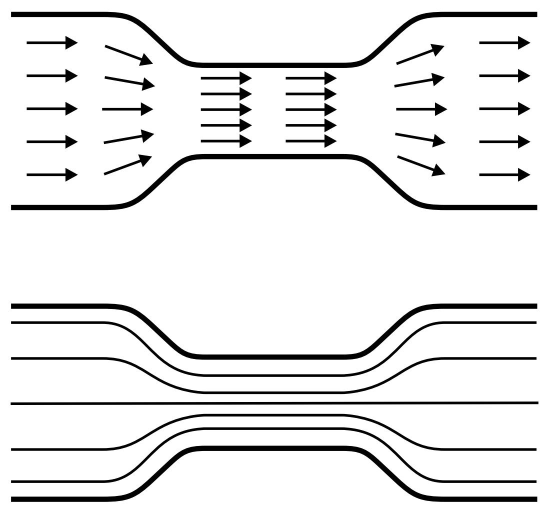
Escoamento de um fluido

Temos tratado, até o momento, do comportamento de fluidos em equilíbrio. Nesta aula, começaremos a estudar os fluidos em movimento. Como vimos nas aulas anteriores, um fluido apresenta propriedades diferentes de outros sistemas, como os corpos rígidos. Num corpo rígido, a distância entre as partículas que o compõem é fixa e a descrição de seu movimento é feita de forma global. Já em um fluido, devido ao fato deste amoldar-se ao vaso que o contém, a distância entre as partículas, em geral, pode variar. Como conseqüência, para descrevermos o movimento de um fluido, temos de considerar, de alguma maneira, o movimento de cada partícula.

Antes de passarmos à descrição do movimento de um fluido, convém definir o que seja uma partícula de fluido. De alguma forma, isso foi feito no estudo da hidrostática, quando utilizamos elementos de fluido de dimensões infinitesimais. Mas, para um fluido em movimento, uma restrição deve ser imposta: as dimensões das partículas de um fluido devem ser bem maiores que as dimensões moleculares, de modo que se possa desprezar o movimento das moléculas constituintes do fluido em sua descrição. Uma das maneiras de descrever o movimento de um fluido é acompanhar a trajetória de cada partícula, através de sua posição $\vec{r}(t)$ e sua velocidade $\vec{v}(t)$, em função do tempo. Mas, dessa forma, a solução das equações de movimento seria muito difícil. Uma outra metodologia é mais utilizada para o estudo do movimento dos fluidos. Ela se baseia na observação da variação da velocidade em função do tempo, em cada ponto de posição $\vec{r}$ do fluido, ou seja:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \; . \tag{3.1}$$

Sob este ponto de vista, estaremos interessados em determinar a velocidade da partícula do fluido que está passando na posição $\vec{r}$, em função do tempo. Observe bem que não estaremos mais interessados em acompanhar a trajetória de uma partícula de fluido, e sim, analisar a velocidade da partícula que está passando por uma dada posição, em um dado instante. Nesta forma de analisar as coisas, estaremos interessados em determinar um campo vetorial, o campo de velocidades do fluido. Determinar este campo consiste em associar a cada ponto do fluido, a cada instante, o vetor velocidade do fluido. A Figura 3.1.a exemplifica o campo de velocidades de um fluido escoando por um tubo com um estreitamento.



(a)

(b)

Figura 3.1: (a) Campo de velocidades de um fluido escoando dentro de um tubo com um estreitamento; (b) Linhas de escoamento correspondentes ao escoamento representado pelo campo de velocidades mostrado em (a).

Vimos acima, que a definição de campo de velocidade inclui a dependência no tempo. Isto significa que, **em geral**, o campo de velocidades varia com o tempo. Quando o campo de velocidades de um fluido não varia com o tempo, temos o que se chama **escoamento estacionário**, no qual o campo de velocidades é dado por $\vec{v}(\vec{r})$. É interessante mencionar um tipo de escoamento não estacionário, o **escoamento turbulento**, no qual as velocidades variam aleatoriamente de um ponto para outro, e de um instante para outro. Este é o caso, por exemplo, do escoamento de água em cachoeiras e corredeiras.

Para termos uma visão inicial um pouco mais completa do escoamento de fluidos, podemos classificar os escoamentos observando outras características, além da dependência temporal. Do ponto de vista da presença de forças de atrito ou dissipativas, um escoamento pode ser classificado como **viscoso** ou

não viscoso. Em um escoamento não viscoso estão ausentes forças dissipativas entre as partículas do fluido em movimento ou entre as partículas do fluido e sua vizinhança, análogas às forças de atrito. O fluido que apresenta escoamento não viscoso é chamado de **fluido ideal**. Os escoamentos podem ser classificados também como **rotacionais** ou **irrotacionais**. Em um escoamento rotacional, o campo de velocidades mostra padrões de circulação, como mostrado na Figura 3.2.Um exemplo de escoamento rotacional é o redemoinho apresentado pela água escoando pelo ralo de uma pia. Devemos observar, em relação aos diversos tipos de escoamento, que **a análise de dinâmica dos fluidos apresentada, nesta e na próxima aula, será sempre baseada em escoamentos estacionários, irrotacionais e não viscosos**.

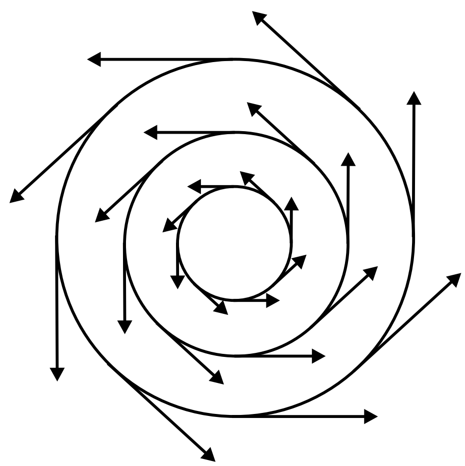


Figura 3.2: Campo de velocidades de um escoamento rotacional.

Podemos obter uma melhor visualização do escoamento de um fluido fazendo passar linhas tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do fluido. As linhas obtidas desta forma são chamadas linhas de corrente, e estão esquematizadas na Figura 3.1.b. Esta figura mostra linhas de corrente correspondentes ao campo de velocidades mostrado na Figura 3.1.a. Quando estudamos um escoamento estacionário, as linhas de corrente se confundem com as linhas de escoamento, que são as linhas que descrevem a trajetória de uma partícula de um fluido em movimento.

A partir do conceito de linhas de corrente, podemos definir também o que seja um tubo de corrente. Um tubo de corrente é a superfície formada pelas linhas de corrente que passam pelos pontos de uma determinada curva fechada C no fluido, como mostra a Figura 3.3. No regime estacionário, as linhas de corrente nunca atravesam as paredes de um tubo de corrente, uma vez que as linhas de corrente não mudam com o tempo.

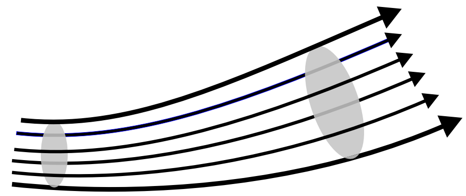


Figura 3.3: Tubo de corrente no escoamento de um fluido.

Equação da continuidade

Na sessão anterior, introduzimos algumas noções acerca do escoamento de fluidos. Agora, iremos discutir o escoamento propriamente dito, ou seja, o movimento de um fluido. Nessa primeira abordagem, nos basearemos no fato de que a massa de um fluido em escoamento se conserva. Para um fluido em escoamento, a massa de fluido que entra em uma determinda região deve ser igual à massa que sai desta região, em um determinado intervalo de tempo. Tomemos como exemplo uma canalização de água. Se delimitarmos um trecho desta canalização, toda a massa de água que entra neste pedaço de cano em um intervalo de tempo, será igual à massa de água que sai no mesmo intervalo de tempo.

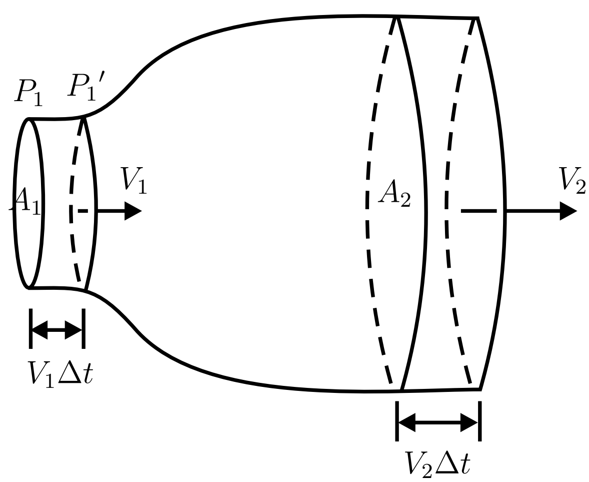


Figura 3.4: Conservação da massa de um fluido escoando.

O estabelecimento da conservação da massa pode ser feito através da grandeza chamada *vazão mássica* Q_M, que nada mais é do que a taxa de variação temporal da massa de fluido em escoamento, ou seja:

$$Q_M = \frac{dM}{dt} \ , \tag{3.2}$$

onde a vazão Q_M é expressa em unidades de kg/s (quilogramas por segundo).

O próximo passo de nosso estudo será considerar a conservação da massa em um tubo de corrente. Nosso objetivo será relacionar a velocidade do fluido com a sua vazão. Para isso, consideraremos um tubo de corrente no interior do qual a velocidade é constante . Consideremos também, para efeito do cálculo da vazão, um intervalo de tempo Δt infinitesimal, pequeno o suficiente para considerarmos *constante* a velocidade v do fluido ao longo de um comprimento $v\Delta t$ (ver Figura 3.4). Consideremos, para efeito de nossa análise, o trecho de tubo de corrente entre P_1 e P_1', o qual está mostrado na Figura 3.4. Consideremos, também, que a área de sessão reta e a velocidade do fluido em P_1 são iguais a A_1 e V_1, respectivamente. O volume do trecho de tubo entre P_1 e P_1' será igual então a $A_1V_1\Delta t$. Se a densidade do fluido neste trecho de tubo for igual a ρ_1, a massa ΔM de fluido contida no trecho de tubo entre P_1 e P_1' será igual a:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t. \tag{3.3}$$

A vazão do fluido em P_1' será dada então por:

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 \ . \tag{3.4}$$

Como a vazão no tubo deve ser constante, para qualquer ponto do tubo deverá valer a equação:

$$Q_M = \rho A v \ , \tag{3.5}$$

ou seja, para quaisquer dois pontos do tubo de corrente valerá a seguinte relação:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \ . \tag{3.6}$$

Neste ponto, vale a pena definirmos a vazão volumétrica de um fluido, Q_V, que é a taxa de variação temporal do volume de um fluido em escoamento, ou seja:

$$Q_M = \rho Q_V \ , \tag{3.7}$$

ou então:

$$Q_V = A v \ . \tag{3.8}$$

Por outro lado, se o fluido for incompressível, ou seja, se a sua densidade for uniforme ao longo de todo o tubo de corrente, teremos então:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \ . \tag{3.9}$$

A equação da continuidade permite a análise de diversas situações que ocorrem em nosso dia-a-dia. Este é o caso do aumento do alcance do jato de água de uma mangueira, quando diminuímos o diâmetro de sua saída, ou do estreitamento do fio de água que cai da boca de uma torneira. Essas situações serão tratadas nos exemplos a seguir.

Exemplo 1

O bocal de uma mangueira para molhar jardins pode variar o seu diâmetro entre 1 e $3mm$. Sabendo que a vazão de água na mangueira é igual a $1,0l/s$, e que o bocal está posicionado horizontalmente a $1,0m$ do chão, determine os valores máximo e mínimo do alcance do jato da mangueira.

Solução:

Em primeiro lugar, devemos perguntar qual será a trajetória das partículas de água quando estas abandonarem o bocal da mangueira. Ao sair do bocal, cada partícula comportar-se-á como uma partícula em queda livre, devendo seguir uma trajetória parabólica, como mostrado na Figura 3.5. Como a velocidade inicial de cada partícula de água é horizontal, o seu alcance L será dado por (lembre-se de Física 1):

$$L = v\sqrt{\frac{2h}{g}} \ ,$$

onde v é a velocidade da partícula de água ao deixar o bocal da mangueira, h é a altura da mangueira em relação ao chão e g é a aceleração da gravidade. Uma vez que a altura da mangueira é mantida constante, e sua inclinação também, a única maneira de variar o alcance do jato é através da variação da velocidade de saída da água.

Uma vez que a vazão Q da água que sai da mangueira é constante, podemos variar a velocidade de saída da água através da variação do diâmetro do bocal, já que:

$$Q_V = Av \ ,$$

onde A é a área do bocal, a qual, por sua vez, é igual a $\pi d^2/4$. Logo, a velocidade de saída da água será dada por:

$$v = \frac{Q_V}{A} = \frac{4Q_V}{\pi d^2}.$$

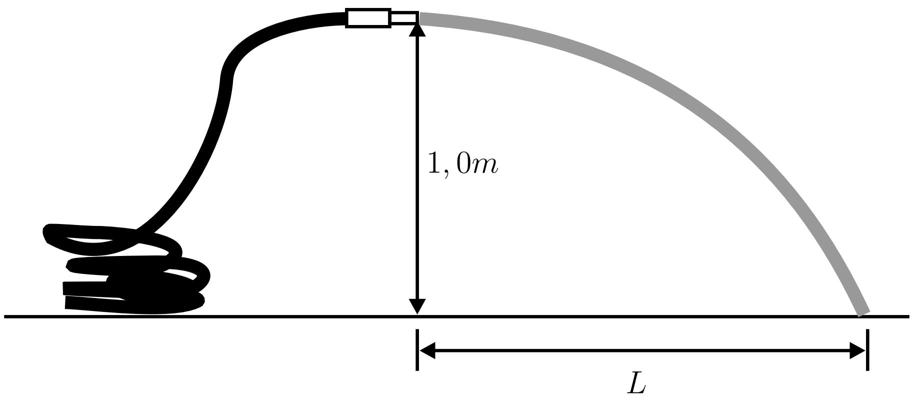


Figura 3.5: Exemplo 1.

Agora, então, podemos escrever a equação do alcance em função dos dados do problema:

$$L = \frac{4Q}{\pi d^2}\sqrt{\frac{2h}{g}} \; .$$

A vazão é igual a $1l/s$, o que por sua vez é igual a $10^{-3}m^3/s$ e a altura h é igual a $1,0m$. Logo, o alcance será dado por:

$$L = \frac{4 \times 10^{-3}m^3/s}{3.14 \times d^2}\sqrt{\frac{2 \times 1m}{9,8m/s^2}} = \frac{5,7 \times 10^{-4}m^3}{d^2} \; .$$

Primeiramente, calculemos o alcance quando o bocal está com $0,5cm = 5,0 \times 10^{-3}m$:

$$L = \frac{5,7 \times 10^{-4}m^3}{25,0 \times 10^{-6}m^2} = 22,8m \; .$$

Quando o bocal está com seu diâmetro igual a $1,0cm$ temos:

$$L = \frac{5,7 \times 10^{-4}m^3}{1,0 \times 10^{-4}m^2} = 5,7m \; .$$

Portanto, o alcance mínimo será igual a $5,7\ m$ e o alcance máximo será igual a $22,8\ m$.

Exemplo 2

Uma torneira (ver Figura 3.6) despeja água com uma vazão de $10ml/s$. Sabendo que a boca da torneira tem $1,0cm$ de diâmetro, determine o diâmetro do fio de água que cai da torneira , $10,0cm$ abaixo da boca da torneira.

Solução:

Da mesma forma que no exemplo anterior, as partículas de água, ao saírem da boca da torneira estarão em queda livre. Isto fará com que a

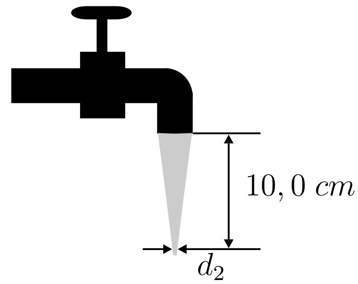


Figura 3.6: Exemplo 2.

sua velocidade aumente enquanto elas caem. Por outro lado, uma vez que a densidade da água é constante, a vazão volumétrica do fio de água que cai da torneira será a mesma em qualquer altura. A velocidade com que a água sai da torneira pode ser facilmente determinada através da equação $Q_V = A_1 v_1$, onde Q_V é a vazão volumétrica, A_1 é a área de seção reta do tubo, e v_1 é a velocidade de saída da água. Portanto:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{10 \times 10^{-6} m^3/s}{3,14 \times \frac{(10^{-2} m)^2}{4}} = \frac{10^{-5} m^3/s}{7,8 \times 10^{-5} m^2} = 1,3 \times 10^{-1} m/s.$$

Como a densidade da água é constante ao longo do fio, podemos facilmente determinar as áreas do fio em qualquer altura através da equação $A_1 v_1 = A_2 v_2$, ou seja:

$$A_2 = \frac{v_1}{v_2} A_1.$$

Mas para isso precisaremos determinar a velocidade v_2, que pode ser obtida através da equação (lembre-se, mais uma vez, das aulas de Física 1):

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh \ ,$$

onde h é a altura de queda das partículas de água. A velocidade v_2 será dada então por:

$$v_2 = \sqrt{(1,3 \times 10^{-1})^2 m^2/s^2 + 2 \times 9,8 m/s^2 \times 0,1 m} = 1,4 m/s \ .$$

Então, podemos calcular a área A_2:

$$A_2 = \frac{v_1}{v_2} A_1 = \frac{1,3 \times 10^{-1} m/s}{1,4 m/s} \times 7,8 \times 10^{-5} m^2 = 7,2 \times 10^{-6} m^2.$$

Agora, podemos determinar d_2, o diâmetro do fio de água, $10 cm$ abaixo da torneira:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \times A_2}{3,14}} = \sqrt{\frac{4 \times 7,2 \times 10^{-6} m^2}{3,14}} = 3 mm.$$

Resumo

Nesta aula, discutimos a mecânica dos fluidos. Começamos pela introdução ao estudo do escoamento de um fluido por meio do campo vetorial de velocidades $\vec{v}(\vec{r}, t)$, e, a seguir, fizemos a classificação de diversos tipos de escoamento (estacionário e não estacionário, viscoso e não viscoso, rotacional e irrotacional). Continuamos introduzindo os conceitos de *linha de corrente* e *tubo de corrente*. Finalmente, estabelemos a conservação da massa para o escoamento de um fluido, a qual pode ser visualizada pela equação $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 v_2$, em duas seções retas de um tubo de corrente.

Exercícios

1. Uma tubulação de $25,4\,cm$ de diâmetro transporta água com velocidade de escoamento igual a $3\ m/s$. Qual a massa total de água transportada por essa tubulação durante um dia inteiro de operação?

2. O êmbolo de uma seringa de injeção cheia de água é empurrado a uma velocidade de $1\,mm/s$. A seringa tem seu diâmetro interno igual a $1,0\,cm$. A agulha na saída da seringa tem o diâmetro igual a $0,5\,mm$. Determine (a) a vazão e (b) a velocidade de escoamento d'água na saída da agulha.

3. Uma mangueira de água, cujo bocal tem $12mm$ de diâmetro, está apontada verticalmente para cima. Pela mangueira passa água a uma vazão de $300ml/s$. Qual a altura máxima acima do bocal atingida pela água?

4. Em vez de água, a seringa de injeção do exercício 2 está cheia com glicerina. Determine a vazão mássica de glicerina que sai pela ponta da agulha.