

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

EDUARDO VINÍCIUS DA SILVA RIBEIRO

**Formalismo euclidiano na termodinâmica de buracos  
negros**

Lorena – SP

2020



EDUARDO VINÍCIUS DA SILVA RIBEIRO

**Formalismo euclidiano na termodinâmica de buracos  
negros**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo como requisito parcial para conclusão da Graduação do curso de Engenharia Física.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Bertha Cuadros-Melgar.

Lorena – SP

Junho de 2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Automatizado  
da Escola de Engenharia de Lorena,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ribeiro, Eduardo Vinícius da Silva  
Formalismo euclidiano na termodinâmica de buracos  
negros / Eduardo Vinícius da Silva Ribeiro;  
orientadora Bertha Cuadros-Melgar. - Lorena, 2020.  
75 p.

Monografia apresentada como requisito parcial  
para a conclusão de Graduação do Curso de Engenharia  
Física - Escola de Engenharia de Lorena da  
Universidade de São Paulo. 2020

1. Formalismo euclidiano. 2. Termodinâmica de  
buracos negros. 3. Transição de hawking-page. I.  
Título. II. Cuadros-Melgar, Bertha, orient.

# Agradecimentos

Por muito tempo pensei em como faria os agradecimentos do meu trabalho de graduação e, apesar tudo, chegou a hora; por ironia do destino, o número de pessoas que eu poderia agradecer é maior do que eu esperava. Sou grato a muitas pessoas, mas agradecerei nominalmente apenas àquelas que fizeram parte da quase totalidade dos anos que passei nessa faculdade; também é à estas pessoas que este trabalho é dedicado.

Antes de tudo e todos, tenho que agradecer meus pais, Vicente e Ceila. Desde muito cedo, sempre fui incentivado a estudar e nunca me foi exigido que deixasse de lado um mínimo sequer da dedicação aos estudos em virtude de outra coisa qualquer; foram eles que me ensinaram a importância de lutar pelo que acredito e não desistir. Apesar de todos os percalços, eu nunca desejei e nunca desejarei outros pais. Obrigado por me apoiarem independentemente de tudo.

À minha irmã, Lídia, o que tenho a dizer é que voltar a morar com ela depois de tanto tempo e, sobretudo, dividir meus primeiros 3 anos da faculdade com seus 3 últimos anos nela foram, creio que sem muitas dúvidas, as melhores coisas que poderiam ter acontecido no momento. Você, Lídia, você não é a irmã que eu poderia desejar, você é melhor, muito melhor. São tantas coisas que nem sei pelo que te agradecer. Só consigo dizer o que sempre te falo: quando eu crescer, quero ser igual a você.

Em todo esse tempo que passei em Lorena, fiz mais amigos do que esperava, mas existem alguns que foram realmente importantes. Primeiramente, Murilo, que foi o primeiro amigo que fiz na faculdade e uma das pessoas com que mais me identifico. Também foi graças à sua incapacidade de usar sarcasmo que me tornei amigo do Carioca, vulgarmente conhecido como Arthur. Aliás, eu diria que morar com você, Arthur, nesses últimos anos, têm sido uma experiência ímpar (no bom sentido); eu sei que não sou a pessoa de trato mais fácil no mundo e que conviver comigo, às vezes, não é a tarefa mais agradável, mas espero que você considere que tenha sido uma boa escolha dividirmos a mesma moradia, porque eu considero; nada paga o tempo que jogamos fora discutindo o porquê da qualidade de determinado filme, livro ou jogo ser questionável, ou falando qualquer outro tipo de coisas sem sentindo em infinitos fins de tarde tomando café. Isso eu considero uma amizade para a vida. Aliás, esse incansável hábito de ir tomar café, no mesmo lugar, todo não tão santo dia, introduziu em nosso “círculo” de amizades um bom amigo que não esperávamos, Gustavo, a quem também deixo meus agradecimentos.

Dentre esses amigos, outro de grande importância é Antonio. Nosso gosto compartilhado (ou, talvez, vício) por cafés de qualidade, música e física foi o que nos aproximou. Admiro muito o pesquisador que você se tornou e a pessoa que você é, e posso dizer, sem

medo de cometer algum erro, que você é uma das pessoas que mais influenciou minha formação acadêmica, tanto na forma de pensar quanto na forma de encarar problemas. Espero que ainda possamos trabalhar juntos em mais projetos e gastar muito mais tempo tomando café enquanto discutimos teorias de calibre.

E também há Triboni, que coincidentemente possui o mesmo nome que eu. Acho que foi nosso gosto por café que nos aproximou, além do grande gosto pelas ciências que não escolhemos nos especializar: as ciências humanas. Das diversas coisas de valor inestimável que já citei até aqui, certamente as nossas conversas sobre política, filosofia, arte, ou mesmo sobre a causa perdida que é a vida, estão entre as principais. Eu o considero, e isso com muita estima, uma espécie de mentor intelectual.

Também deixo meus agradecimentos ao professor Rodrigo Olea, que se dispôs a tirar minhas dúvidas e me ajudou a entender melhor o método dos Kontratermos.

Por fim, eu agradeço e também dedico este trabalho à minha orientadora, Bertha. Possuo uma dívida de gratidão com você, professora, que, sinceramente, acho que nunca vou conseguir pagar. Quando você me aceitou como aluno de iniciação científica no fim do meu primeiro ano na faculdade, com meu currículo de qualidade questionável, você colocou um rumo na minha vida; aliás, aqui devo agradecer ao Murilo e ao Arthur, que foram (sem meu consentimento, diga-se de passagem) falar sobre um tal aluno de engenharia física que queria trabalhar com você, o que acabou me obrigando a criar coragem e entrar em contato. Você foi minha orientadora num sentido muito além do acadêmico, e sou muito feliz em poder te considerar, mais do que minha professora, minha amiga. Eu te agradeço por absolutamente tudo que me proporcionou, em especial os sermões que eu precisava ouvir. Espero que eu, como aluno, tenha te proporcionado ao menos uma fração de tudo que aprendi e conquistei graças a você.

*“[...] vi a circulação de meu sangue escuro, vi a engrenagem do amor e a transformação da morte, vi o Aleph, de todos os pontos, vi no Aleph a Terra, e na Terra outra vez o Aleph e no Aleph a Terra, vi meu rosto e minhas vísceras, vi teu rosto, e senti vertigem e chorei, porque meus olhos tinham visto aquele objeto secreto e conjectural cujo nome os homens usurpam mas que nenhum homem contemplou: o inconcebível universo.”*

Jorge Luis Borges, *O Aleph* (1949).





# Resumo

RIBEIRO, E. V. S. **Formalismo euclidiano na termodinâmica de buracos negros.** 2020. 75 p. Monografia (Trabalho de Graduação de Engenharia Física) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2020.

A termodinâmica de buracos negros é, atualmente, um fértil campo de pesquisa em gravitação, possuindo aplicações desde gravitação quântica, passando pela correspondência AdS/CFT, e até física da matéria condensada. Neste trabalho, aplicamos o formalismo euclidiano, utilizando uma aproximação semiclássica, no estudo das propriedades termodinâmicas de buracos negros contidos em um espaço-tempo assintoticamente AdS. Estudamos os casos do buraco negro de Schwarzschild-AdS e Born-Infeld-AdS, analisando a estabilidade das fases e a transição de fase de Hawking-Page, e empregamos o método dos Kontratermos para a regularização da ação e das quantidades conservadas.

**Palavras-chave:** Formalismo euclidiano. Termodinâmica de buracos negros. Transição de Hawking-Page.



# Abstract

RIBEIRO., E. V. R. **Euclidean formalism in black hole thermodynamics**. 2020. 75 p. Monograph (Undergraduate Thesis in Engineering Physics) – Engineering School of Lorena, University of São Paulo, Lorena, 2020.

Nowadays, black hole thermodynamics is a productive research field in gravitation which has applications from quantum gravity, going through AdS/CFT correspondence, and reaching even condensed matter physics. In this work we apply the euclidean formalism using a semiclassical approximation in the study of black hole thermodynamical properties in an asymptotically AdS spacetime. We study two cases, the Schwarzschild-AdS and the Born-Infeld-AdS black holes, analyzing the phase stability and the Hawking-Page phase transition. We also employ the Kounterterms method to regularize the action and the conserved quantities.

**Keywords:** Euclidean formalism. Black hole thermodynamics. Hawking-Page phase transition.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>17</b>
2.1	Conceitos de geometria diferencial	17
2.2	Ação de Einstein-Hilbert e o termo de Gibbons-Hawking-York	20
2.3	Formalismo euclidiano	21
2.3.1	Integrais de trajetória e termodinâmica	21
2.3.2	Aproximação semiclássica para o campo gravitacional	23
2.4	Espaço AdS	24
2.4.1	Estrutura assintótica	25
2.4.2	Propriedades termodinâmicas	27
2.5	Equilíbrio de um buraco negro de Schwarzschild com radiação térmica	27
2.6	Teorema de Noether	29
2.7	Coordenadas normais gaussianas	31
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Transição de fase de Hawking-Page</b>	<b>33</b>
3.1.1	Métrica Schwarzschild-AdS	33
3.1.2	A transição de Hawking-Page	36
<b>3.2</b>	<b>Kontratermos</b>	<b>41</b>
3.2.1	Caso em 4 dimensões	42
3.2.1.1	Quantidades conservadas	46
3.2.1.2	Origem topológica	47
3.2.2	Kontratermos para dimensões pares	48
3.2.2.1	Quantidades conservadas	50
3.2.3	Kontratermos em dimensões ímpares	50
<b>3.3</b>	<b>Buraco negro Born-Infeld-AdS</b>	<b>51</b>
3.3.1	Solução de buraco negro topológico	53
3.3.2	Princípio variacional	55
3.3.3	Quantidades conservadas	56
3.3.4	Ação euclidiana	59
3.3.5	Propriedades termodinâmicas	61
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>65</b>

**REFERÊNCIAS** ..... 67

# 1 Introdução

Do ponto de vista clássico, buracos negros são entes completamente estáveis; não havendo nenhum tipo de perturbação, a única modificação possível é, em princípio, o seu crescimento devido à acreção de matéria. Além disso, devido à impossibilidade de qualquer tipo de matéria ou radiação escapar de dentro de seu horizonte de eventos, é possível conjecturar que, ao menos classicamente, sua temperatura é nula, tendo em vista que, caso contrário, algum tipo de radiação de corpo negro deveria poder ser observada. Naturalmente, essas características entram em confronto com as leis da termodinâmica: segundo a terceira lei da termodinâmica, nenhum sistema físico pode alcançar a temperatura de zero Kelvin. Isso também leva a problemas com a segunda lei da termodinâmica, fato ilustrado pela famosa pergunta de John Wheeler a seu então aluno de doutorado, Jacob Bekenstein: “o que acontece quando se joga uma xícara de chá dentro de um buraco negro?”. Segundo o teorema da calvície<sup>1</sup>, buracos negros são completamente caracterizados por três parâmetros, a saber, a massa, o momento angular e a carga elétrica (ISRAEL, 1967; ISRAEL, 1968; CARTER, 1971); considerando um sistema composto pela xícara e pelo buraco negro, a entropia total é dada pela entropia da xícara; no momento em que a xícara é engolida pelo buraco negro, a entropia do sistema como um todo diminui, visto que o buraco negro não possui nenhuma entropia associada e é impossível acessar qualquer informação a respeito da matéria no interior do buraco negro, levando à violação da segunda lei da termodinâmica.

Embora seja possível extrair energia rotacional de um buraco negro através do processo Penrose, existe um limite de energia que pode ser extraída, que impõe a condição de que a área do horizonte de eventos do buraco negro não pode diminuir neste processo (PENROSE, 2002; PENROSE; FLOYD, 1971). Também foi mostrado por Christodoulou e Ruffini (1970, 1971) que nenhuma transformação efetuada em um buraco negro pode diminuir uma quantidade chamada massa irreduzível, que é proporcional à área do horizonte de eventos. Na mesma época, foi mostrado por Hawking (1971, 1972) que a área do horizonte de eventos de um buraco não pode diminuir sob nenhum processo. Todos esses resultados evidenciam uma grande semelhança entre as propriedades da área do horizonte de eventos de um buraco negro e a entropia na termodinâmica clássica, fato que levou Bekenstein (1973) a introduzir, baseando-se em conceitos de teoria de informação, uma entropia para buracos negros como uma medida da informação a respeito do interior do buraco negro que é inacessível a um observador em seu exterior, sendo ela proporcional à área do horizonte de eventos. Possuindo uma entropia associada ao buraco negro, também foi possível estabelecer uma segunda lei generalizada da termodinâmica: a soma da entropia

---

<sup>1</sup> *No-hair theorem*, em inglês.

Tabela 1 – As 4 leis da termodinâmica e as leis análogas para a dinâmica de buracos negros;  $\kappa$  é a gravidade superficial no horizonte de eventos,  $A$  é a área do horizonte,  $\Omega_H$  é a velocidade angular do buraco negro e  $J$  o momento angular.

Lei	Termodinâmica	Buracos Negros
Zero	$T$ é constante no equilíbrio térmico	$\kappa$ é constante no horizonte de eventos
1 <sup>a</sup>	$dE = T dS +$ termos de trabalho	$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ$
2 <sup>a</sup>	$\delta S \geq 0$	$\delta A \geq 0$
3 <sup>a</sup>	Impossível alcançar $T = 0$	Impossível alcançar $\kappa = 0$

Fonte: Autoria própria.

do universo com a entropia do buraco negro não pode diminuir (BEKENSTEIN, 1974).

Na mesma época, Bardeen, Carter e Hawking (1973) obtiveram quatro leis que regem a dinâmica de buracos negros que possuem grande semelhança às quatro leis da termodinâmica; a Tabela 1 apresenta essas leis. Dessas leis, é possível notar que  $A$  e  $S$  realmente possuem um comportamento análogo, além de que  $T$  e a gravidade superficial no buraco negro,  $\kappa$ , possuem um comportamento parecido. Essa analogia, no entanto, é dificultada pelo fato de que buracos negros possuem temperatura nula. A solução desse “problema” veio com a descoberta de Hawking de que buracos negros emitem radiação considerando um cenário semiclássico (HAWKING, 1974; HAWKING, 1975): quantizando um campo escalar num espaço-tempo contendo um buraco negro, o valor esperado no operador de número,  $n$ , para um observador distante é dado por uma distribuição planckiana,

$$\langle n \rangle = \frac{\Gamma}{e^{2\pi\omega\kappa^{-1}} - 1}, \quad (1.1)$$

em que  $\omega$  é a frequência de radiação e  $\Gamma$  é chamado de fator de corpo cinza. Esse resultado mostra que buracos negros emitem radiação como um corpo negro (a menos do fator de corpo cinza) à temperatura  $T = \kappa/2\pi$ . Isso faz com que aquilo que, *a priori*, era apenas uma analogia, se torne um fato: buracos negros são sistemas termodinâmicos que obedecem às leis da termodinâmica clássica; com isso, a entropia do buraco negro é fixada como sendo um quarto da área do horizonte de eventos, resultado conhecido como entropia de Bekenstein-Hawking. A radiação emitida pelo buraco negro consiste, basicamente, na emissão de sua própria energia (que é dada pela massa, a carga elétrica e o momento angular); isso quer dizer que, conforme o buraco negro emite radiação, ele diminui de tamanho, “evaporando” devido à emissão de sua própria energia. Atualmente, a interpretação mais aceita para a formação dessa radiação vem da criação de pares de partículas e antipartículas nas vizinhanças do horizonte de eventos (HAWKING, 1977; UNRUH, 1977; BIRRELL; DAVIES, 1984), de forma similar à polarização do vácuo por efeito Schwinger na eletrodinâmica quântica (SCHWINGER, 1951): um campo no exterior do buraco negro “rouba” energia gravitacional, criando pares de partícula-antipartícula; a



antipartícula é engolida pelo buraco negro enquanto a partícula tunela pela barreira de potencial gravitacional na vizinhança do horizonte de eventos, dando origem ao fluxo que é observado por um observador distante.

É interessante notar que em soluções clássicas em 4 dimensões a gravidade superficial é proporcional ao inverso da massa do buraco negro, de modo que buracos negros maiores possuem menor temperatura; um buraco negro com a massa do Sol ( $\approx 2 \times 10^{30}$  kg) possui uma temperatura de cerca de  $6,2 \times 10^{-8}$  K, o que corrobora o que se espera classicamente, que buracos negros possuem temperatura nula; por outro lado, um buraco negro com a massa de Planck ( $\approx 2,2 \times 10^{-8}$  kg), possui uma temperatura de aproximadamente  $5,6 \times 10^{30}$  K. Além disso, utilizando a lei de Stephan-Boltzmann, é possível modelar o tempo que um buraco negro levaria para emitir toda sua massa em forma de radiação: um buraco negro com a massa do sol levaria  $6,6 \times 10^{74}$  segundos para evaporar completamente (como comparação, a idade do universo é estimada em cerca de  $5,9 \times 10^{17}$  segundos), mais uma vez corroborando o que se espera classicamente; já um buraco negro com a massa de Planck levaria cerca de  $8,6 \times 10^{-40}$  segundos para evaporar toda sua massa.

Também é possível obter o resultado da radiação Hawking utilizando o formalismo de integrais de trajetória, considerando um campo escalar na geometria de Schwarzschild (HARTLE; HAWKING, 1976). Neste caso, a amplitude para emissão de uma partícula pelo buraco negro será expressa como uma soma sobre todas as trajetórias conectando a singularidade no futuro (considerando a máxima extensão analítica da métrica de Schwarzschild) e o infinito. A continuação analítica dessa amplitude no espaço-tempo complexificado de Schwarzschild é, por sua vez, relacionada à amplitude de probabilidade de uma partícula propagar da singularidade no passado para o infinito e, por inversão temporal, à probabilidade do buraco absorver uma partícula. Através da forma dessa conexão entre emissão e absorção, é possível notar que um buraco negro de Schwarzschild irá emitir partículas em um espectro térmico igual ao da dedução original. O que é notável nesse caso é a necessidade de que o propagador das partículas seja periódico no tempo complexo de Schwarzschild, com período igual ao inverso da temperatura do buraco negro, para que seja analítico. De fato, essa é uma característica de funções de Green térmicas, presentes em teoria quântica de campos a temperatura finita.

Essa relação entre a radiação Hawking e integrais de trajetória motivou um estudo mais aprofundado das contribuições gravitacionais no funcional gerador de campos quânticos; complexificando o espaço-tempo através de uma rotação de Wick, a fim de garantir que a integral de trajetória seja bem definida, é possível calcular o funcional gerador para determinadas soluções “bem comportadas” (instantons) das equações de Einstein a nível de 1-loop (GIBBONS; HAWKING, 1977; HAWKING, 1978). Embora ainda não exista uma teoria quântica para a gravitação, essa abordagem fornece, ao menos, uma aproximação semiclássica para possíveis efeitos quânticos gravitacionais. Existem duas formas de se

interpretar o funcional gerador para essas soluções: a probabilidade de encontrá-las em um determinado estado de vácuo e a contribuição da métrica para a função de partição de um *ensemble* termodinâmico a uma dada temperatura; novamente, a temperatura é determinada pela periodicidade no tempo complexo requerida para garantir a analiticidade da integral de trajetória e, em especial, as funções termodinâmicas obtidas nesse *ensemble* são as que mencionamos anteriormente. É essa última interpretação que serve de base para o desenvolvimento do presente trabalho.

Por si só, o estudo das propriedades termodinâmicas de buracos negros e outros tipos de sistemas gravitacionais é de grande importância para compreender possíveis efeitos quânticos em teorias de gravitação, bem como, a estabilidade termodinâmica desses sistemas. No entanto, o desenvolvimento da correspondência AdS/CFT (MALDACENA, 1998) abre mais possibilidades: com base nessa correspondência, Witten propôs que é possível associar a termodinâmica da teoria conforme localizada na borda de um espaço-tempo AdS à termodinâmica do buraco negro contido nesse espaço-tempo (WITTEN, 1998). Com isso em mente, este trabalho se propõe a estudar as propriedades termodinâmicas de buracos negros utilizando o formalismo euclidiano empregado em teoria quântica de campos em uma aproximação semiclássica.

## Objetivos

Os objetivos deste trabalho consistem em estudar as propriedades termodinâmicas de buracos negros assintoticamente AdS, analisando suas funções termodinâmicas e a possível presença de transições de fase, bem como a estabilidade das soluções. Mais especificamente, são estudadas as soluções de Schwarzschild-AdS e de Born-Infeld-AdS.

## Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizados o cálculo simbólico usual em relatividade geral, bem como o formalismo das integrais de trajetória em teoria quântica de campos. Utilizamos o formalismo euclidiano de teoria quântica de campos em temperatura finita (revisado na Seção 2.3) junto de uma aproximação semiclássica para obter a função de partição referente ao buraco negro. Foram utilizados, também, *softwares* de cálculo simbólico, como *Mathematica* e *Maple*, como ferramentas auxiliares no desenvolvimento dos cálculos.

## 2 Revisão Teórica

Neste capítulo, revisaremos alguns conceitos e ferramentas que serão necessários para a compreensão do presente trabalho. A não ser quando explicitado, utilizamos unidades geometrizadas em que  $G = k_B = c = \hbar = 1$ .

### 2.1 Conceitos de geometria diferencial

Antes de prosseguir, revisaremos alguns conceitos básicos de geometria diferencial que formam a base do formalismo matemático da relatividade geral (RIBEIRO; CUADROS-MELGAR; CARDOSO, 2019; WALD, 1984; MISNER; WHEELER; THORNE, 1973; CARROLL, 2004). A relatividade geral é construída a partir do conceito de variedade (pseudo-)riemanniana. Uma variedade  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico que é localmente homeomórfico ao espaço euclidiano (o prefixo pseudo é utilizado quando a variedade é localmente homeomórfica ao espaço de Minkowski), *i.e.*, dentro da vizinhança de um dado ponto, a variedade é idêntica a  $\mathbb{R}^n$ . Uma variedade é chamada de riemanniana quando possui uma estrutura adicional: a métrica. A métrica é uma estrutura matemática que contém toda a informação da geometria da variedade (que, na relatividade geral, representa o espaço-tempo); formalmente, a métrica é definida como um tensor  $(0,2)$  simétrico,  $g : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , com suas componentes  $g_{\mu\nu}$ , em termos de uma base  $e_\mu$  para o espaço tangente, sendo dadas por:

$$g_{\mu\nu} := g(e_\mu, e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu; \quad (2.1)$$

de maneira equivalente, em termos de uma base  $e^\mu$  para o espaço cotangente, obtemos,

$$g^{\mu\nu} := g(e^\mu, e^\nu) = e^\mu \cdot e^\nu, \quad (2.2)$$

com  $g^{\mu\nu}$  sendo as componentes da matriz inversa com componentes  $g_{\mu\nu}$ .

A partir da métrica, é possível introduzir a noção de distância. Em uma variedade, um vetor  $v \in T_p\mathcal{M}$  (que, em termos de uma base  $e_\mu$ , pode ser escrito como  $v = v^\mu e_\mu$ ) é um objeto definido localmente, sendo um elemento do espaço tangente a  $\mathcal{M}$  em um ponto  $p \in \mathcal{M}$ ,  $T_p\mathcal{M}$ ; esse vetor pode ser entendido como um deslocamento infinitesimal em uma dada direção na variedade, de modo que comprimentos infinitesimais são representados pela norma desse vetor. A partir da métrica, podemos definir a norma de um vetor  $v$ :

$$\|v\| = g(v, v) = g(v^\mu e_\mu, v^\nu e_\nu) = v^\mu v^\nu g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu; \quad (2.3)$$

a norma de uma 1-forma (ou vetor dual)  $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ , que é um elemento do espaço cotangente de um ponto  $p$  na variedade, é definida de maneira similar. Por essa razão, a

métrica é normalmente representada na forma do elemento de linha<sup>1</sup>,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.4)$$

Como vetores são elementos definidos localmente, não é possível comparar um vetor em dois pontos distintos, dado que, em cada ponto, existe um único espaço vetorial distinto, com elementos diferentes entre si. Esse problema é contornado a partir da introdução de uma conexão, que é uma estrutura que permite relacionar diferentes espaços tangentes definidos em pontos próximos na variedade. A presença de uma métrica introduz de maneira natural uma conexão, conhecida como conexão de Levi-Civita (ou conexão métrica), cujas componentes em relação a um dado sistema de coordenadas é dada pelos símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\gamma\rho}(\partial_\alpha g_{\beta\rho} + \partial_\beta g_{\alpha\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}). \quad (2.5)$$

Da conexão, é possível definir uma derivada covariante, denotada por  $\nabla$ , que generaliza a derivada parcial levando em consideração os efeitos da curvatura da variedade. A ação da derivada covariante em um vetor  $v^\mu$  é dada por<sup>2</sup>

$$\nabla_\alpha v^\mu = \partial_\alpha v^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu v^\gamma, \quad (2.6)$$

enquanto que, para uma 1-forma  $v_\mu$ , é dada por,

$$\nabla_\alpha v_\mu = \partial_\alpha v_\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta v_\beta. \quad (2.7)$$

A partir da derivada covariante, pode-se definir a noção de transporte paralelo de um vetor por uma curva. Um vetor  $v$  é dito ser transportado paralelamente a uma curva de vetor tangente  $t$  se a derivada direcional de  $v$  na direção de  $t$  é nula, *i.e.*,

$$t^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0. \quad (2.8)$$

Para um tensor de ordem  $(k, l)$ , a condição de transporte paralelo é,

$$t^\mu \nabla_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = 0. \quad (2.9)$$

Uma característica de variedades com curvatura não nula é a não comutatividade da aplicação sucessiva de duas derivadas covariantes, *i.e.*,  $\nabla_\mu \nabla_\nu v^\alpha \neq \nabla_\nu \nabla_\mu v^\alpha$ ; essa diferença entre a ordem em que as derivadas são aplicadas é dada pelo comutador  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ ,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu v^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu v^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} v^\beta, \quad (2.10)$$

<sup>1</sup> O elemento de linha é uma espécie de generalização do teorema de Pitágoras para espaços planos: se  $g = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$  e a variedade tem dimensão  $n$ , o elemento de linha se torna  $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$ .

<sup>2</sup> É usual cometer o abuso de linguagem de se referir às componentes de um tensor  $T$ ,  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$ , como sendo o próprio tensor. Os tensores, como objetos abstratos, são quantidades invariantes, enquanto que suas componentes dependem do sistema de coordenadas empregado.

em que  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  é o tensor de Riemann, definido em termos dos símbolos de Christoffel como,

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (2.11)$$

O tensor de Riemann caracteriza, completamente, a curvatura de uma variedade. É natural, portanto, que  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$  quando a curvatura é nula; de fato, a própria conexão se anula nesse caso, de forma que a derivada covariante se reduz à derivada parcial comum.

Duas quantidades importantes são definidas em termos do tensor de Riemann: o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, definidos, respectivamente, como:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad \text{e} \quad R = R^\mu_{\mu}. \quad (2.12)$$

Um outro conceito que será muito utilizado no decorrer deste trabalho é o de derivada de Lie, que introduziremos a seguir. Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade e  $\phi_t$  um grupo uniparamétrico de difeomorfismos com parâmetro  $t$ , gerado por um vetor  $v^3$  (WALD, 1984). Para um  $p \in \mathcal{M}$  fixo,  $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  define uma curva, chamada de órbita de  $\phi_t$ , que passa por  $p$  em  $t = 0$ , de modo que podemos associar o vetor tangente a essa curva em  $t = 0$ ,  $v \in T_p\mathcal{M}$ , ao difeomorfismo  $\phi_t$ . Reciprocamente, podemos associar a um vetor  $v$  um difeomorfismo  $\phi_t$  a partir das curvas integrais de  $v$ : considere um sistema de coordenadas  $\{x^\mu\}$  na vizinhança de um ponto  $p \in \mathcal{M}$ , de modo que as curvas integrais de  $v$  sejam dadas pela equação,

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu; \quad (2.13)$$

esse sistema de equações diferenciais tem uma única solução dado um ponto inicial  $t = 0$ , de modo que cada vetor  $v$  possui uma única família de curvas integrais. Dada essa família de curvas integrais, para cada  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\phi_t(p)$  é definido como o ponto que se encontra no parâmetro  $t$  ao longo da curva integral de  $v$  que começa em  $p$ . Podemos entender a ação de um difeomorfismo  $\phi_t$  em um tensor  $T$ ,  $\phi^*T$ , como “carregando” o tensor ao longo da curva integral do vetor que gera o difeomorfismo.

A derivada de Lie de um tensor  $T$  ao longo de um vetor  $v$  é dada por,

$$\mathcal{L}_v T = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\phi_{-t}^* T - T}{t} \right), \quad (2.14)$$

em que  $\phi_t$  é o difeomorfismo gerado por  $v$ . Heuristicamente, podemos entender a derivada de Lie de  $T$  ao longo de  $v$  como sendo a derivada de  $T$  ao longo do fluxo de  $v$  (as curvas integrais). Na forma de componentes, a equação acima se torna:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= v^\gamma \nabla_\gamma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \sum_{i=1}^k T^{\mu_1 \dots \gamma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_\gamma v^{\mu_i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^l T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \gamma \dots \nu_l} \nabla_{\nu_j} v^\gamma. \end{aligned} \quad (2.15)$$

<sup>3</sup> Um grupo uniparamétrico de difeomorfismos  $\phi_t$  é um mapa suave  $\mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que, para um  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  é um difeomorfismo.

Também definimos, aqui, o delta de Kronecker generalizado como o seguinte determinante:

$$\delta_{[\mu_1 \dots \mu_p]}^{[\nu_1 \dots \nu_p]} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\mu_1}^{\nu_1} & \delta_{\mu_1}^{\nu_2} & \dots & \delta_{\mu_1}^{\nu_p} \\ \delta_{\mu_2}^{\nu_1} & \delta_{\mu_2}^{\nu_2} & & \delta_{\mu_2}^{\nu_p} \\ \vdots & & \ddots & \\ \delta_{\mu_p}^{\nu_1} & \delta_{\mu_p}^{\nu_2} & \dots & \delta_{\mu_p}^{\nu_p} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

## 2.2 Ação de Einstein-Hilbert e o termo de Gibbons-Hawking-York

Usualmente, a ação do campo gravitacional para a Relatividade Geral é tomada como sendo a ação de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.17)$$

em que  $\mathcal{M}$  representa uma variedade dotada de métrica  $g_{\mu\nu}$ ,  $R$  é o escalar de Ricci e  $g = \det g_{\mu\nu}$ . A variação total de  $\mathcal{S}_{EH}$  com relação a variações arbitrárias da métrica é dada por,

$$\delta\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \left[ \int_{\mathcal{M}} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{M}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \right], \quad (2.18)$$

em que  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  é o tensor de Einstein. Utilizando a identidade de Palatini, podemos escrever,

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} v^{\lambda}, \quad (2.19)$$

com  $v^{\lambda} = (g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\lambda\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_{\nu} \delta g_{\alpha\beta}$ ; utilizando o teorema de Gauss, o segundo termo de (2.18) se torna, portanto,

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla_{\lambda} v^{\lambda} \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial\mathcal{M}} v^{\lambda} d\Sigma_{\lambda} = \epsilon \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} n_{\lambda} v^{\lambda}, \quad (2.20)$$

em que,  $\epsilon = n_{\mu} n^{\mu}$ ,  $n_{\lambda}$  é um vetor normal à superfície  $\Sigma := \partial\mathcal{M}$  e  $h = \det h_{ab}$  é o determinante da métrica induzida em  $\Sigma$ . Utilizando a decomposição  $g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \epsilon n^{\mu} n^{\nu}$ , o integrando do termo de superfície se torna,

$$n_{\lambda} v^{\lambda} = n^{\rho} h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} - n^{\mu} h^{\rho\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu}. \quad (2.21)$$

O primeiro termo da Eq. (2.21) depende apenas de  $\delta g_{\mu\nu}$  na borda e suas derivadas tangenciais,  $h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu}$ , de forma que se anula quando se impõe a condição de Dirichlet  $\delta g_{\mu\nu}|_{\Sigma} = 0$ . O segundo termo, por outro lado, depende de  $\delta g_{\mu\nu}$  e sua derivada normal,  $n^{\mu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu}$ , sendo, portanto, não nulo sob a condição imposta, de forma que:

$$\delta g_{\mu\nu} \Big|_{\Sigma} = 0 \Rightarrow n_{\lambda} v^{\lambda} \Big|_{\Sigma} = - n^{\mu} h^{\rho\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} \Big|_{\Sigma} = - h^{\rho\nu} n^{\mu} \partial_{\mu} \delta g_{\rho\nu} \Big|_{\Sigma}. \quad (2.22)$$

Desta forma, a condição de Dirichlet não é suficiente para fazer com que a ação de Einstein-Hilbert constitua um princípio variacional bem definido para a Relatividade Geral, visto que  $\delta\mathcal{S}_{EH}/\delta g^{\alpha\beta} \neq G_{\alpha\beta}$ . Esse termo de borda surge porque, ao contrário

do usual em outras teorias de campos, a ação de Einstein-Hilbert envolve derivadas de segunda ordem na variável dinâmica, de forma que o uso do teorema de Gauss para a eliminação desses termos rende outros termos com dependência em  $\delta g_{\mu\nu}$  e suas derivadas; embora a imposição da condição de Dirichlet dê conta dos termos que envolvem  $\delta g_{\mu\nu}$  e suas derivadas tangenciais, as derivadas normais continuam presentes. Embora as equações de movimento obtidas sejam as corretas quando se considera que as derivadas normais se anulam, essa condição não é adequada quando se visa obter um princípio variacional bem definido (em especial no caso de espaços-tempos com borda) (DYER; HINTERBICHLER, 2009).

A resolução desse problema consiste em adicionar um novo termo na ação gravitacional que cancela os termos que contem as derivadas normais das variações da métrica; esse termo é conhecido como termo de Gibbons-Hawking-York (GHY) (YORK, 1972; GIBBONS; HAWKING, 1977):

$$\mathcal{S}_{GHY} = 2\epsilon \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h} d^3y K, \quad (2.23)$$

em que  $K := \text{tr } K_{\mu\nu}$  e  $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu$  é o tensor de curvatura extrínseca (segunda forma fundamental). A ação gravitacional padrão é, portanto, dada por,

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_{GHY} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{\epsilon}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} K, \quad (2.24)$$

suplementada pela condição de Dirichlet  $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ . Por fim, é importante notar que, dentro do contexto de integrais de trajetória, a presença do termo de GHY é ainda mais importante, visto que ele é necessário para dar sentido às amplitudes de transição calculadas a partir da ação (GIBBONS; HAWKING, 1977; HAWKING; ISRAEL, 1979).

## 2.3 Formalismo euclidiano

### 2.3.1 Integrais de trajetória e termodinâmica

É um fato notável, na mecânica estatística, que a temperatura de um sistema é naturalmente conectada à periodicidade das funções de Green no tempo imaginário, obtido a partir de uma rotação de Wick, com o período sendo dado pelo inverso da temperatura do sistema (PESKIN; SCHROEDER, 1995; FROLOV; NOVIKOV, 1998). É conveniente, portanto, considerar uma abordagem euclidiana, dado que, em um espaço-tempo estático, a coordenada temporal complexa introduzida pela rotação de Wick,  $\tau \rightarrow it$ , dá uma métrica com assinatura euclidiana. A teoria quântica de campos usual em temperatura nula, além da teoria de campos estatística, pode ser obtida por meio da continuação analítica da versão euclidiana da teoria; o caso de temperatura não nula surge se a topologia do tempo euclidiano,  $\tau$ , for  $\mathbb{S}^1$  ao invés de  $\mathbb{R}^1$ , *i.e.*, se  $\tau$  for periódico. Essa abordagem pode ser

implementada na quantização por integrais de trajetória especificando que a integração seja feita sobre configurações periódicas no tempo euclidiano<sup>4</sup>.

No formalismo das integrais de trajetória, a amplitude de propagação de um dado estado  $|\phi_1, t_1\rangle$  para um outro estado  $|\phi_2, t_2\rangle$  de um campo quântico  $\phi$  é dada pelo funcional gerador,  $Z$  (FROLOV; NOVIKOV, 1998; GIBBONS; HAWKING, 1977),

$$\langle\phi_2, t_2|\phi_1, t_1\rangle =: Z = \int \mathcal{D}[\phi] e^{i\mathcal{S}[\phi]}, \quad (2.25)$$

em que  $\mathcal{S}[\phi]$  é a ação clássica do campo e  $\mathcal{D}[\phi]$  é uma medida de integração adequada no espaço das funções  $\phi$ . Por outro lado, utilizando o operador de evolução temporal,  $U(t_2, t_1) = e^{-iH(t_2-t_1)}$ , temos,

$$\langle\phi_2, t_2|\phi_1, t_1\rangle = \langle\phi_2| e^{-iH(t_2-t_1)} |\phi_1\rangle, \quad (2.26)$$

em que  $H$  é o hamiltoniano. Tomando  $t_2 - t_1 = -i\beta$ ,  $\phi_2 = \phi_1$  e somando sobre todos os  $\phi_1$ , segue que,

$$Z = \text{tr} e^{(-\beta H)} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\mathcal{S}^E}, \quad (2.27)$$

em que  $\mathcal{S}^E$  é a ação euclidiana, cuja relação com a ação usual é  $i\mathcal{S} = -\mathcal{S}^E$ , e a integral é tomada sobre todas as configurações de  $\phi$  periódicas no tempo imaginário com período  $\beta$ . É importante ressaltar que a rotação de Wick também garante a convergência da integral na Eq. (2.27), visto que  $\mathcal{S}^E \geq 0$  por hipótese; o termo oscilante,  $e^{i\mathcal{S}}$ , se torna, portanto, um termo que decai exponencialmente,  $e^{-\mathcal{S}^E}$ . Podemos reconhecer o lado esquerdo da Eq. (2.27) como a função de partição para o *ensemble* canônico de um campo  $\phi$  à temperatura  $T = \beta^{-1}$  (FEYNMAN, 1972).

Pode-se considerar, também, o *ensemble* grande canônico, em que se tem um potencial químico  $\mu_i$  associado a cada quantidade conservada  $C_i$ ; nesse caso, a função de partição é,

$$Z = \text{tr} \exp \left[ -\beta \left( H - \sum_i \mu_i C_i \right) \right]. \quad (2.28)$$

Um exemplo em que o *ensemble* grande canônico pode ser utilizado é um sistema com temperatura  $T = \beta^{-1}$ , dotado de momento angular  $J$  e carga elétrica  $Q$ ; os potenciais químicos correspondentes serão, respectivamente, a velocidade angular,  $\Omega$ , e o potencial eletrostático,  $\Phi$ . A função de partição será dada pela integral de trajetória sobre todos os campos  $\phi$  tal que,

$$\phi(t + i\beta, r, \theta, \varphi + i\beta\Omega) = e^{q\beta\Phi} \phi(t, r, \theta, \varphi), \quad (2.29)$$

em que  $q$  é a carga do campo.

<sup>4</sup> Essa é a condição para o caso de bósons; para férmions, as configurações devem ser antiperiódicas.



### 2.3.2 Aproximação semiclássica para o campo gravitacional

A generalização para campos de calibre, como o campo gravitacional e o campo eletromagnético, deve incluir as contribuições dos campos fantasmas de Fadeev-Popov na integral de trajetória. No caso gravitacional, a contribuição dominante deve vir das métricas,  $g$ , e campos de matéria,  $\phi$ , que possuam valores próximos a campos de referência  $g_0$  e  $\phi_0$ , que tenham as periodicidades corretas e extremizem a ação (*i.e.*, sejam soluções das equações de movimento) (FROLOV; NOVIKOV, 1998; GIBBONS; HAWKING, 1977; HAWKING; ISRAEL, 1979). Escrevendo  $g$  e  $\phi$  em termos de pequenas flutuações nos campos de fundo  $g_0$  e  $\phi_0$ ,

$$g = g_0 + \tilde{g}, \quad \phi = \phi_0 + \tilde{\phi}, \quad (2.30)$$

podemos fazer uma expansão em série de Taylor da ação nas vizinhanças dos campos de fundo,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[g, \phi] &= \mathcal{S}[g_0, \phi_0] + \int d^n x \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g} \delta g + \int d^n x \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi} \delta \phi \\ &+ \frac{1}{2!} \int d^n x d^n y \left[ \delta g(x) \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta g(x) \delta g(y)} \delta g(y) + \delta \phi(x) \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \delta \phi(y) \right] \\ &+ \int d^n x d^n y \delta g(x) \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta g(x) \delta \phi(y)} \delta \phi(y) + \mathcal{O}(g^3, \phi^3), \end{aligned} \quad (2.31)$$

com  $\delta g = g - g_0 = \tilde{g}$  e  $\delta \phi = \phi - \phi_0 = \tilde{\phi}$  e com as derivadas funcionais avaliadas em  $g_0$  e  $\phi_0$ . Como  $g_0$  e  $\phi_0$  satisfazem as equações de movimento, as derivadas de primeira ordem se anulam, de forma que a expansão se reduz a:

$$\mathcal{S}[g, \phi] = \mathcal{S}[g_0, \phi_0] + \mathcal{S}_2[\tilde{g}, \tilde{\phi}], \quad (2.32)$$

em que descartamos a derivada mista nos termos de segunda ordem  $\mathcal{S}_2$ ,

$$\mathcal{S}_2[\tilde{g}, \tilde{\phi}] = \frac{1}{2!} \int d^n x d^n y \left[ \delta g(x) \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta g(x) \delta g(y)} \delta g(y) + \delta \phi(x) \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \delta \phi(y) \right]. \quad (2.33)$$

Essa expansão se chama aproximação de fase estacionária (ou aproximação de ponto de sela) e consiste em uma aproximação semiclássica que supõe que a ação clássica com os campos de fundo,  $\mathcal{S}[g_0, \phi_0]$ , é o termo com maior contribuição no limite  $\hbar \rightarrow 0$  (cabe lembrar que o termo no expoente do funcional gerador é  $i\mathcal{S}/\hbar$ , de forma que o  $n$ -ésimo termo na expansão é proporcional a  $\hbar^{n/2}/n!$ ) (DAS, 2006).

Substituindo a Eq. (2.32) em  $Z$ , definido na Eq. (2.25), obtemos:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}[g, \phi] \exp \left( i\mathcal{S}[g_0, \phi_0] + i\mathcal{S}_2[\tilde{g}, \tilde{\phi}] \right) = e^{i\mathcal{S}[g_0, \phi_0]} \int \mathcal{D}[\tilde{g}, \tilde{\phi}] e^{i\mathcal{S}_2[\tilde{g}, \tilde{\phi}]} \\ &\Rightarrow \log Z = i\mathcal{S}[g_0, \phi_0] + \log \int \mathcal{D}[\tilde{g}, \tilde{\phi}] e^{i\mathcal{S}_2[\tilde{g}, \tilde{\phi}]}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

O termo com a integral funcional na equação acima é chamado termo de 1-loop e representa os efeitos de flutuações quânticas sobre os campos de fundo, que desconsideramos neste

trabalho<sup>5</sup>. O funcional gerador será dado, portanto, por,

$$Z = e^{i\mathcal{S}[g,\phi]}, \quad (2.35)$$

de maneira que, fazendo uma rotação de Wick, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z = e^{-\mathcal{S}^E}. \quad (2.36)$$

## 2.4 Espaço AdS<sup>6</sup>

O espaço anti-de Sitter (AdS) é uma das três soluções das equações de Einstein no vácuo com curvatura constante (as outras duas são a métrica de Minkowski e a de Sitter); mais especificamente, a métrica AdS representa uma variedade de curvatura constante negativa, *i.e.*,  $R < 0$ , satisfazendo as equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica,  $\Lambda$ , negativa,

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad \Lambda = -\frac{2}{\ell^2} < 0, \quad (2.37)$$

em que  $\ell$  é uma constante, conhecida como raio AdS.

Uma forma de se interpretar geometricamente o espaço AdS é como uma subvariedade de  $\mathbb{R}^{2,3}$ ; nesse caso, se a métrica de  $\mathbb{R}^{2,3}$  é, utilizando coordenadas cartesianas  $\{u, v, x, y, z\}$ ,

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.38)$$

o espaço AdS será o hiperbolóide dado pela equação,

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\ell^2; \quad (2.39)$$

reescrevendo essa equação na seguinte forma,

$$u^2 + v^2 = \ell^2 + x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.40)$$

fica claro que sua topologia é  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ . Nesta representação, o espaço AdS possui curvas tipo tempo fechadas; porém, como ele não é simplesmente conexo, pode-se “desenrolar” o círculo  $\mathbb{S}^1$  (obtendo-se seu espaço de recobrimento,  $\mathbb{R}^1$ ) para se obter seu espaço de recobrimento universal<sup>7</sup> que não possui curvas tipo tempo fechadas e tem topologia  $\mathbb{R}^4$ . Daqui em diante, nos referiremos ao espaço de recobrimento universal como espaço AdS.

A métrica AdS pode ser representada pelas coordenadas globais  $\{\tilde{t}, \rho, \theta, \varphi\}$ , cuja métrica possui a seguinte forma estática:

$$ds^2 = \ell^2 \left( -\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_2^2 \right), \quad (2.41)$$

<sup>5</sup> O tratamento dos termos de 1-loop e de ordem superior pode ser visto em [Hawking \(1978\)](#), [Hawking e Israel \(1979\)](#).

<sup>6</sup> Seção baseada em [Hawking e Ellis \(1973\)](#), [Zhao \(2009\)](#), [Blau \(2020\)](#).

<sup>7</sup> *Universal covering space*, em inglês.

com  $\rho \in [0, \infty)$  e  $\tilde{t} \in (-\infty, \infty)$ ; essas coordenadas são obtidas escrevendo a Eq. (2.39) como,

$$u^2 + v^2 = \ell^2 \cosh^2 \rho, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2 \sinh^2 \rho, \quad (2.42)$$

cuja solução é  $u = \ell \cosh \rho \sin \tilde{t}$ ,  $v = \ell \cosh \rho \cos \tilde{t}$  e  $x^i = n^i \sinh \rho$ , com  $x^i = \{x, y, z\}$ . Cabe notar que o hiperbolóide descrito pela Eq. (2.39) é identificado escolhendo  $\tilde{t}$  como uma variável angular tal que  $\tilde{t} \sim \tilde{t} + 2\pi$  (fora do espaço de recobrimento), evidenciando a periodicidade do tempo e a possibilidade de curvas tipo tempo fechadas.

Definindo  $\tilde{t} = \ell t$  e  $r = \ell \sinh \rho$ , com  $r \in [0, \infty)$ , obtemos,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.43)$$

que é a métrica obtida resolvendo as equações de Einstein supondo simetria esférica.

### 2.4.1 Estrutura assintótica

Para estudar a estrutura assintótica do espaço AdS, vamos reescrever a Eq. (2.41) como,

$$ds^2 = \ell^2 \cosh^2 \rho \left[ -d\tilde{t}^2 + \frac{d\rho^2}{\cosh^2 \rho} + \tanh^2 \rho d\Omega_2^2 \right]; \quad (2.44)$$

introduzindo a “coordenada radial” conforme  $\chi$  tal que<sup>8</sup>,

$$d\chi = \frac{d\rho}{\cosh \rho} \Rightarrow \chi = 2 \operatorname{arctanh}(e^\rho) - \frac{\pi}{2} \quad (2.45)$$

podemos escrever,

$$\cosh \rho = \frac{1}{\cos \chi}, \quad \cosh \rho \in [1, \infty) \Rightarrow \chi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.46)$$

de modo que a métrica na forma dada acima pode ser reescrita como,

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 \chi} \left( -d\tilde{t}^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_2^2 \right) = \frac{\ell^2}{\cos^2 \chi} \left( -d\tilde{t}^2 + d\Omega_3^2 \right), \quad (2.47)$$

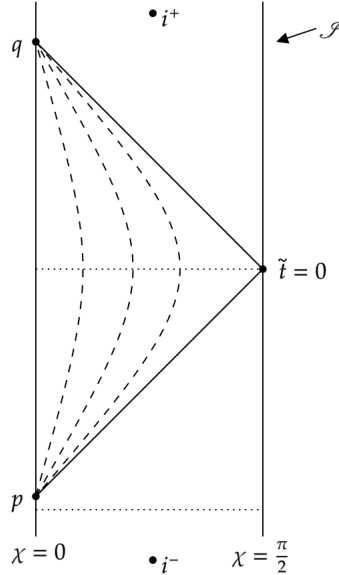
*i.e.*, o espaço AdS possui equivalência conforme à metade do universo estático de Einstein,  $d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\Omega_3^2$  (cujo domínio de  $\chi$  é  $[0, \pi]$ ). Superfícies com  $\tilde{t}$  constante são equivalentes, por meio de uma transformação conforme, a meias esferas com borda em  $\chi = \pi/2$ ; os pontos com  $\chi = \pi/2$  correspondem a  $\rho \rightarrow \infty$ , de forma que  $\chi = \pi/2$  é a borda conforme,  $\mathcal{I}$ , do espaço AdS. Essa hipersuperfície é tipo espaço,

$$d\tilde{s}^2 \Big|_{\chi=\frac{\pi}{2}} = -d\tilde{t}^2 + d\Omega_2^2, \quad (2.48)$$

com topologia  $\mathcal{I} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , e  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^- \cup i^0$ ; como o domínio de  $\tilde{t}$  é infinito e o de  $\chi$  finito, não é possível realizar uma transformação conforme em  $d\tilde{s}^2$  que torne o domínio

<sup>8</sup> A constante de integração é escolhida como  $-\frac{\pi}{2}$  para que o sistema de coordenadas seja referente à parte correspondente do universo estático de Einstein.

Figura 1 – Diagrama de Penrose para o espaço AdS; as linhas tracejadas que ligam os pontos  $p$  e  $q$  são geodésicas tipo tempo, as linhas sólidas diagonais representam geodésicas nulas e a linha pontilhada na base representa uma superfície tipo espaço de  $\tilde{t}$  constante. O infinito do espaço-tempo consiste na superfície  $\mathcal{I}$  e nos pontos disjuntos  $i^+$  e  $i^-$ ;  $\chi = 0$  representa o centro do espaço-tempo (onde há uma singularidade do sistema de coordenadas) e  $\mathcal{I}$  a borda tipo tempo.



Fonte: Adaptado de [Hawking e Ellis \(1973\)](#).

de  $\tilde{t}$  finito sem reduzir o domínio de  $\chi$  a um ponto, de forma que os infinitos tipo tempo,  $i^+$  e  $i^-$ , são representados por pontos disjuntos no diagrama de Penrose, representado na Figura 1.

As geodésicas ortogonais às superfícies com  $\tilde{t}$  constante convergem para os pontos  $q$  e  $p$ , respectivamente, no futuro e passado da superfície em questão, sendo essa a razão para a aparente singularidade das coordenadas na métrica (2.47). Também pode-se perceber que geodésicas nulas que partem de  $\rho = \tilde{t} = 0$  alcançam  $\mathcal{I}$  em um tempo finito  $\tilde{t} = \frac{\pi}{2}$ .

Essas peculiaridades implicam que não existem superfícies de Cauchy no espaço-tempo AdS, *i.e.*, para qualquer superfície tipo espaço  $\Sigma$ , existem pontos no futuro de  $\Sigma$  tais que existem geodésicas causais (nulas) direcionadas para o passado passando por esses pontos que não intersectam  $\Sigma$  (porque elas vão para  $\mathcal{I}$ ), de forma que o espaço AdS não é globalmente hiperbólico. Isso implica que, para definir a evolução dinâmica de campos neste espaço, não é suficiente especificar dados de Cauchy em uma hipersuperfície tipo espaço qualquer, sendo necessário especificar, também, condições de contorno em  $\mathcal{I}$ .

A principal característica de interesse da solução AdS para este trabalho é o fato dela se comportar como uma caixa, já que esse espaço-tempo possui uma energia finita e uma “parede” de potencial infinita no infinito assintótico. Para ilustrar isso, considere

uma partícula com 4-momento  $p^\mu = (-E, p^i)$ ; pelo efeito de Ehrenfest-Tolman (TOLMAN; EHRENFEST, 1930), a energia medida no infinito assintótico possui um *red-shift* em relação à energia medida localmente; dado que um observador no infinito possui 4-velocidade  $U^\mu = k^2/\sqrt{-k^2}$ ,  $k = \partial_t$ , a energia medida pelo observador local é,

$$E = -g_{\mu\nu}U^\mu p^\nu = \frac{E_\infty}{\sqrt{-k^2}} = \frac{E_\infty}{\sqrt{-g_{00}}}, \quad (2.49)$$

de forma que  $E$  possui um *red-shift* dado por um fator de  $\sqrt{-g_{00}}$  com relação a  $E_\infty$ . Para a solução AdS,  $-g_{00} = 1 + \frac{r^2}{\ell^2}$ , de modo que  $E \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ ; podemos, então, considerar a existência de uma barreira de potencial no infinito. Além disso, como a temperatura escala com a energia,  $T$  se comporta da mesma forma.

## 2.4.2 Propriedades termodinâmicas

Da mesma forma que o espaço de Minkowski, o espaço AdS não possui uma temperatura natural associada, *i.e.*, o “estado de vácuo” mais simétrico não é periódico na coordenada temporal imaginária, embora seja no tempo real (HAWKING; PAGE, 1983). Entretanto, assim como no espaço plano, pode-se construir estados térmicos a uma dada temperatura  $T$  impondo uma periodicidade  $\beta = T^{-1}$  no tempo complexo. Considerando a métrica na forma estática, Eq. (2.43), a temperatura local desses estados térmicos, que serão estados de equilíbrio neste sistema de coordenadas, será dada por (TOLMAN; EHRENFEST, 1930),

$$T_{\text{local}} = \beta^{-1}V(r)^{-1/2} = \frac{T}{\sqrt{V(r)}}, \quad (2.50)$$

com  $V(r) = 1 + \frac{r^2}{\ell^2}$ .

## 2.5 Equilíbrio de um buraco negro de Schwarzschild com radiação térmica<sup>9</sup>

Considere um buraco negro de Schwarzschild, cuja métrica é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2; \quad (2.51)$$

sua temperatura, dada por  $T = (8\pi M)^{-1}$ , implica que seu calor específico é negativo,  $\partial_M T < 0$ . Suponha que o buraco negro está cercado por radiação de corpo negro com temperatura igual à sua; suponha, também, que o buraco negro absorve um pouco mais de energia do que emite como resultado de flutuações estatísticas. Devido ao calor específico negativo, a temperatura do buraco negro diminuirá, levando à diminuição da taxa de emissão e um pequeno aumento da taxa de absorção de radiação. Caso a temperatura da

<sup>9</sup> Seção baseada em Hawking (1976), Davies (1978), Gibbons e Perry (1978), Zhao (2009).

radiação de corpo negro seja mantida constante por meio de um reservatório de energia, o buraco negro crescerá indefinidamente. Da mesma forma, se uma flutuação estatística leva um buraco negro a emitir mais radiação do que absorve, a taxa de emissão aumentará indefinidamente, levando à evaporação do buraco negro. Posto de outra forma, não existe equilíbrio térmico estável entre um buraco negro e um reservatório térmico arbitrariamente grande, de maneira que não é possível construir um *ensemble* canônico para este sistema.

É possível mostrar esse fato mais formalmente (HAWKING, 1976): no *ensemble* canônico, considera-se um grande número  $n$  de sistemas fracamente acoplados entre si; cada sistema possui um dado número de níveis de energia  $E_i$ , com a energia total do conjunto de todos os sistemas sendo  $E$ . Considerando todas as possíveis distribuições da energia total entre os subsistemas, o número esperado  $n_i$  de sistemas em um dado estado de energia  $E_i$  será proporcional a,

$$n_i \propto \exp\left(-\frac{E_i}{T}\right), \quad (2.52)$$

em que  $T$  é um multiplicador de Lagrange interpretado como a temperatura do *ensemble*. Supondo que o número de níveis de energia de um dos subsistemas entre  $E$  e  $E + dE$  é dado por  $\rho(E) dE$ , em que  $\rho(E)$  é a densidade de estados, a probabilidade do subsistema possuir energia no intervalo entre  $E$  e  $E + dE$  será  $\rho(E) \exp(-ET^{-1}) dE$ . Nos sistemas normalmente considerados em mecânica estatística,  $\rho(E)$  aumenta com  $E$  mas não exponencialmente, de modo que a probabilidade converge. Porém, para um buraco negro de Schwarzschild, o número de configurações internas,  $\rho(E) dE$ , para buracos negros com massas entre  $M = E$  e  $M = E + dE$  é dado por,

$$\rho(E) dE = e^S dE \approx \exp(4\pi E^2) dE, \quad (2.53)$$

onde a equação de Boltzmann para a entropia foi utilizada; a equação acima cresce mais rápido que o fator térmico,  $\exp(-ET^{-1})$ , conforme a energia aumenta, de forma que a probabilidade de um buraco negro estar em um dado intervalo de massa cresce com o aumento da massa, levando à divergência da probabilidade total e a má definição do *ensemble* canônico.

Para se obter um sistema estável, pode-se confinar o buraco negro em uma caixa isolada de volume e capacidade térmica finitos, como proposto por Hawking (HAWKING, 1976); se a radiação de corpo negro no interior da caixa possui energia  $E_{\text{rad}}$ <sup>10</sup> e entropia  $S_{\text{rad}}$ , enquanto o buraco negro possui entropia  $S_{BN}$  e energia  $E_{BN} = M$ , a configuração de equilíbrio será aquela que maximiza a entropia total  $S = S_{\text{rad}} + S_{BN}$  sujeita ao vínculo  $E = E_{\text{rad}} + E_{BN}$ . Utilizando o multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , temos as seguintes condições:

$$d(S - \lambda E) = 0, \quad (2.54a)$$

$$\text{Hess}(S) < 0; \quad (2.54b)$$

<sup>10</sup> A densidade de energia da radiação de corpo negro é  $u = 4\sigma T^4$ , com  $\sigma$  sendo a constante de Stephan-Boltzmann, de modo que a energia é  $E_{\text{rad}} = uV = 4\sigma VT^4$ , em que  $V$  é o volume da caixa.

da condição (2.54a), segue que,

$$\frac{\partial S_{\text{rad}}}{\partial E_{\text{rad}}} dE_{\text{rad}} + \frac{\partial S_{BN}}{\partial E_{BN}} dE_{BN} - \lambda dE_{\text{rad}} - \lambda dE_{BN} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\partial S_{\text{rad}}}{\partial E_{\text{rad}}} = \frac{\partial S_{BN}}{\partial E_{BN}}; \quad (2.55)$$

como  $\partial S/\partial E = T^{-1}$ , obtemos que  $T_{\text{rad}} = T_{BN}$ . Da condição (2.54b), utilizando  $\partial S/\partial E = T^{-1}$ , têm-se,

$$\frac{\partial^2 S_{\text{rad}}}{\partial E_{\text{rad}}^2} + \frac{\partial^2 S_{BN}}{\partial E_{BN}^2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{T_{\text{rad}}^2} \frac{\partial T_{\text{rad}}}{\partial E_{\text{rad}}} - \frac{1}{T_{BN}^2} \frac{\partial T_{BN}}{\partial E_{BN}} < 0; \quad (2.56)$$

como a energia irradiada por um corpo negro é proporcional a  $T^4$ , pode-se mostrar que:

$$\frac{\partial T_{\text{rad}}}{\partial E_{\text{rad}}} = \frac{1}{4} \frac{T_{\text{rad}}}{E_{\text{rad}}} \Rightarrow -\frac{1}{T_{BN}^2} \frac{\partial T_{BN}}{\partial E_{BN}} < \frac{1}{4} \frac{1}{T_{\text{rad}} E_{\text{rad}}}; \quad (2.57)$$

como  $T_{\text{rad}} = T_{BN}$  e  $T_{BN} = (8\pi E_{BN})^{-1}$ , obtemos que o equilíbrio ocorrerá quando  $E_{\text{rad}} < \frac{1}{4} E_{BN}$ .

Posto de outra forma, para a configuração de radiação de corpo negro e um buraco negro maximizar a probabilidade, o volume,  $V$ , da caixa deve ser suficientemente pequeno de maneira que a energia da radiação,  $E_{\text{rad}}$ , seja menor que um quarto da massa do buraco negro. Se essa condição for satisfeita, o equilíbrio entre a radiação e o buraco negro à mesma temperatura será estável, visto que, se uma flutuação estatística faz com que um pequeno excesso de radiação seja absorvido pelo buraco negro, a temperatura da radiação diminuirá, se tornando menor que a do buraco negro, de forma que a taxa de absorção se tornará menor que a taxa de emissão.

## 2.6 Teorema de Noether

O teorema de Noether é um dos principais resultados utilizados na física teórica em geral, visto que relaciona simetrias de um dado sistema a quantidades conservadas; nesta seção, revisaremos o teorema de Noether utilizando formas diferenciais nos atendo ao caso de difeomorfismos (WALD, 1993; IYER; WALD, 1994; OLEA, 2007).

Considere uma ação que é a integral de uma lagrangiana,  $\mathcal{L}$ , representada por uma  $d$ -forma em  $d$  dimensões,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{d!} \mathcal{L}_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}, \quad (2.58)$$

que seja invariante sob a ação  $\psi^*$  de um difeomorfismo arbitrário,  $\psi : M \rightarrow N$ ,

$$\mathcal{L}[\psi^*(\phi)] = \psi^* \mathcal{L}[\phi], \quad (2.59)$$

onde  $\phi = \{g, \psi\}$  denota todos os campos dinâmicos da teoria, incluindo a métrica. Se a lagrangiana satisfaz à condição acima, sempre é possível escrevê-la como uma função

de  $g_{\mu\nu}$ ,  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $\psi$ , e as derivadas covariantes de  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  e  $\psi$  (IYER; WALD, 1994). Sob variações arbitrárias das variáveis dinâmicas, a variação de  $\mathcal{L}$  sempre pode ser escrita na seguinte forma:

$$\delta\mathcal{L} = E\delta\phi + d\Theta, \quad (2.60)$$

em que  $E\delta\phi = (E_g)^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + E_\psi\delta\psi$  são quantidades construídas apenas dos campos  $\phi$  e suas derivadas; as equações de movimento da teoria são obtidas tomando  $(E_g)^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = 0$  e  $E_\psi = 0$ . A  $(d-1)$ -forma  $\Theta$  é construída localmente de  $\phi$  e  $\delta\phi$ , e é determinada pela equação acima a menos de uma forma fechada, construída localmente a partir dos campos que aparecem em  $\mathcal{L}$ .

Uma variação arbitrária  $\bar{\delta}$  atuando nos campos sempre pode ser decomposta em uma variação funcional,  $\delta$ , mais uma variação devida a um difeomorfismo gerado por um campo vetorial  $\eta$ . Para um campo dado por uma  $p$ -forma  $\phi$ , a variação devida ao difeomorfismo é dada pela derivada de Lie,  $\mathcal{L}_\eta\phi$  ao longo de  $\eta$ , que, pela fórmula de Cartan (também conhecida como fórmula mágica de Cartan), pode ser escrita como,

$$\mathcal{L}_\eta\phi = (dI_\eta + I_\eta d)\phi, \quad (2.61)$$

em que  $I_\eta$  é o operador de contração, cuja ação sobre uma  $p$ -forma  $\alpha_p = (p!)^{-1}\alpha_{\mu_1\dots\mu_p} dx^\mu \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$  é dada por:

$$I_\eta\alpha_p = \frac{1}{(p-1)!}\eta^\nu\alpha_{\nu\mu_1\dots\mu_{p-1}} dx^\mu \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}}. \quad (2.62)$$

A ação da variação funcional,  $\delta$ , em  $\mathcal{L}$  produz as equações de movimento mais um termo de superfície,  $\Theta(\phi, \delta\phi)$ , enquanto a variação devida ao difeomorfismo, contribui apenas com outro termo de superfície (visto que a invariância sob difeomorfismos de  $\mathcal{L}$  implica  $d\mathcal{L} = 0$ ):

$$\mathcal{L}_\eta\mathcal{L} = d(I_\eta\mathcal{L}). \quad (2.63)$$

O teorema de Noether estabelece, portanto, que existe uma corrente conservada associada à invariância sob difeomorfismos da lagrangiana, dada por:

$$*J = -\Theta(\phi, \delta\phi) - I_\eta\mathcal{L}, \quad (2.64)$$

em que  $*J$  é o dual de Hodge de  $J$ . Para um difeomorfismo  $\xi$  que é uma isometria, a variação total  $\bar{\delta}$  se anula, de forma que todas as variações funcionais dos campos em  $\Theta$  são substituídas pela derivada de Lie correspondente,  $\delta\phi = -\mathcal{L}_\xi\phi$ , de modo que,

$$*J = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - I_\xi\mathcal{L}. \quad (2.65)$$

A conservação da corrente,  $d*J = 0$ , implica que, pelo lema de Poincaré,  $*J$  sempre pode ser escrita localmente como uma derivada total. No entanto, apenas quando



ela pode ser escrita como uma forma exata  $*J = dQ(\xi)$  globalmente, a carga  $Q(\xi)$  pode ser integrada em uma superfície assintótica,  $\Sigma$ ,  $(d - 2)$ -dimensional através de,

$$Q(\xi) = \int_{\Sigma} *J. \quad (2.66)$$

Considere uma lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$  que difere de  $\mathcal{L}$  por um termo de borda  $dB$ ,

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + dB; \quad (2.67)$$

a corrente conservada se tornará (OLEA, 2007),

$$*J = \Theta(\phi, \mathcal{L}_{\xi}\phi) - I_{\xi}\mathcal{L} + \frac{\delta B}{\delta\phi}\mathcal{L}_{\xi}\phi - I_{\xi}B = d(Q(\xi) + I_{\xi}B), \quad (2.68)$$

de modo que a carga conservada será,

$$\tilde{Q}(\xi) = Q(\xi) + I_{\xi}B. \quad (2.69)$$

## 2.7 Coordenadas normais gaussianas

Considere uma hipersuperfície  $(n - 1)$ -dimensional  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  imersa em uma variedade  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$ . Para cada ponto  $p \in \Sigma$ , o espaço tangente  $T_p\Sigma$  pode ser visto como um subespaço  $(n - 1)$ -dimensional do espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ , de forma que haverá um único vetor  $n^{\mu} \in T_p\mathcal{M}$ , a menos de um fator de escala, que é ortogonal (com respeito à métrica de  $\mathcal{M}$ ) a todos os vetores de  $T_p\Sigma$ ; o vetor  $n^{\mu}$  é chamado de vetor normal a  $\Sigma$ . Quando  $\Sigma$  não é uma hipersuperfície nula, podemos definir o seguinte sistema de coordenadas: para cada  $p \in \Sigma$ , considere a geodésica única que passa por  $p$  cujo vetor tangente é  $n^{\mu}$ ; considerando um sistema de coordenadas arbitrário  $\{x^1, \dots, x^{n-1}\}$  em uma porção de  $\Sigma$ , podemos caracterizar cada ponto  $q$  em uma dada vizinhança da porção escolhida de  $\Sigma$  escolhendo o parâmetro  $t$  (que é único se  $n^{\mu}$  for normalizado e  $t(p) = 0$ ) da geodésica que conecta  $p$  e  $q$  e atribuindo a  $q$  as coordenadas  $\{t, x^1, \dots, x^{n-1}\}$ , em que  $\{x^1, \dots, x^{n-1}\}$  são as coordenadas de  $p \in \Sigma$  e  $t$  é o valor do parâmetro da geodésica em  $q$ . Em uma vizinhança suficientemente pequena de  $p \in \Sigma$  (para evitar que as geodésicas emanando de  $\Sigma$  se cruzem ou convirjam em uma singularidade), o mapa  $q \rightarrow (t, x^1, \dots, x^{n-1})$  é bem definido e define as chamadas coordenadas normais gaussianas (WALD, 1984; CARROLL, 2004; MISNER; WHEELER; THORNE, 1973). Uma das principais características deste sistema de coordenadas é que as geodésicas continuam ortogonais a todas as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  definidas pela equação  $t = \text{constante}$ .

Associados às funções coordenadas  $\{t, x^1, \dots, x^{n-1}\}$ , existem os vetores da base coordenada,  $\{\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}\}$ , em que  $\partial_t = n^{\mu}$ , de forma que a métrica em coordenadas gaussianas se torna:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = n^{\mu}n_{\mu} dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.70)$$

com  $i, j = \{1, \dots, n-1\}$  e  $h_{ij}$  a métrica intrínseca de  $\Sigma$ .

Como exemplo, considere uma foliação radial do espaço-tempo na forma gaussiana, com  $n_\mu = (n_r, n_i) = (N, \mathbf{0})$  como o vetor normal; a métrica será dada por (MISKOVIC; OLEA, 2008):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = N^2(r) dr^2 + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.71)$$

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{-h}; \quad (2.72)$$

nessas coordenadas, a curvatura extrínseca será,

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \frac{dh_{ij}}{dr}, \quad (2.73)$$

e as componentes de  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ,

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{N} K_{ij}, \quad \Gamma_{rj}^i = -NK_j^i, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{N} \frac{dN}{dr}. \quad (2.74)$$

Em particular, as relações de Gauss-Codazzi serão:

$$R_{kl}^{ir} = \frac{1}{N} (\tilde{\nabla}_l K_k^i - \tilde{\nabla}_k K_l^i) = \frac{2}{N} \tilde{\nabla}_{[l} K_{k]}, \quad (2.75a)$$

$$R_{kr}^{ir} = \frac{1}{N} \frac{dK_k^i}{dr} - K_l^i K_k^l, \quad (2.75b)$$

$$R_{kl}^{ij} = \tilde{R}_{kl}^{ij}(h) - K_k^i K_l^j + K_l^i K_k^j =: \tilde{R}_{kl}^{ij} - K_{[k}^{[i} K_{l]}^j], \quad (2.75c)$$

em que o  $\sim$  representa que as quantidades são dadas em termos de  $h_{ij}$ .

## 3 Resultados

### 3.1 Transição de fase de Hawking-Page

Conforme visto na Seção 2.5, não é possível obter um estado de equilíbrio termodinâmico entre radiação térmica e um buraco negro no espaço de Minkowski. Uma forma de se contornar esse problema, de modo a obter uma configuração de equilíbrio, consiste em confinar o buraco negro dentro de uma “caixa”; esta solução, no entanto, não é fisicamente realista.

Vimos, na Seção 2.4, que o espaço-tempo AdS se comporta, efetivamente, como uma caixa, devido a uma “barreira” de potencial presente no infinito. Considerar um buraco negro imerso em um espaço AdS é, portanto, uma forma “natural” de se considerar um buraco negro dentro de uma caixa. Exploraremos, nesta seção, as propriedades termodinâmicas de um buraco negro de Schwarzschild contido em um espaço AdS.

#### 3.1.1 Métrica Schwarzschild-AdS

Assim como no espaço de Minkowski, é possível obter soluções das equações de Einstein que contenham um buraco negro imerso em um espaço AdS; a mais simples dessas soluções é a métrica de Schwarzschild-AdS (S-AdS) (ZHAO, 2009; PAPANTONOPOULOS, 2011; SOCOLOVSKY, 2017),

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.1a)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{\ell^2}, \quad (3.1b)$$

que é uma solução das equações de Einstein para o vácuo com constante cosmológica negativa. O horizonte de eventos,  $r_+$ , do buraco negro é obtido tomando  $f(r_+) = 0$ , que resulta,

$$r_+ = \frac{1}{3} \frac{\left[27M\ell^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{\ell^4(27M^2 + \ell^2)}\right]^{2/3} - 3\ell^2}{\left(27M\ell^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{\ell^4(27M^2 + \ell^2)}\right)^{1/3}}. \quad (3.2)$$

A temperatura do buraco negro pode ser obtida pela definição, calculando a gravidade superficial,  $\kappa$ . Existe, porém, outra forma de se calcular a temperatura, baseada no formalismo euclidiano, que é a que empregaremos. Considere a métrica na forma estática genérica, Eq. (3.1a); realizando uma rotação de Wick,  $\tau = it$ , obtemos,

$$ds^2 = f(r) d\tau^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega_2^2; \quad (3.3)$$

fazendo uma expansão de  $f(r)$  em série de Taylor até primeira ordem ao redor do horizonte de eventos, segue que (PLANTZ, 2014; FROLOV; NOVIKOV, 1998),

$$ds^2 \approx f'(r_+)(r - r_+) d\tau^2 + \frac{dr^2}{f'(r_+)(r - r_+)} + r_+^2 d\Omega_2^2. \quad (3.4)$$

Supondo que  $f'(r)$  é regular para  $r \rightarrow r_+$ , podemos introduzir uma nova coordenada,  $R$ , definida por  $R^2 = \frac{4(r-r_+)}{f'(r_+)}$ , tal que  $r \rightarrow r_+ \Rightarrow R \rightarrow 0$ , de sorte que a métrica se torna,

$$ds^2 = \frac{1}{4} f'(r_+)^2 R^2 d\tau^2 + dR^2 + r_+^2 d\Omega_2^2. \quad (3.5)$$

Se desconsiderarmos a parte angular da métrica acima, obtemos,

$$ds^2 = \frac{1}{4} f'(r_+)^2 R^2 d\tau^2 + dR^2, \quad (3.6)$$

que possui a mesma forma que a métrica de coordenadas polares planas,  $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$ ; para evitar uma singularidade cônica<sup>1</sup>, a coordenada  $\theta$  deve possuir um período igual a  $2\pi$ <sup>2</sup>. Logo, para evitar uma singularidade cônica no espaço-tempo euclidiano, devemos fazer a identificação,  $\theta \rightarrow \tau f'(r_+)/2$ , de forma que,

$$\theta \sim \theta + 2\pi \Rightarrow \tau \sim \tau + 2\pi \frac{2}{f'(r_+)}, \quad (3.7)$$

ou seja,  $\tau$  possui período  $\beta = 4\pi/f'(r_+)$ . Como a temperatura é dada pelo inverso do período do tempo complexo, a temperatura do buraco negro será dada por:

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{f'(r_+)}{4\pi}. \quad (3.8)$$

Para o buraco negro Schwarzschild-AdS, a temperatura será:

$$T = \frac{\ell^2 + 3r_+^2}{4\pi\ell^2 r_+}. \quad (3.9)$$

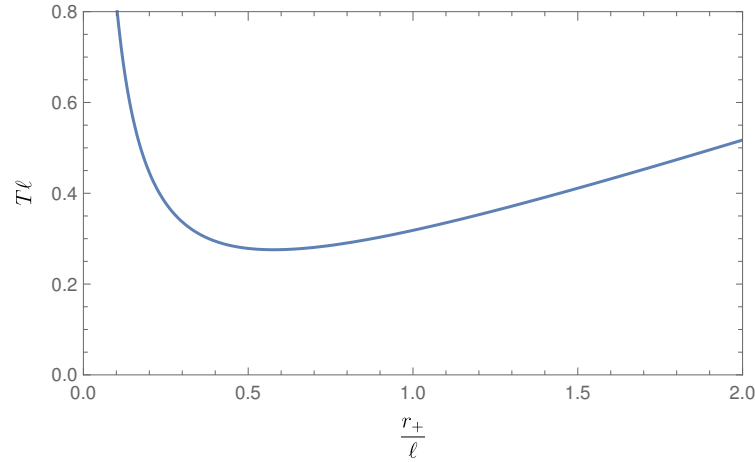
A Figura 2 mostra o gráfico da Eq. (3.9). Pode-se verificar que  $T$  possui um mínimo quando  $r_+ = r_0 = \ell/\sqrt{3} \Rightarrow T = T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi\ell}$ . Para  $T < T_0$ , portanto, não podem existir buracos negros, de forma que o espaço-tempo é preenchido com radiação pura. Escrevendo  $r_+$  em função de  $T$ , obtemos:

$$r_+ = \frac{1}{3} \left( 2\ell^2 \pi T \pm \sqrt{-3\ell^2 + 4\ell^2 \pi^2 T^2} \right). \quad (3.10)$$

<sup>1</sup> Uma singularidade cônica é um exemplo de uma classe de singularidades chamada de singularidades quase-regulares; nesse tipo de singularidade, as componentes do tensor de Riemann medidas em um referencial arbitrário (e, conseqüentemente, quantidades construídas a partir dele) se comportam de maneira regular, sem divergir (ELLIS; SCHMIDT, 1979).

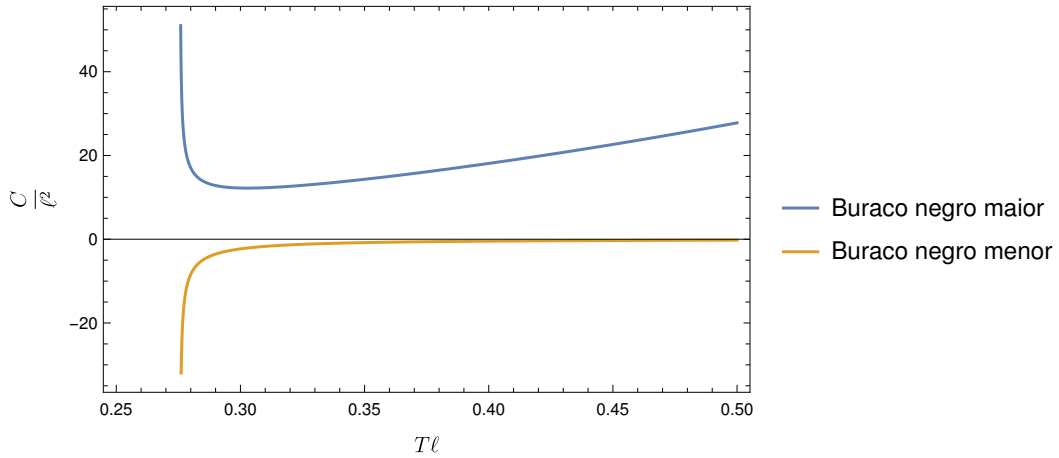
<sup>2</sup> Pode-se ilustrar isso da seguinte forma: suponha que  $\theta \in [0, \alpha]$ , com  $\alpha = \pi$ . A região coberta pelas coordenadas será metade do plano cartesiano, *e.g.*,  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ , de forma que as regiões com  $x > 0$  e  $x < 0$  estão coladas uma à outra, como em um cone; utilizando coordenadas cartesianas, pode-se constatar uma descontinuidade na origem que, quando descartada, transforma a região em questão na planificação de um cone. Isso ocorre sempre que  $\alpha \neq 2\pi$ .

Figura 2 – Temperatura do buraco negro Schwarzschild-AdS em função do raio do horizonte de eventos, medido em termos de  $\ell$ .



Fonte: Autoria Própria.

Figura 3 – Gráfico do calor específico,  $C$ , em função da temperatura do buraco negro Schwarzschild-AdS; a curva azul representa o calor específico do buraco negro maior e, a curva laranja, a do buraco negro menor.



Fonte: Autoria Própria.

Portanto, para cada  $T > T_0$ , existem dois buracos negros possíveis: um menor, dado pelo sinal negativo na equação acima e que representa a região  $r_+ < r_0$ , e um maior, dado pelo sinal positivo e que representa a região  $r_+ > r_0$ . Da equação  $f(r_+) = 0$ , podemos escrever a massa em função do raio do horizonte de eventos,

$$M = \frac{r_+}{2} \left( 1 + \frac{r_+^2}{\ell^2} \right); \quad (3.11)$$

substituindo a Eq. (3.10) na (3.11), obtemos  $M(T)$ , o que nos permite calcular o calor específico,  $C = \partial_T M$ . A Figura 3 mostra os gráficos dos calores específicos dos buracos negros menor e maior. Temos, portanto, que para  $T > T_0$ , existem dois possíveis estados com buraco negro: um com um buraco de massa menor ( $r_+ < r_0$ ), cujo calor específico é

negativo e, portanto, é termodinamicamente instável (como no caso do buraco negro de Schwarzschild), e um buraco negro com massa maior ( $r_+ > r_0$ ), que possui calor específico positivo e é, portanto, termodinamicamente estável.

Cabe observar que a massa é uma função estritamente crescente de  $r_+$ , de forma que possui uma correspondência 1 para 1 e é inversível; isso significa que pode-se usar tanto  $M$  quanto  $r_+$  como um parâmetro para quantidades termodinâmicas.

### 3.1.2 A transição de Hawking-Page

Para estudar mais a fundo as propriedades termodinâmicas da solução Schwarzschild-AdS, calcularemos a função de partição gravitacional considerando a diferença na ação euclidiana da solução Schwarzschild AdS e do espaço AdS, conforme [Hawking e Page \(1983\)](#). O *ensemble* canônico é definido por uma integral de trajetória sobre todos os campos de matéria que tendem assintoticamente a zero e métricas assintoticamente AdS com período  $\beta$  no tempo euclidiano,  $\tau$ . Conforme a aproximação semiclássica discutida na Seção 2.3.2, a contribuição dominante na integral de trajetória vem de métricas que sejam “próximas” a soluções clássicas das equações de Einstein; de fato, o espaço AdS térmico (*i.e.*, periódico em  $\tau$ ) é um desses casos e o tomaremos como ponto zero da ação e da energia.

A integral de trajetória de campos de matéria e flutuações da métrica sobre a solução AdS pode ser considerada como dando a contribuição da radiação térmica no espaço AdS para  $Z$ ; para um campo com invariância conforme, essa contribuição pode ser obtida calculando a função de partição para o campo no espaço AdS periódico no tempo, cuja forma aproximada será ([ALLEN; FOLACCI; GIBBONS, 1987](#); [HAWKING; PAGE, 1983](#)),

$$\log Z = 3\pi^2 \ell^2 \int_0^T T^{-2} f(T) dT = \frac{\pi^4}{90} g (\ell\beta^{-1})^3 + \mathcal{O}(\ell\beta^{-1}), \quad (3.12)$$

em que  $g$  é o número efetivo de estados de spin e  $f(T) = \frac{\pi^2}{90} g T^4 + \mathcal{O}(\ell^{-2} T^2)$ ; a energia da radiação térmica será,

$$\langle E \rangle = -\partial_\beta \log Z \approx \frac{\pi^4}{30} g \ell^3 T^4. \quad (3.13)$$

Os efeitos gravitacionais da radiação térmica podem ser estimados resolvendo as equações de Einstein com constante cosmológica para um fluido perfeito de radiação (*i.e.*, pressão igual a um terço da densidade de energia térmica); a estabilidade dessa solução impõe uma massa máxima para que o fluido não colapse, o que, por sua vez, leva a uma temperatura máxima,  $T_{\max}$  ([HAWKING; PAGE, 1983](#)).

Para as equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica,  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ , segue que, em 4 dimensões,  $R = 4\Lambda$ ; no caso em questão, não é necessário levar em conta o termo de borda da ação, visto que os termos relativos a cada métrica se anulam quando

a diferença das ações for tomada no infinito assintótico, de forma que a ação se torna,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) = \frac{\Lambda}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}^E = -\frac{\Lambda}{8\pi} \int d^4x \sqrt{g_E}. \quad (3.15)$$

Como o valor da ação é infinito quando calculada no espaço todo, devemos regularizá-la integrando a parte radial até um valor de *cutoff*  $r = R$ ; para a métrica AdS, obtemos,

$$\mathcal{S}_{\text{AdS}}^E = -\frac{\Lambda}{8\pi} \int_0^{\beta_0} d\tau \int_0^R r^2 dr \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega_2 = \frac{\Lambda}{6} \beta_0 R^3, \quad (3.16)$$

em que  $\beta_0$  é, em princípio, arbitrário, visto que o espaço AdS não é necessariamente periódico em  $\tau$ . Para a métrica S-AdS,

$$\mathcal{S}_{\text{S-AdS}}^E = -\frac{\Lambda}{8\pi} \int_0^\beta d\tau \int_{r_+}^R r^2 dr \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega_2 = \frac{\Lambda}{6} \beta (R^3 - r_+^3), \quad (3.17)$$

com  $\beta = \frac{4\pi\ell^2 r_+}{\ell^2 + 3r_+^2}$ . Em espaços curvos, quantidades fixas correspondentes a um *ensemble* termodinâmico são valores de borda (BROWN et al., 1990; PLANTZ, 2014), de modo que, para comparar as energias livres de dois estados, devemos garantir que os valores de borda de suas temperaturas físicas (ou seja, as que são medidas localmente) coincidam. Pelo efeito Ehrenfest-Tolman (TOLMAN; EHRENFEST, 1930), a temperatura medida localmente é dada por,

$$T_{\text{local}}(r) = \frac{T}{\sqrt{g_{\tau\tau}(r)}}. \quad (3.18)$$

A igualdade das temperaturas medidas localmente, em especial na hipersuperfície definida por  $r = R$ , implica que,

$$\beta_0 \left(1 + \frac{R^2}{\ell^2}\right) = \beta \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{R^2}{\ell^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta_0}{\beta} = \sqrt{1 - \frac{2M\ell^2}{R\ell^2 + R^3}}, \quad (3.19)$$

de modo que diferença das ações euclidianas será, portanto,

$$\mathcal{S}^E = \mathcal{S}_{\text{S-AdS}}^E - \mathcal{S}_{\text{AdS}}^E = -\frac{\Lambda}{6} \beta \left( R^3 - r_+^3 - \frac{\beta_0}{\beta} R^3 \right). \quad (3.20)$$

Como  $\Lambda = -3/\ell^2$  e tomando o limite  $R \rightarrow \infty$  para remover o fator de *cutoff*, obtêm-se,

$$\mathcal{S}^E = \frac{\beta}{2\ell^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ R^3 - r_+^3 - R^3 \sqrt{1 - \frac{2M\ell^2}{R\ell^2 + R^3}} \right] = \frac{2\pi r_+}{\ell^2 + 3r_+^2} (M\ell^2 - r_+^3); \quad (3.21)$$

por fim, utilizando a Eq. (3.11), obtemos:

$$\mathcal{S}^E = \frac{\pi r_+^2 (\ell^2 - r_+^2)}{\ell^2 + 3r_+^2}. \quad (3.22)$$

Da Eq. (3.22), obtemos a função de partição,

$$\log Z = -\mathcal{S}^E = -\frac{\pi r_+^2 (\ell^2 - r_+^2)}{\ell^2 + 3r_+^2} = -\frac{r_+}{4\ell^2} \beta (\ell^2 - r_+^2); \quad (3.23)$$

a partir daí, podemos calcular o valor esperado da energia,

$$\langle E \rangle = -\partial_\beta \log Z = \partial_\beta \mathcal{S}^E. \quad (3.24)$$

Como a ação euclidiana e a temperatura inversa são funções de  $r_+$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{S}^E}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{S}^E}{\partial r_+} \frac{\partial r_+}{\partial \beta}; \quad (3.25)$$

para  $r > r_0$ , pelo teorema da função inversa,  $\partial_\beta r_+ = (\partial_{r_+} \beta)^{-1}$ , de modo que,

$$\langle E \rangle = \frac{\partial_{r_+} \mathcal{S}^E}{\partial_{r_+} \beta} = \frac{r_+}{2} \left( 1 + \frac{r_+^2}{\ell^2} \right) \Rightarrow \langle E \rangle = M. \quad (3.26)$$

A entropia,  $S$ , será,

$$S = \beta \langle E \rangle + \log Z = \beta M - \mathcal{S}^E = \pi r_+^2 \Rightarrow S = \frac{A}{4}, \quad (3.27)$$

que condiz com a entropia de Bekenstein-Hawking.

A função de partição é definida em termos do número de microestados,  $N(E) = e^S$ , pela seguinte transformada de Laplace (HAWKING; PAGE, 1983; HAWKING; ISRAEL, 1979):

$$Z = \int_0^\infty N(E) e^{-\beta E} dE. \quad (3.28)$$

Para mostrar que a função de partição está bem definida, considere o limite em que  $M \rightarrow \infty$ . Definindo a variável  $x = M^{-1}$  e expandindo  $r_+$  em série de Taylor até primeira ordem ao redor do ponto  $x = 0$ , obtemos,

$$r_+(x) = \left( \frac{2\ell^2}{x} \right)^{1/3} - \frac{2\ell^2}{6} \left( \frac{x}{2\ell^2} \right)^{1/3} \Rightarrow r_+(M) = (2\ell^2 M)^{1/3} - \frac{2\ell^2}{6} \frac{1}{(2M\ell^2)^{1/3}}; \quad (3.29)$$

o primeiro termo será o termo dominante quando  $M$  tende ao infinito, de forma que a área do horizonte de eventos será  $A = 4\pi r_+^2 \approx 4\pi(2\ell^2 M)^{2/3}$  e a densidade de microestados,

$$N(M) = e^S = e^{\frac{A}{4}} = \exp \left[ \pi (2\ell^2 M)^{2/3} \right]. \quad (3.30)$$

Essa densidade cresce suficientemente devagar para que a integral na Eq. (3.28) convirja (em contraste ao caso do buraco negro de Schwarzschild), de forma que o *ensemble* canônico está bem definido (HAWKING; PAGE, 1983).

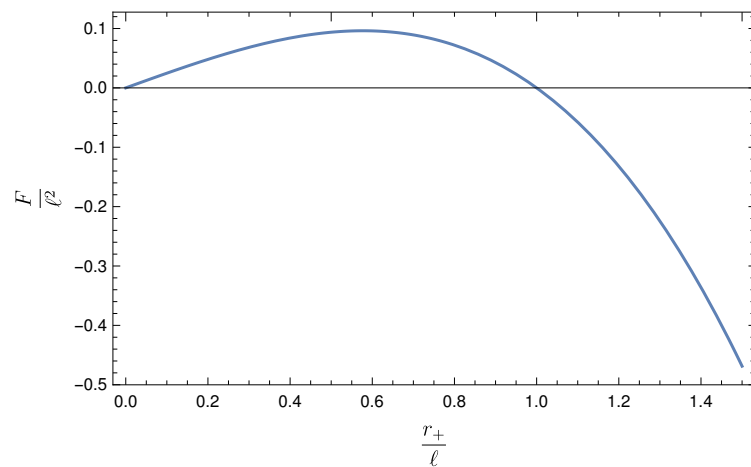
A partir da ação de partição encontrada, podemos calcular a energia livre de Helmholtz,

$$F = -T \log Z = \frac{r_+}{4\ell^2} (\ell^2 - r_+^2), \quad (3.31)$$

cujos gráfico é representado na Figura 4. Para  $r_+ = \ell$ ,  $F = 0$  e  $T = T_c = (\pi\ell)^{-1}$ ; ademais,  $r_+ > \ell \Rightarrow F < 0$  e  $r_+ < \ell \Rightarrow F > 0$ . Pode-se verificar que o comportamento de  $\mathcal{S}^E$  com  $r_+$  é idêntico ao de  $F$ , de forma que, para  $r_+ > \ell \Rightarrow F, \mathcal{S}^E < 0$ , a radiação térmica (o espaço



Figura 4 – Energia livre de Helmholtz,  $F$ , em função do raio do horizonte de eventos para o buraco negro Schwarzschild-AdS;  $F$  e  $r_+$  são normalizados em termos de  $\ell$ .



Fonte: Autoria Própria.

AdS em estado térmico) dominará a energia livre e a ação, enquanto, para  $r_+ < \ell$ , buracos negros dominarão a energia livre (a solução S-AdS); logo, quando  $r_+ = \ell$  (*i.e.*,  $T = T_c$ ), há uma transição de fase térmica em que o estado mais favorável termodinamicamente muda de radiação para um buraco negro ou *vice-versa*. Essa transição de fase é conhecida como transição de Hawking-Page.

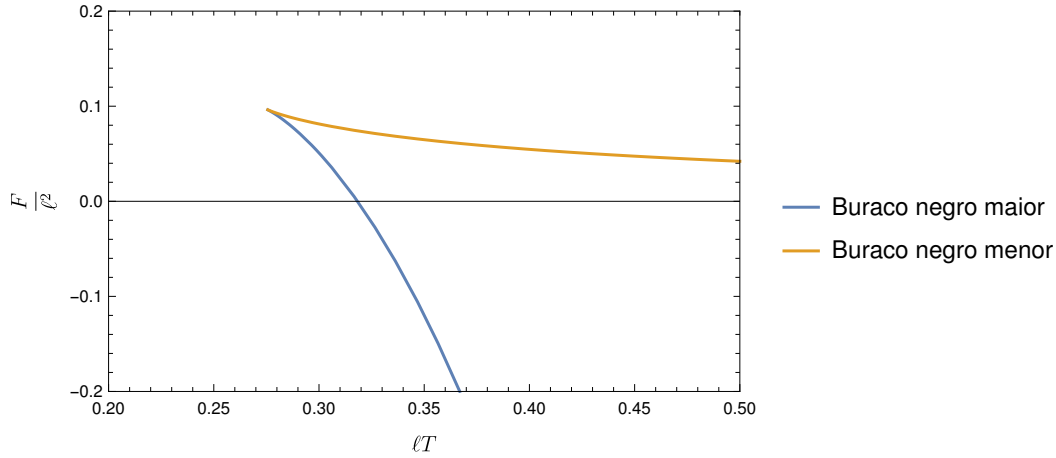
Conforme já discutido, se  $T < T_0$ , buracos negros não podem existir e a única fase possível é o espaço AdS puramente térmico. Nesse caso, a energia livre de Helmholtz será negativa e, para um campo escalar com invariância conforme, será, pela Eq. (3.12),

$$F = T \log Z \approx -\frac{\pi^4}{90} g \ell^3 T^4. \quad (3.32)$$

Para  $T > T_0$ , existem dois possíveis buracos negros em equilíbrio com a radiação térmica: um menor, com  $r_+ < r_0$ , e um maior, com  $r_+ > r_0$ . A Figura 5 mostra as energias livres de cada um desses buracos negros. No caso do buraco negro menor, ele será termodinamicamente instável devido ao calor específico negativo; ademais,  $r_+ < r_0 \Rightarrow F > 0$ , de modo que o buraco menor será termodinamicamente menos favorável que o espaço AdS térmico. Para o buraco negro maior, cujo raio é maior que  $r_0$ , o calor específico é positivo, implicando que ele é termodinamicamente estável; se  $T_0 \leq T < T_c$ , ou equivalentemente,  $r_0 \leq r_+ < \ell$ ,  $F > 0$  e o buraco negro é menos favorável termodinamicamente, sendo, portanto, um estado meta-estável; por outro lado, se  $T > T_c$  ( $r_+ > \ell$ ),  $F < 0$  e o buraco negro se torna o estado mais favorável. Como vimos, para  $T > T_{\max}$ , a radiação térmica é instável e colapsa em um buraco negro; desta forma, radiação térmica só pode estar em equilíbrio com um buraco negro se  $T_c < T < T_{\max}$ . Para  $T > T_{\max}$ , o estado consistirá em apenas um buraco negro.

Sumarizando, temos as seguintes fases possíveis:

Figura 5 – Comportamento da energia livre de cada um dos buracos negros em função da temperatura. A curva azul representa o buraco negro maior e, a curva laranja, o menor.



Fonte: Autoria Própria.

- $\forall T < T_0$ , não podem existir buracos negros e o único estado possível é radiação pura (AdS térmico);
- $\forall T > T_0$  com  $r_+ < r_0$ , existem buracos negros termodinamicamente instáveis (que serão estados menos favoráveis) em equilíbrio com radiação;
- $\forall T \in [T_0, T_c)$  com  $r_+ > r_0$ , existem buracos negros termodinamicamente estáveis em equilíbrio com radiação mas a radiação é mais favorável termodinamicamente, com o buraco negro sendo um estado meta-estável;
- $\forall T \in (T_c, T_{\max}]$ , existem buracos negros estáveis em equilíbrio com radiação, sendo o buraco negro o estado mais favorável e a radiação um estado meta-estável;
- $\forall T > T_{\max}$ , a radiação térmica colapsa e o buraco negro é o único estado possível.

A massa do buraco negro,  $M$ , é um parâmetro de ordem<sup>3</sup> para a transição de fase; de fato, quando  $T < T_c$ , o estado mais favorável é o AdS térmico, *i.e.*, um estado com  $M = 0$ ; no entanto, para  $T > T_c$ , o estado mais favorável é um buraco negro, um estado com  $M \neq 0$ . Temos, portanto, uma discontinuidade de  $M$  em  $T_c$ . Por fim, quando o espaço-tempo se encontra em um estado meta-estável, ele tenderá a decair no estado termodinamicamente mais favorável; ora, quando  $T \in [T_0, T_c)$ , o buraco negro tenderá a evaporar, enquanto que, para  $T > T_c$ , a radiação tenderá a nuclear em buracos negros, de forma similar ao fenômeno de nucleação. De fato, quando se consideram perturbações no

<sup>3</sup> O parâmetro de ordem distingue duas diferentes fases termodinâmicas; em uma fase ele é nulo e, na outra, não nulo. No ponto crítico, a susceptibilidade (mudança de uma propriedade extensiva com uma variação de uma propriedade intensiva) do parâmetro de ordem diverge.

instanton<sup>4</sup> de Schwarzschild a nível de 1-loop, é possível obter uma taxa de nucleação de buracos negros, similar à probabilidade de tunelamento por uma barreira de potencial em mecânica quântica; essa taxa de nucleação será da seguinte forma (HAWKING; PAGE, 1983; GROSS; PERRY; YAFFE, 1982):

$$\Gamma = Ae^{-B}, \quad (3.33)$$

em que  $A$  é algum determinante e  $B$  é proporcional à ação; pode-se perceber que o buraco negro atua, de certa forma, como uma barreira de potencial finita.

## 3.2 Kontratermos

Na Seção 3.1, calculamos a ação euclidiana do buraco negro de Schwarzschild-AdS subtraindo a ação do espaço AdS. Embora seja possível atribuir um significado físico a esse procedimento (a saber, a subtração do ponto de energia zero), ele consiste, basicamente, em um processo de regularização da ação, de modo que, quando não se faz essa subtração, o valor obtido para ação diverge. Notavelmente, o mesmo ocorre quando se calcula as cargas conservadas utilizando o teorema de Noether; a carga associada a um difeomorfismo  $\xi$  é obtida pela fórmula de Komar (KOMAR, 1959):

$$K(\xi) = -\frac{1}{16\pi} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

com  $\partial\Sigma$  sendo a borda da seção espacial do espaço-tempo e  $d\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$  um elemento de superfície. Quando se pretende calcular a carga para um espaço-tempo na presença de uma constante cosmológica negativa, a fórmula de Komar gera um resultado divergente; para a métrica Schwarzschild-AdS, por exemplo, a carga associada a um vetor de Killing temporal,  $\partial_t$ , que é definida como sendo a massa, é (AROS et al., 2000a):

$$K(\partial_t) = \frac{M}{2} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^3}{2\ell^2}. \quad (3.35)$$

O procedimento mais comum para dar conta da divergência desses valores é subtrair o valor correspondente de  $K(\xi)$  para o espaço AdS, da mesma forma que foi feito para regularizar a ação. Embora esse procedimento elimine a divergência, o fator de normalização obtido para a massa é incorreto; este problema existe mesmo no caso de um espaço-tempo assintoticamente plano, como a métrica de Kerr, em que as cargas conservadas são,

$$K(\partial_t) = \frac{M}{2}, \quad K(\partial_\varphi) = J. \quad (3.36)$$

<sup>4</sup> Um instanton é uma solução clássica das equações de movimento cuja ação é finita e não nula em um espaço-tempo euclidiano. Instantons podem ser entendidos como pontos críticos da ação, sendo um máximo, um mínimo ou um ponto de sela. No caso em questão, o estudo de perturbações sobre o instanton de Schwarzschild revela que ele é apenas um ponto de sela da ação de Einstein-Hilbert. O mesmo ocorre considerando-se grávitons térmicos no espaço de Minkowski, que deixa de ser um mínimo absoluto da ação e se torna um ponto de sela quando se leva em consideração a interação desses grávitons; isso dá origem a uma instabilidade similar à instabilidade de Jeans em gravitação clássica, que torna o espaço de Minkowski térmico meta-estável e induz a nucleação de buracos negros (GROSS; PERRY; YAFFE, 1982).

Não existe, portanto, um fator de normalização comum que forneça os valores corretos para a massa e o momento angular.

É desejável, portanto, obter um método de regularização da ação e das cargas conservadas que seja covariante, *i.e.*, não dependa de uma escolha de *background*, e que forneça as cargas com uma normalização adequada. Uma das propostas para solucionar este problema, baseada na conjectura AdS/CFT e no procedimento de renormalização holográfica, consiste em adicionar à ação gravitacional uma ação de contratermos construída como polinômios da curvatura extrínseca e intrínseca na borda do espaço-tempo, impondo condições de Dirichlet na métrica para que o princípio variacional seja bem definido (BALASUBRAMANIAN; KRAUS, 1999; MANN, 1999; EMPARAN; JOHNSON; MYERS, 1999; PAPADIMITRIOU; SKENDERIS, 2005).

Embora esse processo de regularização forneça um procedimento sistemático de construção da série de contratermos necessária para regularizar a ação, o número de contratermos possíveis cresce drasticamente com a dimensão do espaço-tempo (DAS; MANN, 2000), além de que a série completa de contratermos para um número arbitrário de dimensões para o espaço-tempo ainda é desconhecida.

Uma alternativa à série de contratermos de Dirichlet são os Kontratermos (OLEA, 2005; OLEA, 2007). Os Kontratermos surgem considerando o formalismo de Palatini de primeira ordem impondo uma condição assintótica para a curvatura do espaço-tempo; embora os casos com dimensão par e ímpar sejam substancialmente diferentes, em ambos é possível obter uma série de polinômios das curvaturas intrínseca e extrínseca que regulariza a ação e fornece as cargas conservadas adequadas. Como veremos a seguir, os Kontratermos também possuem uma profunda conexão com a topologia e a geometria do espaço-tempo.

### 3.2.1 Caso com 4 dimensões<sup>5</sup>

Como caso ilustrativo, considere a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica negativa suplementada de um termo de borda  $B_3$  (OLEA, 2005). Utilizando formas diferenciais no formalismo de Palatini de primeira ordem, a ação pode ser escrita, em termos da *vierbein*  $e^A = e^A{}_\mu dx^\mu$  e da conexão de spin  $\omega^{AB} = \omega_\mu^{AB} dx^\mu$ , como (ZANELLI, 2008),

$$\mathcal{S} = \frac{1}{32\pi} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} \left( R^{AB} e^C e^D + \frac{1}{2\ell^2} e^A e^B e^C e^D \right) + \int_{\partial\mathcal{M}} B_3, \quad (3.37)$$

em que  $R^{AB} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{AB} dx^\mu \wedge dx^\nu$  é a 2-forma de curvatura construída da conexão de spin pela equação de estrutura de Cartan,  $R^{AB} = d\omega^{AB} + \omega_C^A \omega^{CB}$ ,  $\epsilon_{ABCD}$  é o tensor de Levi-Civita totalmente antissimétrico e os índices latinos maiúsculos representam os índices da *vierbein*<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Os resultados desta seção são baseados em Olea (2005).

<sup>6</sup> O produto exterior,  $\wedge$ , será omitido, sendo implícito nos produtos de formas diferenciais.

Sob variações arbitrárias de  $e^A$  e  $\omega^{AB}$ , obtemos as equações de movimento da relatividade geral e um termo de superfície,

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}} \left( \mathcal{E}_A \delta e^A + \mathcal{E}_{AB} \delta \omega^{AB} + d\Theta \right), \quad (3.38)$$

em que  $\mathcal{E}_A$  é a equação de Einstein,

$$\mathcal{E}_A = \epsilon_{ABCD} \left( R^{BC} + \ell^{-2} e^B e^C \right) e^D, \quad (3.39)$$

e  $\mathcal{E}_{AB} = 0$  para uma teoria com torção nula, que é o caso ao qual iremos nos ater. Para obter as equações de campo, devemos realizar uma integração por partes, que dá a primeira parte do termo de superfície  $\Theta$ ,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \Theta = \frac{1}{32\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} \delta \omega^{AB} e^C e^D + \int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_3, \quad (3.40)$$

com o segundo termo vindo da variação do tempo de borda na ação.

Com o intuito de obter um princípio variacional da ação bem definido, *i.e.*, possuir uma ação estacionária com respeito a variações arbitrárias das variáveis dinâmicas, vamos impor a condição de que o espaço-tempo é assintoticamente e localmente AdS (ALAdS), *i.e.*, possui curvatura constante e negativa na borda,

$$R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\ell^2} \delta_{[\alpha\beta]}^{[\mu\nu]} \Leftrightarrow R^{AB} = -\frac{1}{\ell^2} e^A e^B. \quad (3.41)$$

Para que a ação seja estacionária, é necessário que  $\delta\mathcal{S} = 0$ ; como  $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{AB} = 0$ , essa condição implica que o termo de superfície deve ser nulo,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \Theta = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_3 = -\frac{1}{32\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} \delta \omega^{AB} e^C e^D. \quad (3.42)$$

Utilizando a condição (3.41), podemos reescrever a equação acima como,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_3 = \frac{\ell^2}{32\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} \delta \omega^{AB} R^{CD} = 2\alpha \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} \delta \omega^{AB} R^{CD}, \quad (3.43)$$

onde definimos  $\alpha = \ell^2/64\pi$ .

Para obter uma forma explícita para  $B_3$ , considere uma foliação radial escrita em coordenadas normais gaussianas, como na Seção 2.7, com a borda do espaço-tempo localizada em um valor fixo  $r = r_0$ . A escolha mais natural de uma base localmente ortogonal é dada por,

$$e^1 = e^1_i dx^i = N dr, \quad e^a = e^a_i dx^i, \quad (3.44)$$

em que  $N$  é o coeficiente da parte radial da métrica (vide Eq. (2.71)) e separamos os índices da *vierbein* como  $A = \{1, a\}$  e os da base coordenada como  $\mu = \{r, i\}$ . Os índices da *vierbein* e da base coordenada são abaixados e levantados, respectivamente, com  $\eta_{AB}$  e  $g_{\mu\nu}$ .

Como estamos considerando uma teoria sem torção, a conexão de spin é determinada unicamente pela *vierbein*,  $\omega^{AB} = \omega^{AB}(e^A)$ ,

$$\omega_{\mu}^{AB} = -e^{B\nu} \nabla_{\mu} e^A_{\nu}, \quad (3.45)$$

em que  $\nabla_{\mu}$  é a derivada covariante definida pelos símbolos de Christoffel. Da Eq. (3.45), podemos calcular a componente  $\omega^{1a}$  que, na borda, será dada por,

$$\omega^{1a} = -K_i^j e_j^a dx^i = -K^a, \quad (3.46)$$

em que  $K_{ij}$  é a curvatura extrínseca que, nas coordenadas gaussianas, é dada por,

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \frac{dh_{ij}}{dr}. \quad (3.47)$$

A escolha da Eq. (3.44) como base faz com que as componentes da conexão de spin,  $\omega^{ab}$ , não sejam expressas em termos de quantidades tensoriais, fato que se torna um problema quando se pretende estabelecer a conexão com o formalismo tensorial, *i.e.*, expressar o termo de borda  $B_3$  como uma função local de  $h_{ij}$  e  $K_{ij}$ . Devemos, portanto, construir termos de borda que possuam a covariância de Lorentz local em termos da conexão de spin e da *vierbein*; não podemos, no entanto, utilizar diretamente a conexão de spin, visto que ela não se transforma como um vetor sob transformações de Lorentz. Para restaurar a covariância de Lorentz, definiremos a segunda forma fundamental como a diferença de duas conexões de spin na borda (EGUCHI; GILKEY; HANSON, 1980),

$$\theta^{AB} = \omega^{AB} - \tilde{\omega}^{AB}, \quad (3.48)$$

em que  $\omega^{AB}$  é o campo dinâmico e  $\tilde{\omega}^{AB}$  é uma referência fixa definida apenas na borda.

Nas coordenadas gaussianas, a métrica será,

$$ds^2 = N^2(r) dr^2 + h_{ij}(r, x) dx^i dx^j; \quad (3.49)$$

na vizinhança da borda, ou seja, na vizinhança de  $r = r_0$ , sempre pode-se definir uma métrica produto (MYERS, 1987),

$$ds^2 = N^2(r) dr^2 + \tilde{h}_{ij}(r = r_0, x) dx^i dx^j, \quad (3.50)$$

tal que a condição de junção é dada por  $\tilde{h}_{ij}(r = r_0, x) = h_{ij}(r = r_0, x)$ . Obtemos, então, uma geometria cobordante cuja conexão  $\tilde{\omega}^{AB}$  em  $\partial\mathcal{M}$  possui apenas componentes tangenciais,

$$\tilde{\omega}^{1a} = 0, \quad \tilde{\omega}^{ab} = \omega^{ab}. \quad (3.51)$$

De maneira equivalente, a segunda forma fundamental, definida pela Eq. (3.48), possui apenas componentes normais,

$$\theta^{1a} = -K_i^a dx^i, \quad \theta^{ab} = 0. \quad (3.52)$$

Cabe ressaltar que  $\tilde{\omega}^{ab}$  precisa ser especificada apenas em  $\partial\mathcal{M}$ , onde equivale a  $\omega^{ab}$ , de forma que o procedimento adotado independe de qualquer *background* fixo.

Da definição da 2-forma de curvatura, obtemos a seguinte decomposição de  $R^{AB}$  na borda,

$$R^{1a} = D_i(\omega)\theta_j^{1a} dx^i \wedge dx^j, \quad (3.53a)$$

$$R^{ab} = \left( \frac{1}{2} \hat{R}_{ij}^{ab} + \theta_{i1}^a \theta_j^{1b} \right) dx^i \wedge dx^j, \quad (3.53b)$$

em que  $\hat{R}^{ab} = \hat{R}_{ij}^{ab} dx^i \wedge dx^j$  é a 2-forma de curvatura da borda associada a  $\omega^{ab}$  e  $D_i(\omega)$  é a derivada covariante definida com relação a  $\omega^{ab}$  nos índices da borda; aqui, descartamos as componentes em  $dr$ , visto que  $\partial\mathcal{M}$  é definida para  $r = r_0$  fixo. Utilizando a Eq. (3.52) e a projeção na *vierbein*,

$$R_{\mu\nu}^{AB} = R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} e^A_\lambda e^B_\rho, \quad (3.54)$$

as Eq. (3.53) se tornam as equações de Gauss-Codazzi para o tensor de Riemann no caso de uma foliação radial,

$$R_{ij}^{rl} = -\frac{1}{N} \nabla_{[i} K_{j]}^l, \quad (3.55a)$$

$$R_{ij}^{kl} = \hat{R}_{ij}^{kl} - K_i^k K_j^l + K_i^l K_j^k. \quad (3.55b)$$

A introdução da conexão de spin de referência permite, portanto, eliminar a dependência explícita do termo de borda nas componentes  $\omega^{ab}$ , visto que podemos expressá-las em termos de quantidades tensoriais.

Podemos, portanto, utilizando a condição (3.41), reescrever o termo de superfície, Eq. (3.40), como,

$$\Theta = \frac{\ell^2}{16\pi} \epsilon_{1abc} (\delta\omega^{1a} R^{bc} + \delta\omega^{ab} R^{1c}) + \delta B_3. \quad (3.56)$$

Introduzindo o tensor de Levi-Civita na borda,  $\epsilon_{1abc} = -\epsilon_{abc}$ , e utilizando as equações de Gauss-Codazzi, Eq. (3.53), obtemos,

$$\Theta = \frac{\ell^2}{16\pi} \epsilon_{abc} [\delta K^a (\hat{R}^{bc} - K^b K^c) + \delta\omega^{ab} DK^c] + \delta B_3; \quad (3.57)$$

o primeiro termo da equação acima pode ser escrito como,

$$\epsilon_{abc} \delta K^a \hat{R}^{bc} = \delta (\epsilon_{abc} K^a \hat{R}^{bc}) - \epsilon_{abc} K^a \delta \hat{R}^{bc}, \quad (3.58)$$

em que a segunda contribuição contém a variação  $\delta \hat{R}^{bc} = D(\delta\omega^{bc})$ . Integrando por partes e anulando a derivada total, o termo resultante cancela o terceiro termo na Eq. (3.57). Demandando que  $\Theta$  se anule, obtemos,

$$B_3 = \frac{\ell^2}{16\pi} \epsilon_{abc} K^a \left( \hat{R}^{bc} - \frac{1}{3} K^b \wedge K^c \right); \quad (3.59)$$

na notação tensorial,  $B_3$  assume a seguinte forma,

$$B_3 = -\frac{\ell^2}{32\pi} d^3x \sqrt{-h} \delta_{[i_1 i_2 i_3]}^{[j_1 j_2 j_3]} K_{j_1}^{i_1} \left( \hat{R}_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} - \frac{2}{3} K_{j_2}^{i_2} K_{j_3}^{i_3} \right), \quad (3.60)$$

em que  $\delta_{[i_1 i_2 i_3]}^{[j_1 j_2 j_3]}$  é o delta de Kronecker generalizado nos índices da borda. Pode-se perceber que  $B_3$  não possui nenhum termo proporcional ao termo de Gibbons-Hawking-York,  $\sqrt{h}K$ , o que é esperado, visto que estamos empregando um princípio variacional diferente do usual, em que se emprega uma condição de Dirichlet na métrica.

### 3.2.1.1 Quantidades conservadas

Exploremos, agora, como a presença dos Kontratermos modifica a forma das cargas conservadas calculadas a partir do teorema de Noether. Como visto na Seção 2.6, a corrente de Noether associada a um difeomorfismo é definida como:

$$*J = -\Theta(\phi, \delta\phi) - I_\eta \mathcal{L}, \quad (3.61)$$

em que  $I_\eta$  é o operador de contração definido na Eq. (2.62) e  $\mathcal{L}$  é obtida da ação. Substituindo  $B_3$  na Eq. (3.57), obtemos,

$$\Theta = \frac{\ell^2}{16\pi} \epsilon_{abc} \delta K^a \left( \hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c \right), \quad (3.62)$$

que contém uma variação funcional da curvatura extrínseca. A corrente de Noether se torna, utilizando a Eq. (3.53a) e descartando as componentes em  $dr$ ,

$$*J = \frac{\ell^2}{16\pi} \epsilon_{abc} \left[ \mathcal{L}_\xi K^a \left( \hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c \right) - I_\xi D K^a \left( \hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c \right) \right]. \quad (3.63)$$

A derivada de Lie de  $K^a$  pode ser obtida a partir das componentes correspondentes da expressão para a conexão de spin,

$$\mathcal{L}_\xi \omega^{AB} = D I_\xi \omega^{AB} + I_\xi R^{AB}, \quad (3.64)$$

em que  $D I_\xi \omega^{AB}$  é a derivada exterior covariante de  $I_\xi \omega^{AB}$  e  $D \omega^{AB} = R^{AB}$ . Na borda  $\partial\mathcal{M}$ , a equação acima se reduz a,

$$\mathcal{L}_\xi K^a = D I_\xi K^a + I_\xi D K^a, \quad (3.65)$$

de forma que a corrente de Noether se torna,

$$\begin{aligned} *J &= \frac{\ell^2}{16\pi} \epsilon_{abc} \left[ D I_\xi K^a \left( \hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c \right) \right] \\ &= \frac{\ell^2}{16\pi} D \left[ \epsilon_{abc} I_\xi K^a \left( \hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Na última igualdade, utilizamos o fato de que a torção,  $T^a = D e^a$ , é nula na borda e a identidade de Bianchi para a borda  $D(\hat{R}^{bc} - K^b K^c) = 0$ , de modo que a corrente pode ser



escrita como uma forma exata,  $*J = dQ(\xi)$ . Supondo que a topologia da variedade é da forma  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , com  $\Sigma$  sendo a seção espacial, e que os campos decaem rápido o suficiente para que a integral convirja, a carga conservada associada a  $\xi$  será,

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \int_{\Sigma} *J = \frac{\ell^2}{16\pi} \int_{\Sigma} D \left[ \epsilon_{abc} I_{\xi} K^a (\hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c) \right] \\ &\Rightarrow Q(\xi) = \frac{\ell^2}{16\pi} \int_{\partial\Sigma} \epsilon_{abc} I_{\xi} K^a (\hat{R}^{bc} - K^b K^c + \ell^{-2} e^b e^c). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Na notação tensorial, a carga conservada será,

$$Q(\xi) = \frac{\ell^2}{32\pi} \int_{\partial\Sigma} \sqrt{-h} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \xi^k K_k^{i_1} (\hat{R}_{mn}^{i_2 i_3} - 2K_m^{i_2} K_n^{i_3} + 2\ell^{-2} \delta_m^{i_2} \delta_n^{i_3}) dx^m \wedge dx^n, \quad (3.68)$$

com todos os índices referentes ao espaço-tempo na borda e  $dx^m \wedge dx^n$  o elemento infinitesimal de superfície em  $\partial\Sigma$ .

### 3.2.1.2 Origem topológica

Possuindo a forma explícita da segunda forma fundamental, Eq. (3.52), é sempre possível escrever o termo de borda, Eq. (3.59), com covariância de Lorentz explícita,

$$B_3 = \frac{\ell^2}{32\pi} \epsilon_{ABCD} \theta^{AB} \left( R^{CD} + \frac{1}{3} \theta_F^C \theta^{FD} \right). \quad (3.69)$$

De fato, qualquer combinação linear do termo de borda dado acima e da versão com covariância de Lorentz do termo de Gibbons-Hawking-York,  $\epsilon_{ABCD} \theta^{AB} e^C e^D$ , compõe todos os possíveis termos de borda com covariância de Lorentz explícita em 4 dimensões (OLEA, 2005). O termo que contém a *vierbein* não aparece na forma final de  $B_3$ , visto que sua variação incluiria  $\delta e^a$ , fato que levaria, necessariamente, a uma condição de Dirichlet para a métrica na borda.

A expressão para  $B_3$  na Eq. (3.69) coincide com o termo de borda presente no teorema de Euler para variedades com borda (EGUCHI; GILKEY; HANSON, 1980),

$$\int_{\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} R^{AB} R^{CD} = 32\pi^2 \chi(\mathcal{M}) + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{ABCD} \theta^{AB} \left( R^{CD} + \frac{1}{3} \theta_F^C \theta^{FD} \right), \quad (3.70)$$

com  $\chi(\mathcal{M})$  sendo a característica de Euler da variedade  $\mathcal{M}$ . Como  $\chi(\mathcal{M})$  é um número topológico, a relação acima significa que, do ponto de vista dinâmico, a variação do termo de Euler no lado esquerdo da Eq. (3.70) é equivalente à variação do termo de borda  $B_3$ . Considere a variação da densidade de Euler,  $\mathcal{E}_4 = \epsilon_{ABCD} R^{AB} R^{CD}$ ,

$$\int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{E}_4 = 2 \int_{\mathcal{M}} d(\epsilon_{ABCD} \delta \omega^{AB} R^{CD}); \quad (3.71)$$

comparando com a Eq. (3.43), vemos que,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_3 = \alpha \int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{E}_4 \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{M}} B_3 = \alpha \int_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_4. \quad (3.72)$$

Se, ao invés de  $B_3$ , utilizarmos o termo de Euler para regularizar a ação euclidiana, o resultado será o mesmo a menos de uma constante. Embora essa constante seja irrelevante para a descrição termodinâmica do sistema, ela possui um significado geométrico: utilizando a Eq. (3.70) na ação no lugar de  $B_3$ , pode-se verificar que as duas abordagens são equivalentes a menos de uma constante de integração, dada em termos da característica de Euler como  $\frac{1}{2}\pi\ell^2\chi(\mathcal{M})$ .

### 3.2.2 Kontratermos para dimensões pares

Para o caso com dimensão par arbitrária,  $D = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , podemos prosseguir de maneira análoga ao caso em que  $D = 4$  (AROS et al., 2000b; AROS et al., 2000a; OLEA, 2005). A ação, neste caso, será,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi(D-2)!} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \left( R^{A_1 A_2} e^{A_3} \dots e^{A_{2n}} + \frac{D-2}{D\ell^2} e^{A_1} \dots e^{A_{2n}} \right) + \int_{\partial\mathcal{M}} B_{2n-1}. \quad (3.73)$$

A variação da ação rende o termo de superfície,

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\partial\mathcal{M}} \Theta, \quad (3.74)$$

em que,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \Theta = \frac{1}{16\pi(D-2)!} \int_{\partial\mathcal{M}} \left( \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \delta\omega^{A_1 A_2} e^{A_3} \dots e^{A_{2n}} \right) + \int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_{2n-1}. \quad (3.75)$$

Demandando que  $\Theta = 0$  para que a ação seja estacionária e supondo que o espaço-tempo seja ALAdS, o que implica que podemos escrever  $R^{A_1 A_2} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}} = \left(-\frac{1}{\ell^2}\right)^n e^{A_1} \dots e^{A_{2n}}$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_{2n-1} &= -\frac{1}{16\pi(D-2)!} \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \delta\omega^{A_1 A_2} R^{A_3 A_4} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}} (-1)^{n-1} \ell^{2n-2} \\ &\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_{2n-1} = n\alpha_n \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \delta\omega^{A_1 A_2} R^{A_3 A_4} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

com,

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n \ell^{2n-2}}{16\pi n(D-2)!}. \quad (3.77)$$

A variação da densidade de Euler  $2n$ -dimensional,  $\mathcal{E}_{2n} = \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} R^{A_1 A_2} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}}$ , é:

$$\int_{\mathcal{M}} \delta\mathcal{E}_{2n} = n \int_{\mathcal{M}} d\left( \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \delta\omega^{A_1 A_2} R^{A_3 A_4} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}} \right); \quad (3.78)$$

comparando com a Eq. (3.76), pode-se imediatamente notar que,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \delta B_{2n-1} = \alpha_n \int_{\mathcal{M}} \delta\mathcal{E}_{2n} \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{M}} B_{2n-1} = \alpha_n \int_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{2n}. \quad (3.79)$$

O termo na forma explícita é obtido seguindo o mesmo procedimento do caso com  $D = 4$ , e é, na forma com covariância explícita de Lorentz,

$$\begin{aligned} B_{2n-1} &= n\alpha \int_0^1 dt \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \theta^{A_1 A_2} \left( \hat{R}^{A_3 A_4} + t^2 \theta_F^{A_3} \theta^{F A_4} \right) \times \dots \\ &\quad \dots \times \left( \hat{R}^{A_{2n-1} A_{2n}} + t^2 \theta_F^{A_{2n-1}} \theta^{F A_{2n}} \right), \end{aligned} \quad (3.80)$$

em que a integral paramétrica (cujo parâmetro é  $t$ ) dá os coeficientes de uma expansão binomial e vem do uso do operador de homotopia de Cartan, para encontrar o termo de borda que é localmente equivalente à densidade de Euler (OLEA, 2007; ANASTASIOU et al., 2020). O teorema de Euler (no caso genérico também chamado de teorema de Chern-Gauss-Bonnet) em  $D = 2n$  dimensões é (OLEA, 2007),

$$\int_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{2n} = (-4\pi)^n n! \chi(\mathcal{M}) + \int_{\partial\mathcal{M}} B_{2n-1}, \quad (3.81)$$

o que, novamente, mostra a equivalência de  $\mathcal{E}_{2n}$  e  $B_{2n-1}$  a menos de uma constante topológica. Em termos da curvatura extrínseca em  $\partial\mathcal{M}$ ,  $B_{2n-1}$  se torna,

$$B_{2n-1} = 2n\alpha_n \int_0^1 dt \epsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} K^{a_1} \left( \hat{R}^{a_2 a_3} - t^2 K^{a_2} \wedge K^{a_3} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \hat{R}^{a_{2n-2} a_{2n-1}} - t^2 K^{a_{2n-2}} \wedge K^{a_{2n-1}} \right), \quad (3.82)$$

como fator  $(\hat{R}^{ab} - t^2 K^a \wedge K^b)$  aparecendo  $(n-1)$  vezes. Na forma tensorial, obtemos:

$$B_{2n-1} = 2n\alpha_n \int_0^1 dt d^{2n-1}x \sqrt{-h} \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}]^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} K_{j_1}^{i_1} \left( \frac{1}{2} \hat{R}_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} - t^2 K_{j_2}^{i_2} K_{j_3}^{i_3} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \frac{1}{2} \hat{R}_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} - t^2 K_{j_{2n-2}}^{i_{2n-2}} K_{j_{2n-1}}^{i_{2n-1}} \right). \quad (3.83)$$

Pode-se perceber que a ausência do termo de Gibbons-Hawking-York não é uma particularidade do caso em 4 dimensões, mas uma característica geral para qualquer dimensão par.

Como foi dito, o termo  $B_{2n-1}$  é equivalente à densidade de Euler. Na forma geral, o teorema de Chern-Gauss-Bonnet relaciona a característica de Euler de uma variedade  $\mathcal{M}$  à densidade de Euler e, no caso em que  $\mathcal{M}$  possui uma borda, à  $n$ -ésima forma de Chern,  $\Pi$ , por (ANASTASIOU et al., 2020):

$$\chi(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{E} + \int_{\partial\mathcal{M}} \Pi, \quad (3.84)$$

de modo que  $B_{2n-1}$  é a  $n$ -ésima forma de Chern para a variedade representada pelo espaço-tempo. Essa forma de Chern pode ser obtida através da forma de transgressão<sup>7</sup> de duas conexões de calibre para o grupo de Lorentz, o que mostra que o termo de borda  $B_{2n-1}$  pode também ser visto como uma forma de transgressão do grupo de Lorentz (OLEA, 2007).

<sup>7</sup> Uma forma de transgressão (*transgression form*, em inglês) pode ser obtida de dois polinômios invariantes construídos a partir das curvaturas provenientes de duas conexões de calibre diferentes na mesma classe de homotopia. A diferença desses dois polinômios invariantes define a derivada exterior da forma de transgressão; aplicando o operador de homotopia de Cartan, é possível obter a própria forma de transgressão em termos de uma integral paramétrica do polinômio invariante construído com uma conexão de calibre que interpola as duas primeiras. Mais detalhes podem ser vistos no Apêndice A de Olea (2007).

### 3.2.2.1 Quantidades conservadas

Substituindo  $B_{2n-1}$  no termo de superfície obtido a partir da ação,  $\Theta$ , obtemos:

$$\Theta = -n\alpha_n \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \mathcal{L}_\xi \omega^{A_1 A_2} \left[ R^{A_3 A_4} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}} + \frac{(-1)^n}{\ell^{2n-2}} e^{A_3} \dots e^{A_{2n}} \right]; \quad (3.85)$$

como  $\mathcal{L}_\xi \omega^{AB} = DI_\xi \omega^{AB} + I_\xi R^{AB}$ , podemos escrever a corrente de Noether como uma forma exata, de maneira que a carga conservada se torna,

$$Q(\xi) = n\alpha_n \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} I_\xi \omega^{A_1 A_2} \left[ R^{A_3 A_4} \dots R^{A_{2n-1} A_{2n}} + \frac{(-1)^n}{\ell^{2n-2}} e^{A_3} \dots e^{A_{2n}} \right], \quad (3.86)$$

que pode ser reescrita como,

$$Q(\xi) = \int_{\partial\mathcal{M}} I_\xi \omega^{AB} \mathcal{T}_{AB}, \quad (3.87)$$

em que  $\mathcal{T}_{AB}$  é a variação da lagrangiana com relação à 2-forma de curvatura,

$$\mathcal{T}_{AB} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R^{AB}}. \quad (3.88)$$

Na notação tensorial, a carga de Noether se torna:

$$Q(\xi) = n\alpha_n \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-h} \epsilon_{i_1 \dots i_{2n-1}} \xi^k K_k^{i_1} \left( R_{m_1 m_2}^{i_2 i_3} \dots R_{m_{2n-3} m_{2n-2}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} + (-1)^n \frac{2^{n+1}}{\ell^2 (n-1)} \delta_{m_1}^{i_2} \dots \delta_{m_{2n-2}}^{i_{2n-1}} \right) dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_{2n-2}}. \quad (3.89)$$

### 3.2.3 Kontratermos em dimensões ímpares

No caso de um espaço-tempo com dimensão ímpar,  $D = 2n + 1$ , embora a  $n$ -ésima forma de Chern,  $\Pi$ , seja não nula, a densidade de Euler é nula, com o teorema de Chern-Gauss-Bonnet estabelecendo que a característica de Euler de uma variedade com borda com dimensão ímpar é dada pela característica de Euler da borda. Desta forma,  $\Pi$  não pode fornecer um termo de borda adequado para um princípio de ação definido em uma variedade com dimensão ímpar no volume (ANASTASIOU et al., 2020).

No contexto da gravitação de Chern-Simons-AdS, um princípio de ação bem posto é obtido a partir da imposição de condições de contorno na segunda forma fundamental (MORA et al., 2004b). De fato, para o grupo AdS como grupo de calibre, a forma de Chern-Simons pode ser escrita como uma lagrangiana de Lovelock (*i.e.*, um polinômio na curvatura e na *vielbein*) para o volume da variedade mais um termo de superfície; a partir do uso de condições de compatibilidade da segunda forma fundamental da mesma forma que as empregadas nas seções anteriores, mais a condição de que a *vielbein* de referência é nula (para evitar uma formulação independente de *background*) resulta em uma lagrangiana gravitacional que é a soma da lagrangiana de Chern-Simons-AdS mais

um termo de borda que possui, naturalmente, invariância de calibre, devido à sua origem em uma forma de transgressão (MORA et al., 2006; OLEA, 2007).

Considerando a lagrangiana de Einstein-Hilbert em  $D = 2n + 1$  dimensões suplementada por um termo de borda,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi(D-2)!} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{A_1 \dots A_{2n+1}} \left( R^{A_1 A_2} e^{A_3} \dots e^{A_{2n+1}} + \frac{D-2}{\ell^2 D} e^{A_1} \dots e^{A_{2n+1}} \right) + \int_{\partial\mathcal{M}} B_{2n}, \quad (3.90)$$

e utilizando o termo de borda obtido na gravitação de Chern-Simons-AdS como  $B_{2n}$ ,

$$B_{2n} = n\beta_n \int_0^1 dt \int_0^1 ds \epsilon_{A_1 \dots A_{2n+1}} \theta^{A_1 A_2} e^{A_3} \left( \hat{R}^{A_4 A_5} + t^2 \theta_F^{A_4} \theta^{F A_5} + \frac{s^2}{\ell^2} e^{A_4} e^{A_5} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \hat{R}^{A_{2n} A_{2n+1}} + t^2 \theta_F^{A_{2n}} \theta^{F A_{2n+1}} + \frac{s^2}{\ell^2} e^{A_{2n}} e^{A_{2n+1}} \right), \quad (3.91)$$

o princípio variacional se torna bem definido demandando que o espaço tempo seja ALAdS e (MORA et al., 2004a; OLEA, 2007),

$$\beta_n = \frac{1}{16\pi(D-2)!} \frac{(-\ell^2)^{n-1}}{2^{2n-1} n [(n-1)!]^2}. \quad (3.92)$$

Em termos da curvatura extrínseca da borda,  $B_{2n}$  se torna,

$$B_{2n} = -2n\beta_n \int_0^1 dt \int_0^1 ds \epsilon_{a_1 \dots a_{2n}} K^{a_1} e^{a_2} \left( \hat{R}^{a_3 a_4} + t^2 K^{a_3} K^{a_4} + \frac{s^2}{\ell^2} e^{a_3} e^{a_4} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \hat{R}^{a_{2n-1} a_{2n}} + t^2 K^{a_{2n-1}} K^{a_{2n}} + \frac{s^2}{\ell^2} e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}} \right), \quad (3.93)$$

e, na notação tensorial

$$B_{2n} = 2n\sqrt{-h} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \delta_{[j_1 \dots j_{2n-1}]^{[i_1 \dots i_{2n-1}]} K_{i_1}^{j_1} \left( \frac{1}{2} R_{i_2 i_3}^{j_2 j_3} + t^2 K_{i_2}^{j_2} K_{i_3}^{j_3} + \frac{s^2}{\ell^2} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_3}^{j_3} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \frac{1}{2} R_{i_{2n-2} i_{2n-1}}^{j_{2n-2} j_{2n-1}} + t^2 K_{i_{2n-2}}^{j_{2n-2}} K_{i_{2n-1}}^{j_{2n-1}} + \frac{s^2}{\ell^2} \delta_{i_{2n-2}}^{j_{2n-2}} \delta_{i_{2n-1}}^{j_{2n-1}} \right). \quad (3.94)$$

### 3.3 Buraco negro Born-Infeld-AdS

A eletrodinâmica de Born-Infeld foi proposta em 1930 como uma forma de obter uma teoria clássica para o eletromagnetismo que o desse uma auto-energia finita para o elétron (BORN; INFELD, 1934). Nos últimos anos, o interesse na teoria de Born-Infeld vem sendo retomado devido ao seu papel em teoria de cordas (TSEYTLIN, 1999; GIBBONS, 2001); em particular, o cálculo da ação efetiva em baixas energias para supercordas abertas leva ao surgimento de ações do tipo Born-Infeld (FRADKIN; TSEYTLIN, 1985); ações do tipo Born-Infeld também surgem como ações efetivas que governam a dinâmica de campos vetoriais em  $D$ -branas (TSEYTLIN, 1986).

O buraco negro de Born-Infeld-AdS é conhecido desde o início dos anos 2000 (FERNANDO; KRUG, 2003; CAI; PANG; WANG, 2004), com suas propriedades tendo sido estudadas desde então (DEY, 2004; FERNANDO, 2006). Nesta seção, vamos estudar as propriedades termodinâmicas do buraco negro Born-Infeld AdS utilizando os Kontratermos, conforme feito em (MISKOVIC; OLEA, 2008), nos atendo ao caso de dimensão par.

Considere a ação de Einstein-Hilbert-AdS com a lagrangiana da eletrodinâmica de Born-Infeld suplementada pelo kontratermo correspondente em  $D = d + 1$  dimensões,

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L} + \alpha_d \int_{\partial \mathcal{M}} d^d x B_d, \quad (3.95)$$

com,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \left[ R - 2\Lambda + 4b^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}} \right) \right], \quad (3.96)$$

em que  $\Lambda = -(D-1)(D-2)/2\ell^2$  é a constante cosmológica em  $D$  dimensões,  $b$  é uma constante real,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ; quando  $b \rightarrow \infty$ , a eletrodinâmica de Maxwell é recuperada e, quando  $b \rightarrow 0$ , o termo eletromagnético se anula.

Variações arbitrárias da ação com respeito à métrica,  $g_{\mu\nu}$ , e ao campo de calibre,  $A_\mu$ , resultam em,

$$\delta \mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial \mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left[ (g^{-1} \delta g)_\nu^\mu \mathcal{E}_\nu^\mu + \delta A_\mu \mathcal{E}^\mu \right] + \int_{\partial \mathcal{M}} d^d x \Theta, \quad (3.97)$$

em que as equações de movimento são,

$$\mathcal{E}_\nu^\mu = R_\nu^\mu + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R + \Lambda \delta_\nu^\mu - T_\nu^\mu, \quad (3.98a)$$

$$\mathcal{E}^\mu = -\nabla_\nu \left[ \frac{4F^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}} \right], \quad (3.98b)$$

e o tensor de energia-momento é,

$$T_\nu^\mu = 2b^2 \delta_\nu^\mu \left( 1 - \sqrt{\frac{F^2}{2b^2}} \right) + \frac{2F^{\mu\rho} F_{\rho\nu}}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}. \quad (3.99)$$

Quando  $b$  tende ao infinito, o tensor de energia-momento se torna o da eletrodinâmica de Maxwell,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} T_\nu^\mu = 2F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F^2 + \mathcal{O}(b^{-2}). \quad (3.100)$$

Utilizando o teorema de Stokes, o termo de borda na Eq. (3.97) pode ser escrito como,

$$\Theta = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-h} n_\mu \left( \delta_{[\alpha\beta]}^{[\mu\nu]} g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma_{\gamma\nu}^\beta + \frac{4F^{\mu\nu} \delta A_\nu}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}} \right) + \alpha_d \delta B_d. \quad (3.101)$$

Em termos de uma foliação radial na forma gaussiana (vide Seção 2.7), o termo de superfície pode ser escrito na borda  $\partial\mathcal{M}$  como,

$$\Theta = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-h}\left[\left(h^{-1}\delta h\right)_j^i K_i^j + 2\delta K_i^i + \frac{4NF^{ri}\delta A_i}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}\right] + \alpha_d\delta B_d. \quad (3.102)$$

### 3.3.1 Solução de buraco negro topológico

Considere o *Ansatz* para um buraco negro estático no sistema de coordenadas  $\{t, r, \varphi^m\}$ ,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2\gamma_{mn}(\varphi) d\varphi^m d\varphi^n, \quad (3.103)$$

de modo que  $\sqrt{-h} = r^{D-2}\sqrt{f}\sqrt{\gamma}$ , em que  $\gamma_{mn}$  é a métrica de um espaço riemanniano  $(D-2)$ -dimensional  $\Sigma_{D-2}$  com curvatura  $R_{m_2n_2}^{m_1n_1}(\gamma) = k\delta_{[m_2n_2]}^{[m_1n_1]}$ , tal que  $k = 1, 0$  ou  $-1$  descreve, respectivamente, uma seção transversal esférica, localmente plana ou hiperbólica; como consequência, o horizonte de eventos do buraco negro,  $r = r_+$ , possui a mesma topologia do espaço  $\Sigma_{D-2}$  e é definido como a maior raiz de  $f(r_+) = 0$ .

A curvatura extrínseca da borda será dada por,

$$K_j^i = -\frac{1}{2}\sqrt{f}h^{ik}\partial_r h_{kj} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{f}}\frac{df}{dr} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{f}}{r}\delta_n^m \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

e as componentes não nulas da curvatura intrínseca são,

$$\tilde{R}_{m_2n_2}^{m_1n_1}(h) = \frac{k}{r^2}\delta_{[m_2n_2]}^{[m_1n_1]}. \quad (3.105)$$

Vamos escolher um campo de calibre com dependência na coordenada radial,

$$A_\mu = \phi(r)\delta_\mu^t, \quad (3.106)$$

cujos tensor de intensidade do campo associado é,

$$F_{\mu\nu} = E(r)\delta_{[\mu\nu]}^{[tr]}, \quad (3.107)$$

como campo elétrico dado por,

$$E(r) = -\frac{d\phi}{dr}; \quad (3.108)$$

resolvendo a equação de movimento  $\mathcal{E}^\mu = 0$ , obtemos o seguinte campo elétrico,

$$E(r) = \frac{q}{\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^{2D-4}}}, \quad (3.109)$$

em que  $q$  é uma constante de integração relacionada à carga elétrica, visto que  $b \rightarrow \infty \Rightarrow E(r) = \frac{q}{r^{D-2}} + \mathcal{O}(b^{-2})$ . O potencial medido com respeito ao horizonte de eventos será,

$$\phi(r) = -\int_{r_+}^r dv E(v). \quad (3.110)$$

Para a gravitação de Einstein-Born-Infeld, o potencial é dado em termos da função hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  (DEGHANI; SEDEHI, 2006):

$$\phi(r) = \frac{q}{(D-3)r^{D-3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D-3}{2D-4}; \frac{3D-7}{2D-4}; -\frac{q^2}{b^2 r^{2D-4}}\right) - \Phi, \quad (3.111)$$

com a constante de integração,  $\Phi$ , fixada pela condição  $\phi(r_+) = 0$ ,

$$\Phi = \frac{q}{(D-3)r_+^{D-3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D-3}{2D-4}; \frac{3D-7}{2D-4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^{2D-4}}\right). \quad (3.112)$$

A equação de movimento  $\mathcal{E}_i^t = 0$  com o Ansatz dado pela Eq. (3.103) e com  $F_{\mu\nu}$  definido pela Eq. (3.107) se torna,

$$r \frac{df}{dr} + (D-3)(f-k) - (D-1) \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{4b^2 r^2}{D-2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}}\right) = 0. \quad (3.113)$$

Substituindo a Eq. (3.109), a solução para a função da métrica se torna,

$$f(r) = k + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{\mu}{r^{D-3}} + \frac{4b^2 r^2}{(D-1)(D-2)} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^{2D-4}}}\right) + \frac{4q^2}{(D-1)(D-3)r^{2D-6}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D-3}{2D-4}; \frac{3D-7}{2D-4}; -\frac{q^2}{b^2 r^{2D-4}}\right), \quad (3.114)$$

em que  $\mu$  é um parâmetro com dimensão de massa. As equações de movimento restantes são identicamente satisfeitas por  $f(r)$ , de modo que o raio  $r_+$  do horizonte de eventos é obtido de  $f(r_+) = 0$ :

$$k + \frac{r_+^2}{\ell^2} - \frac{\mu}{r_+^{D-3}} + \frac{4b^2 r_+^2}{(D-1)(D-2)} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^{2D-4}}}\right) + \frac{4q\Phi}{(D-1)r_+^{D-3}} = 0, \quad (3.115)$$

de onde podemos obter  $\mu(r_+)$ ,

$$\mu(r_+) = r_+^{D-3} k + \frac{r_+^{D-1}}{\ell^2} + \frac{4b^2 r_+^{D-1}}{(D-1)(D-2)} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^{2D-4}}}\right) + \frac{4q\Phi}{(D-1)}. \quad (3.116)$$

A expansão de  $f(r)$  em  $b$  é dada por,

$$f(r) = k + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{\mu}{r^{D-3}} + \frac{2q^2}{(D-2)(D-3)r^{2D-6}} + \mathcal{O}\left(\frac{r^{-4D+10}}{b^2}\right), \quad (3.117)$$

que, para  $b \rightarrow \infty$ , se reduz à solução de Reissner-Nordström-AdS e, para  $q = 0$ , ao buraco negro topológico de Schwarzschild-AdS. O caso extremo possui um horizonte degenerado em  $r_{\text{ext}}$ , em que  $f(r_{\text{ext}})$  e  $f'(r_{\text{ext}})$  se anulam; a massa para a solução extrema em termos da carga extrema  $q_{\text{ext}}$  e de  $r_{\text{ext}}$  é dada por,

$$\mu_{\text{ext}} = \frac{2kr_{\text{ext}}^{D-3}}{D-1} + \frac{4q_{\text{ext}}^2}{(D-1)(D-3)r_{\text{ext}}^{D-3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D-3}{2D-4}; \frac{3D-7}{2D-4}; -\frac{q_{\text{ext}}^2}{b^2 r_{\text{ext}}^{2D-4}}\right), \quad (3.118)$$



com,

$$q_{\text{ext}}^2 = \frac{1}{4}(D-2)r_{\text{ext}}^{2D-4} \left( \frac{(D-3)k}{r_{\text{ext}}^2} + \frac{D-1}{\ell^2} \right) \left[ 2 + \frac{D-2}{4b^2} \left( \frac{(D-3)k}{r_{\text{ext}}^2} + \frac{D-1}{\ell^2} \right) \right], \quad (3.119)$$

de forma que a solução é unicamente caracterizada por  $r_{\text{ext}}$ . Pode-se mostrar, combinando as Eq. (3.118) e (3.119) e tomando  $b \rightarrow \infty$ , que a condição de extremicidade para o buraco negro de Reissner-Nordström-AdS é recuperada,

$$\mu_{\text{ext}}^2 = \frac{8}{(D-2)(D-3)} q_{\text{ext}}^2 \frac{\left[ k + \frac{(D-2)r_{\text{ext}}^2}{(D-3)\ell^2} \right]^2}{\left[ k + \frac{(D-1)r_{\text{ext}}^2}{(D-3)\ell^2} \right]}; \quad (3.120)$$

no limite em que  $\ell^2 \rightarrow \infty$  (consistente apenas para  $k = 1$ , visto que, para  $k = 0$ , há uma singularidade e, para  $k = -1$ , a massa se torna taquônica<sup>8</sup>), a equação acima mostra que a massa extrema é proporcional à carga extrema.

### 3.3.2 Princípio variacional

Vamos mostrar, primeiramente, que os Kontratermos correspondentes tornam o princípio variacional bem definido. Como estamos nos restringindo ao caso de dimensão par,  $D = 2n$ , o Kontratermo em questão é,

$$B_{2n-1} = 2n\sqrt{-h} \int_0^1 dt \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}]^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} K_{j_1}^{i_1} \left( \frac{1}{2} \tilde{R}_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} - t^2 K_{j_2}^{i_2} K_{j_3}^{i_3} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \frac{1}{2} \tilde{R}_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} - t^2 K_{j_{2n-2}}^{i_{2n-2}} K_{j_{2n-1}}^{i_{2n-1}} \right), \quad (3.121)$$

com a constante de acoplamento,

$$\alpha_{2n-1} = \frac{1}{16\pi} \frac{(-1)^n \ell^{2n-2}}{n(2n-2)}. \quad (3.122)$$

A variação de  $B_{2n-1}$  é dada por,

$$\delta B_{2n-1} = \frac{n}{2^{n-1}} \sqrt{-h} \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}]^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} \left[ (h^{-1} \delta h)_k^{i_1} K_{j_1}^k + 2\delta K_{j_1}^{i_1} \right] \left( \tilde{R}_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} - K_{j_2}^{i_2} K_{j_3}^{i_3} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \tilde{R}_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} - K_{j_{2n-2}}^{i_{2n-2}} K_{j_{2n-1}}^{i_{2n-1}} \right); \quad (3.123)$$

utilizando a Eq. (3.102), a variação total da ação se torna,

$$\delta \mathcal{S}_{2n} = \frac{n\alpha_{2n-1}}{2^{n-1}} \int_{\partial \mathcal{M}} d^{2n-1}x \sqrt{-h} \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}]^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} \left[ (h^{-1} \delta h)_k^{i_1} K_{j_1}^k + 2\delta K_{j_1}^{i_1} \right] \left( \tilde{R}_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} - K_{j_2}^{i_2} K_{j_3}^{i_3} \right) \times \dots \\ \dots \times \left( \tilde{R}_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} - K_{j_{2n-2}}^{i_{2n-2}} K_{j_{2n-1}}^{i_{2n-1}} \right) - \frac{(-1)^{n-1}}{\ell^{2(n-1)}} \delta_{[i_2 i_3] \dots}^{[j_2 j_3] \dots} \delta_{[j_{2n-2} j_{2n-1}]}^{[i_{2n-2} i_{2n-1}]} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \mathcal{M}} d^{2n-1}x \sqrt{-h} \frac{NF^{ri} \delta A_i}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}. \quad (3.124)$$

<sup>8</sup> Táquions são partículas hipotéticas que se movem com velocidade superior à da luz, sendo caracterizadas por um valor complexo para a massa. Note que, para  $k = -1$ ,  $\mu_{\text{ext}}^2 < 0$ , de forma que  $\mu_{\text{ext}}$  é uma quantidade complexa. É importante mencionar que não existem evidências que indiquem a existência de tais partículas.

Utilizando a Eq. (2.75c),

$$R_{kl}^{ij} = \tilde{R}_{kl}^{ij} - K_{[k}^{[i} K_{l]}^{j]}, \quad (3.125)$$

podemos fatorar o segundo termo da Eq. (3.124) em  $R_{kl}^{ij} + \ell^{-2} \delta_{[kl]}^{[ij]}$ , de modo que obtemos,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{2n} = & \frac{n(n-1)\alpha_{2n-1}}{2^{n-1}} \int_{\partial \mathcal{M}} \int_0^1 dt \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}]^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} \left[ \left( h^{-1} \delta h \right)_k^{i_1} K_{j_1}^k + 2\delta K_{j_1}^{i_1} \right] \left( R_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} + \ell^{-2} \delta_{[j_2 j_3]}^{[i_2 i_3]} \right) \times \dots \\ & \left[ t \left( R_{j_4 j_5}^{i_4 i_5} + \ell^{-2} \delta_{[j_4 j_5]}^{[i_4 i_5]} \right) \dots \left( R_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} + \ell^{-2} \delta_{[j_{2n-2} j_{2n-1}]}^{[i_{2n-2} i_{2n-1}]} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\ell^{2(n-1)}} \delta_{[j_4 j_5]}^{[i_4 i_5]} \dots \delta_{[j_{2n-2} j_{2n-1}]}^{[i_{2n-2} i_{2n-1}]} \right] + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \mathcal{M}} d^{2n-1} x \sqrt{-h} \frac{N F^{ri} \delta A_i}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Portanto, para garantir que a ação é estacionária, devemos impor as seguintes condições,

$$R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \frac{1}{\ell^2} \delta_{[\mu\nu]}^{[\alpha\beta]} = 0 \quad \text{e} \quad \delta A_i = 0 \quad \text{em} \quad \partial \mathcal{M}. \quad (3.127)$$

### 3.3.3 Quantidades conservadas

Considere um difeomorfismo  $\xi^\mu(x)$ ; as variáveis dinâmicas,  $g_{\mu\nu}$  e  $A_\mu$ , sofrem variações sob a ação desse difeomorfismo cuja forma infinitesimal é dada em termos de derivadas de Lie,

$$\delta_\xi = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = -(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu), \quad (3.128a)$$

$$\delta_\xi A_\mu = \mathcal{L}_\xi A_\mu = -\partial_\mu (\xi^\nu A_\nu) + \xi^\nu F_{\mu\nu}. \quad (3.128b)$$

A ação da derivada de Lie na lagrangiana  $\mathcal{L}$  é dada por

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\beta} \mathcal{L}_\xi \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \mathcal{L}_\xi A_\mu, \quad (3.129)$$

e de maneira similar para o termo de borda. Utilizando  $\Theta = \sqrt{-h} n_\mu \Theta^\mu$  e as seguintes identidades,

$$\delta_\xi (d^D x) = \partial_\mu \xi^\mu d^D x, \quad (3.130a)$$

$$\mathcal{L}_\xi \sqrt{-g} = -\sqrt{-g} \nabla_\mu \xi^\mu, \quad (3.130b)$$

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \mathcal{L}_\xi \mathcal{L} + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \quad (3.130c)$$

a variação da ação sob difeomorfismos se torna,

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{S} = & \int_{\mathcal{M}} d^D x \left[ \mathcal{L}_\xi (\sqrt{-g} \mathcal{L}) + \partial_\mu (\sqrt{-g} \xi^\mu \mathcal{L}) \right] + \alpha_d \int_{\partial \mathcal{M}} d^d x \left[ \mathcal{L}_\xi B_d + \partial_i (\xi^i B_d) \right] \\ = & \int_{\partial \mathcal{M}} d^d x \sqrt{-h} n_\mu \left[ \Theta^\mu (\xi) + \xi^\mu \mathcal{L} + \frac{1}{\sqrt{-h}} \alpha_d n^\mu \partial_i (\xi^i B_d) \right] + \text{eq. de mov.} \end{aligned} \quad (3.131)$$

A invariância da ação sob difeomorfismos define a corrente de Noether,

$$J^\mu = \Theta^\mu (\xi) + \xi^\mu \mathcal{L} + \frac{1}{\sqrt{-h}} \alpha_d n^\mu \partial_i (\xi^i B_d). \quad (3.132)$$

Utilizando a Eq. (3.101), podemos escrever o termo de superfície como,

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-h} n_\mu \left( \delta_{[\alpha\beta]}^{[\mu\nu]} g^{\alpha\gamma} \mathcal{L}_\xi \Gamma_{\gamma\nu}^\beta + \frac{4F^{\mu\nu} \mathcal{L}_\xi A_\nu}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}} \right) + \alpha_d \mathcal{L}_\xi B_d. \quad (3.133)$$

Como a corrente de Noether satisfaz  $\partial_\mu(\sqrt{-g}J^\mu) = 0$ , sempre é possível escrevê-la localmente como uma forma exata. No entanto, a carga de Noether pode apenas ser definida diretamente de  $J^\mu$  quando a corrente pode ser convertida globalmente na borda em uma derivada total. A foliação radial define uma lei de conservação ao longo da coordenada radial, de maneira que  $Q(\xi) = \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-g}J^\mu$  é uma constante de movimento.

Consideremos uma foliação ADM tipo tempo para a métrica em  $\partial\mathcal{M}$  com coordenadas  $x^i = (t, y^m)$ ,

$$h_{ij} dx^i dx^j = -\tilde{N}^2(t) dt^2 + \sigma_{mn} (dy^m + \tilde{N}^m dt) (dy^n + \tilde{N}^n dt), \quad (3.134a)$$

$$\sqrt{-h} = \tilde{N} \sqrt{\sigma}, \quad (3.134b)$$

gerada pelo vetor unitário normal  $u_i = (u_t, u_m) = (-\tilde{N}, \mathbf{0})$  que aponta para fora;  $\sigma_{mn}$  representa a métrica da borda de uma seção espacial  $\Sigma_\infty$  em tempo constante. Se a componente radial de  $J^\mu$  adota a forma  $\sqrt{-g}J^r = \partial_j(\sqrt{-h}\xi^i q_i^j)$ , o teorema de Noether fornece as cargas conservadas,  $Q(\xi)$ , como integrais de superfície em  $\Sigma_\infty$ ,

$$Q(\xi) = \int_{\Sigma_\infty} d^{2n-2}y \sqrt{\sigma} u_j \xi^i q_i^j, \quad (3.135)$$

para um dado conjunto de vetores de Killing assintóticos  $\{\xi\}$ .

A expressão de  $\Theta(\xi)$  pode ser obtida da Eq. (3.124) através de uma projeção adequada na borda,

$$\begin{aligned} n_\mu \Theta^\mu &= \frac{n\alpha_{2n-1}}{2^{n-1}} \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}] }^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} \left[ (h^{-1} \mathcal{L}_\xi h)_k^{i_1} K_{j_1}^k + 2 \mathcal{L}_\xi K_{j_1}^{i_1} \right] \left[ (\tilde{R}_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} - K_{[j_2}^{i_2} K_{j_3]}^{i_3}) \times \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \times \left( \tilde{R}_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} - K_{[j_{2n-2}}^{i_{2n-2}} K_{j_{2n-1}}^{i_{2n-1}}] \right) - \frac{(-1)^{(n-1)}}{\ell^{2(n-1)}} \delta_{[j_2 j_3]}^{[i_2 i_3]} \dots \delta_{[j_{2n-2} j_{2n-1}]}^{[i_{2n-2} i_{2n-1}]} \right] \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \frac{4NF^{ri} \mathcal{L}_\xi A_i}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Utilizando a Eq. (2.74), a ação do difeomorfismo em  $K_{ij}$  pode ser obtida das componentes correspondentes de  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ,

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} (R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\mu\beta}) \xi^\beta - \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \xi^\alpha. \quad (3.137)$$

A partir daí, obtemos a carga de Noether,

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \frac{n\alpha_{2n-1}}{2^{n-2}} \int_{\Sigma_\infty} d^{2n-2}y \sqrt{u_j \xi^i} \delta_{[i_1 \dots i_{2n-1}]}^{[j_1 \dots j_{2n-1}]} K_i^{i_1} \left( R_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} \dots R_{j_{2n-2} j_{2n-1}}^{i_{2n-2} i_{2n-1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-1)^{n-1}}{\ell^{2(n-1)}} \delta_{[j_2 j_3]}^{[i_2 i_3]} \dots \delta_{[j_{2n-2} j_{2n-1}]}^{[i_{2n-2} i_{2n-1}]} \right). \end{aligned} \quad (3.138)$$

O termo dentro do parênteses na equação acima sempre pode ser fatorado em termos de  $R_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} + \ell^{-2} \delta_{[j_2 j_3]}^{[i_2 i_3]}$ , de modo que a carga é nula para qualquer espaço-tempo com curvatura constante globalmente. Para o buraco negro de Born-Infeld-AdS, a massa pode ser calculada utilizando o vetor de Killing  $\xi^i = (1, \mathbf{0})$  na Eq. (3.138),

$$Q(\partial_t) = -\frac{n\alpha_{2n-1}}{2^{n-2}} \int_{\Sigma_\infty} d^{2n-2} \phi \sqrt{\gamma} \sqrt{f} r^{2n-2} \delta_{[n_1 \dots n_{2n-2}]}^{[m_1 \dots m_{2n-2}]} K_t^t \left( R_{m_1 m_2}^{n_1 n_2} \dots R_{m_{2n-3} m_{2n-2}}^{n_{2n-3} n_{2n-2}} - \frac{(-1)^{n-1}}{\ell^2} \delta_{[m_1 m_2]}^{[n_1 n_2]} \dots \delta_{[m_{2n-3} m_{2n-2}]}^{[n_{2n-3} n_{2n-2}]} \right), \quad (3.139)$$

que implica,

$$Q(\partial_t) = \frac{\text{Vol}(\Sigma_{2n-2})}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{df}{dr} \left[ r^{2n-2} - \ell^{2n-2} (f - k)^{n-1} \right]. \quad (3.140)$$

Utilizando a identidade  $a^{n-1} - b^{n-1} = (a - b) a^{n-2} \sum_{p=0}^{n-2} \left(\frac{b}{a}\right)^p$  e as seguintes expansões assintóticas,

$$r^{2n-3} \left( f - k - \frac{r^2}{\ell^2} \right) = -\mu + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2n-3}}\right), \quad (3.141a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{df}{dr} = \frac{2}{\ell^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2n-3}}\right), \quad (3.141b)$$

$$\frac{\ell^2}{r^2} (f - k) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2n-1}}\right), \quad (3.141c)$$

pode-se ver que as divergências em  $r \rightarrow \infty$  se cancelam, de maneira que a energia, que é a carga de Noether associada a  $\partial_t$ , será,

$$\mathcal{E} = Q(\xi) = \frac{(D-2)\text{Vol}(\Sigma_{D-2})\mu}{16\pi} =: M, \quad (3.142)$$

em que definimos a massa do buraco negro,  $M$ .

Considere, agora, a carga de Noether associada a uma transformação de calibre do grupo  $U(1)$ ,  $\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda$ ,  $\delta_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ . A variação na ação será dada por um termo de borda,

$$\delta_\lambda \mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1}x \sqrt{-h} \frac{n_\mu F^{\mu\nu} \partial_\nu \lambda}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}, \quad (3.143)$$

de onde pode-se reconhecer um termo correspondente à equação de movimento para  $A$ ,

$$\sqrt{-h} \frac{n_\mu F^{\mu\nu} \partial_\nu \lambda}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}} = \partial_i \left[ \frac{\sqrt{-h} \lambda N F^{ri}}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}} \right] + \frac{1}{4} \lambda N \sqrt{-h} \mathcal{E}^r, \quad (3.144)$$

e projetar a derivada total em  $\Sigma_\infty$ . Supondo que  $\lambda$  é constante na borda, a carga será:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_\infty} d^{D-1}y \sqrt{\sigma} u_i \frac{N F^{ri}}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}} = \frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{D-2} E}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}}, \quad (3.145)$$

para o buraco negro de Born-Infeld-AdS,

$$Q = \frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})q}{4\pi}. \quad (3.146)$$

Pode-se verificar que a contribuição do termo eletromagnético para a carga de Noether associada a um difeomorfismo se anula; de forma geral para o termo de superfície na definição da corrente de Noether,  $J^\mu$ , o termo extra da carga é,

$$Q_{BI}(\xi) = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_\infty} d^{2n-1}y \sqrt{\sigma} u_j \frac{4NF^{ri}(\xi^i A_i)}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{2b^2}}}. \quad (3.147)$$

Utilizando a Eq. (3.145) e a condição  $\phi(\infty) = -\Phi$ , segue que,

$$Q_{BI}(\partial_t) = -Q\Phi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{f}} = 0, \quad (3.148)$$

visto que  $(f)^{-1/2}$  se comporta assintoticamente como  $\mathcal{O}(r^{-1})$ .

### 3.3.4 Ação euclidiana

Como visto, a temperatura do buraco negro pode ser calculada a partir do período  $\beta$  do tempo complexo,

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_+}; \quad (3.149)$$

a partir da Eq. (3.113), obtemos,

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} \left[ (D-3)k + \frac{(D-1)r_+^2}{\ell^2} + \frac{4b^2 r_+^2}{D-2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^{2D-4}}} \right) \right]. \quad (3.150)$$

Como o buraco negro de Born-Infeld-AdS possui dois parâmetros, utilizaremos o *ensemble* grande canônico, em que as variáveis termodinâmicas naturais são a temperatura,  $T$ , e o potencial elétrico,  $\Phi$ . A energia livre de Gibbs,  $G(T, \Phi) = U - TS - Q\Phi$ , é obtida da ação euclidiana por,

$$G = -T \log Z = \frac{1}{\beta} \mathcal{S}^E, \quad (3.151)$$

de onde obtemos a entropia, a energia interna e a carga termodinâmica, dadas, respectivamente, por,

$$S = \beta \left( \frac{\partial \mathcal{S}^E}{\partial \beta} \right)_\Phi - \mathcal{S}^E, \quad (3.152a)$$

$$U = \left( \frac{\partial \mathcal{S}^E}{\partial \beta} \right)_\Phi - \frac{\Phi}{\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{S}^E}{\partial \Phi} \right)_\Phi, \quad (3.152b)$$

$$Q = -\frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{S}^E}{\partial \Phi} \right)_\beta. \quad (3.152c)$$

Para obter  $\mathcal{S}^E$ , calcularemos primeiro seu valor no volume,  $\mathcal{S}_{\text{bulk}}^E$ ; como a solução é estática e  $\Sigma_{D-2}$  é uma subvariedade maximalmente simétrica, a integração em  $\tau$  e  $\phi^m$  é

trivial, resultando,

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}}^E = \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{16\pi} \int_{r_+}^{\infty} dr r^{D-2} \left[ \frac{d^2 f}{dr^2} + 2(D-2) \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + (D-2)(D-3) \frac{(f-k)}{r^2} + 2\Lambda \right. \\ \left. - 4b^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^{2D-4}}}} \right) \right]. \quad (3.153)$$

Utilizando as equações (3.113) e (3.98b), podemos escrever a ação como uma derivada total,

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}}^E = \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{16\pi} \int_{r_+}^{\infty} dr \frac{d}{dr} \left( r^{D-2} \frac{df}{dr} + \frac{4r^{D-2} E \phi}{\sqrt{1 + \frac{E^2}{b^2}}} \right), \quad (3.154)$$

de forma que obtemos,

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}}^E = \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{16\pi} \left( r^{D-2} \frac{df}{dr} + \frac{4r^{D-2} E \phi}{\sqrt{1 + \frac{E^2}{b^2}}} \right)_{r_+}^{\infty}. \quad (3.155)$$

O termo de borda euclidiano, Eq. (3.121) será, para a solução do buraco negro,

$$\int_{\partial \mathcal{M}} d^{2n-1} x B_{2n-1}^E = 2n\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) \lim_{r \rightarrow \infty} r^{2n-2} \sqrt{f} \int_0^1 dt \delta_{[n_1 \dots n_{2n-2}]}^{[m_1 \dots m_{2n-2}]} K_{\tau}^{\tau} \\ \times \left( \frac{1}{2} \tilde{R}_{m_1 m_2}^{n_1 n_2} - (2n-1)t^2 K_{m_1}^{n_1} K_{m_2}^{n_2} \right) \left( \frac{1}{2} \tilde{R}_{m_3 m_4}^{n_3 n_4} - t^2 K_{m_3}^{n_3} K_{m_4}^{n_4} \right) \dots \left( \frac{1}{2} \tilde{R}_{m_{2n-3} m_{2n-2}}^{n_{2n-3} n_{2n-2}} - t^2 K_{m_{2n-3}}^{n_{2n-3}} K_{m_{2n-2}}^{n_{2n-2}} \right); \quad (3.156)$$

substituindo (3.104) e (3.105) e utilizando a seguinte integral,

$$\int_0^1 ds [k - (2n-1)t^2 f] (k - t^2 f)^{n-2} = (k-f)^{n-1}, \quad (3.157)$$

o termo de borda se torna,

$$\alpha_{2n-1} \int_{\partial \mathcal{M}} B_{2n-1}^E = - \frac{\beta \ell^{2n-2} \text{Vol}(\Sigma_{2n-2})}{16\pi} \frac{df}{dr} (f-k)^{n-1} \Big|_{r=\infty}. \quad (3.158)$$

A ação euclidiana total,  $\mathcal{S}^E = \mathcal{S}_{\text{bulk}}^E + \alpha_{2n-1} \int_{\partial \mathcal{M}} B_{2n-1}^E$ , se torna, portanto,

$$\mathcal{S}^E = \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{16\pi} \left[ \left( r^{2n-2} \frac{df}{dr} + \frac{4r^{2n-2} E \phi}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} \right)_{r_+}^{\infty} - \ell^{2n-2} \frac{df}{dr} (f-k)^{n-1} \Big|_{r=\infty} \right]; \quad (3.159)$$

reescrevendo a equação acima como,

$$\mathcal{S}^E = \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{16\pi} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r^{2n-2} - \ell^{2n-2} (f-k)^{n-1} \right] + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4r^{2n-2} E \phi}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} \right\} \\ - \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{16\pi} \left[ r_+^{2n-2} \frac{df}{dr} \Big|_{r_+} + \frac{4r_+^{2n-2} E(r_+) \phi(r_+)}{\sqrt{1 - \frac{E(r_+)^2}{b^2}}} \right], \quad (3.160)$$

podemos identificar o primeiro termo, usando a Eq. (3.140), como  $\beta M$ ; com a Eq. (3.145), vemos que o segundo termo é  $-\beta Q\Phi$ . Como o último termo é finito, vemos que os Kontratermos garantem a regularização da ação euclidiana para qualquer buraco negro. Ademais, como  $\phi(r_+) = 0$  e  $\beta \frac{f'(r_+)}{4\pi} = 1$ , o último termo se reduz a,

$$\frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})r_+^{2n-2}}{4} = \frac{A}{4} = S, \quad (3.161)$$

que é a entropia do buraco negro. A ação euclidiana obedece, portanto, a relação de Smarr,

$$\mathcal{S}^E = \beta\mathcal{E} - \beta Q\Phi - S. \quad (3.162)$$

Utilizando a Eq. (3.152), podemos calcular a energia interna,  $U$ , e a carga termodinâmica,  $Q$ :

$$U = \mathcal{E} = M, \quad \text{e} \quad Q = Q; \quad (3.163)$$

além disso, mais uma vez obtemos que a entropia é,

$$S = \frac{A}{4}. \quad (3.164)$$

### 3.3.5 Propriedades termodinâmicas

Para estudar as propriedades termodinâmicas vamos nos restringir, por simplicidade, ao caso de um buraco negro com topologia esférica, *i.e.*,  $k = 1$ , em  $D = 4$ . As variáveis termodinâmicas se tornam, portanto,

$$Q = q, \quad \mathcal{E} = M = \frac{\mu}{2} \quad \text{e} \quad S = \pi r_+^2. \quad (3.165)$$

Em particular, a temperatura,  $T$ , o potencial,  $\Phi$ , e a massa,  $M$ , se tornam, em função do raio do horizonte de eventos e da carga,

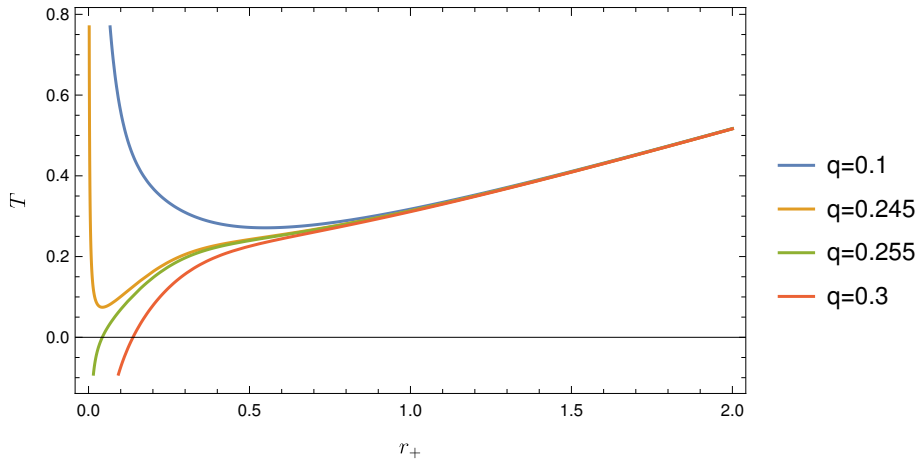
$$T = \frac{1}{4\pi r_+} \left[ 1 + \frac{3r_+^2}{\ell^2} + 2b^2 r_+^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^4}} \right) \right], \quad (3.166a)$$

$$\Phi = \frac{q}{r_+} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4} \right), \quad (3.166b)$$

$$2M = \mu = r_+ + \frac{r_+^3}{\ell^2} + \frac{2}{3} b^2 r_+^3 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^4}} \right) + \frac{4q\Phi}{3}. \quad (3.166c)$$

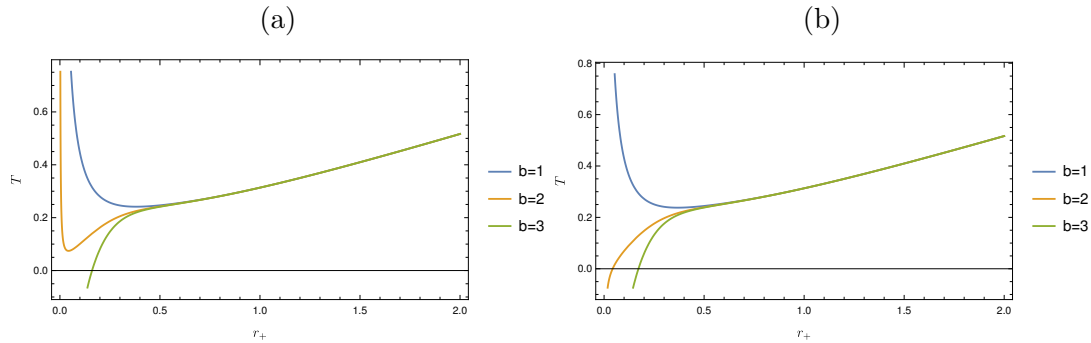
A Figura 6 mostra a temperatura em função do raio do horizonte de eventos para diferentes valores da carga,  $q$ , com  $b = 2$  e  $\ell = 1$ . É possível notar que, conforme o valor de  $q$  aumenta, a temperatura deixa de possuir um mínimo local e passa a se tornar estritamente crescente em um valor  $q \in (0,245; 0,255)$ ; nesse mesmo valor, a temperatura deixa de crescer quando  $r_+ \rightarrow 0$  e passa a decrescer, atingindo valores negativos, implicando que passa a existir um valor mínimo de  $r_+$  para que o buraco negro possa existir. Assim como

Figura 6 – Gráfico da temperatura,  $T$ , em função do raio do horizonte de eventos,  $r_+$ , para o buraco negro Born-Infeld-AdS; a curvas azul, amarela, verde e vermelha são para, respectivamente,  $q = 0,1, 0,245, 0,255$  e  $0,3$ , com  $b = 2$  e  $\ell = 1$ .



Fonte: Autoria Própria.

Figura 7 – Gráfico da temperatura,  $T$ , em função do raio do horizonte de eventos,  $r_+$ , para o buraco negro Born-Infeld-AdS com  $b = 1, 2, 3$ ; (a) gráfico com  $q$  fixo em  $0,245$ ; (b) gráfico para  $q$  fixo em  $0,255$ . Ambos os gráficos foram feitos com  $\ell = 1$ .



Fonte: Autoria própria.

no caso do buraco negro de Schwarzschild-AdS, existem dois buracos negros possíveis para uma dada temperatura, um menor, cuja temperatura diminui com o aumento de  $r_+$ , e um maior, cuja temperatura aumenta com  $r_+$ ; a partir de um determinado valor de  $q$ , apenas um buraco negro passa a ser possível para uma dada temperatura. Na Figura 7, vemos os gráficos de  $T(r_+)$  para  $q$  fixo ( $q = 0,245$  na Figura 7a e  $q = 0,255$  na Figura 7b); é possível notar que o comportamento de  $b$  com  $q$  fixo é basicamente o mesmo de  $q$  com  $b$  fixo.

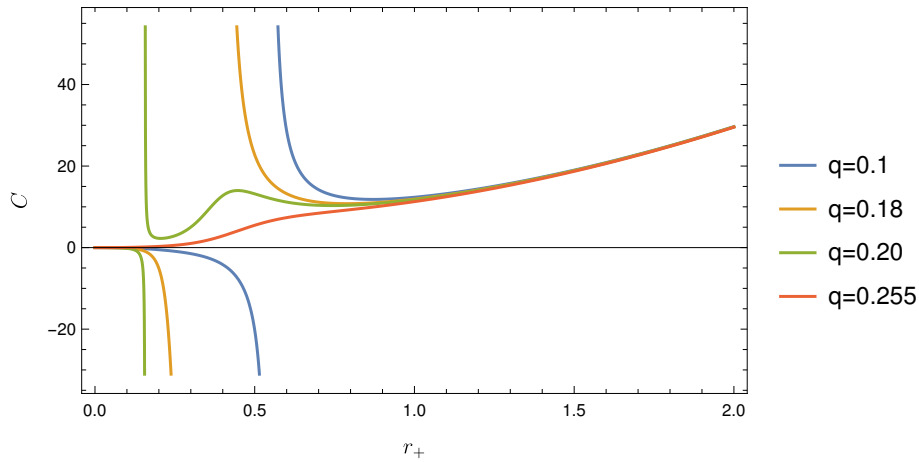
O calor específico pode ser obtido a partir de sua definição,

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial r_+} \frac{\partial r_+}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial r_+} \left( \frac{\partial T}{\partial r_+} \right)^{-1}. \quad (3.167)$$

O gráfico de  $C(r_+)$  está representado na Figura 8 para diferentes valores de  $q$  com  $b = 2$ .



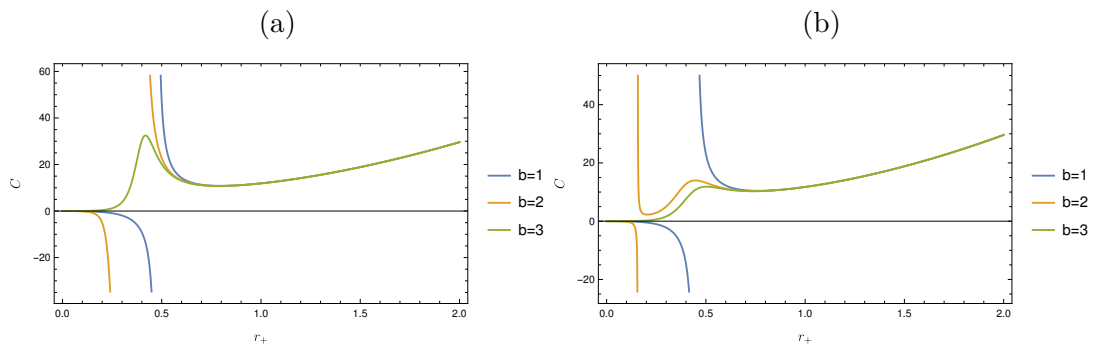
Figura 8 – Gráfico do calor específico,  $C$ , em função de  $r_+$  para o buraco negro Born-Infeld-ADS com  $\ell = 1$  para diferentes valores de  $q$  com  $b = 2$ ; a curvas azul, amarela, verde e vermelha são para, respectivamente,  $q = 0,1, 0,18, 0,2$  e  $0,255$ .



Fonte: Autoria Própria.

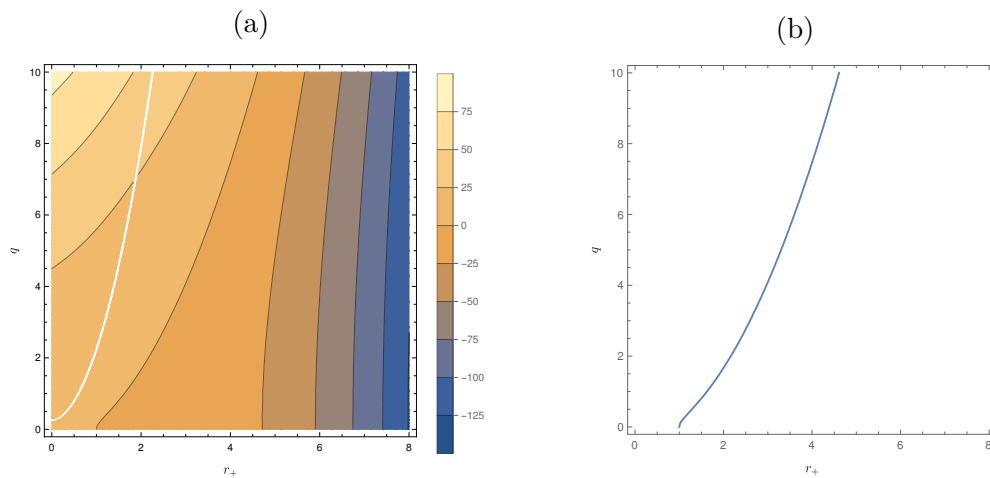
O calor específico possui divergências em  $r_+ = r_c$  para valores de  $q$  menores que  $\approx 0,245$ , indicando a existência de uma transição de fase de segunda ordem; para  $r_+ < r_c$ , o calor específico é negativo, de modo que o buraco negro é termodinamicamente instável; para  $r_+ > r_c$ , o calor específico é positivo e, conseqüentemente, o buraco negro é estável. Conforme a carga aumenta, o valor de  $r_+$  em que existe a descontinuidade também aumenta, até que, para  $q$  maior que aproximadamente  $0,245$ , o calor específico se torna contínuo e sempre positivo, indicando que o buraco negro é estável termodinamicamente. Na Figura 9 encontram-se os gráficos de  $C(r_+)$  para  $q$  fixo e diferentes valores de  $b$ ; na Figura 9a  $q = 0,18$ , enquanto na Figura 9b,  $q = 0,2$ . Novamente, vemos que para  $q$  fixo,  $b$  diminui o valor de  $r_+$  em que existe a descontinuidade até o calor específico se tornar contínuo, da mesma forma que  $q$  quando  $b$  é fixado.

Figura 9 – Gráficos de  $C(r_+)$  para diferentes valores de  $b$ ; na figura (a)  $q = 0,18$  e na figura (b),  $q = 0,2$ . Em ambos os gráficos,  $\ell = 1$ .



Fonte: Autoria própria.

Figura 10 – Gráficos para a energia livre  $G$  para  $b = 2$  e  $\ell = 1$ ; (a) curvas de nível de  $G$  em função de  $r_+$  e  $q$ ; (b) curva indicando os valores de  $r_+$  e  $q$  tais que  $G = 0$ .



Fonte: Autoria própria.

Por fim, na Figura 10, encontra-se o gráfico da energia livre de Gibbs,  $G(r_+, q)$ , para  $b = 2$  e  $\ell = 1$ . Na Figura 10a, é possível ver as curvas de nível da energia livre; a Figura 10b mostra a curva  $G(r_+, q) = 0$ , que define a transição de Hawking-Page, em que o estado mais favorável termodinamicamente deixa de ser radiação pura e passa a consistir no buraco negro. Pode-se notar que o valor de  $r_+$  em que a transição de Hawking-Page ocorre se torna maior conforme a carga do buraco negro,  $q$ , aumenta, *i.e.*, quanto maior a carga do buraco negro, maior deve ser o seu tamanho para que ele seja mais favorável termodinamicamente do que a radiação.

## 4 Conclusão

Neste trabalho, estudamos a termodinâmica de buracos negros sob o ponto de vista do formalismo euclidiano utilizando uma aproximação semiclássica para a função de partição. Foi possível observar que, quando o buraco negro encontra-se em um espaço assintoticamente AdS, configurações de equilíbrio entre um buraco negro e radiação térmica podem ser obtidas devido ao fato do espaço AdS se comportar como uma caixa, o que possibilita a existência de estados termodinamicamente estáveis para o buraco negro, ao contrário do caso do espaço de Minkowski. Em especial, analisando a energia livre, pode-se notar que existe uma transição de fase em que o estado mais favorável termodinamicamente deixa de ser a radiação térmica e se torna o buraco negro; essa transição de fase é conhecida como transição de Hawking-Page. Esses fenômenos estão presente tanto no buraco negro Schwarzschild-AdS como no Born-Infeld-AdS (que engloba o caso de um buraco negro Reissner-Nordström-AdS). No caso de Schwarzschild-AdS, o único parâmetro que controla a estrutura de fase é a massa do buraco negro. Em contrapartida, o caso de Born-Infeld-AdS possui como parâmetros para as fases a carga elétrica, a massa do buraco negro e o parâmetro de Born-Infeld, o que fornece a este buraco negro uma estrutura muito mais rica do ponto de vista termodinâmico. Essa complexidade também se reflete na forma das equações termodinâmicas, impedindo a realização de uma análise mais detalhada utilizando métodos analíticos, em contraste ao caso de Schwarzschild-AdS. Ademais, sistemas termodinâmicos contendo um buraco negro em um espaço-tempo com constante cosmológica não nula são análogos a um fluido de van der Waals, sendo possível associar características similares à pressão e volume e entendê-los como espécies de máquinas térmicas, fatos que vem dando origem a uma nova sub-área, a química de buracos negros ([KUBIZNAK; MANN; TEO, 2017](#)).

Também aplicamos o método dos Kontratermos no processo de regularização da ação e das quantidades conservadas. Assim como a série usual de kontratermos utilizada para regularização covariante da ação, os Kontratermos permitem observar alguns resultados que não são possíveis utilizando o método de subtração da ação de um espaço-tempo tomado como parâmetro (como feito na análise do caso Schwarzschild-AdS), como a existência de uma energia de vácuo não nula para um espaço AdS de dimensão ímpar ([MORA et al., 2004a](#); [EMPARAN; JOHNSON; MYERS, 1999](#)). Também é possível utilizar os Kontratermos no contexto da correspondência AdS/CFT para a reconstrução holográfica do espaço AdS, cuja diferença em relação aos kontratermos usuais é que, ao invés de utilizar como informação inicial uma dada métrica de borda para determinar um problema de Dirichlet, utiliza-se um dado valor inicial da curvatura extrínseca da borda. Os Kontratermos também podem ser considerados universais no sentido de que também regularizam a ação para a

gravitação de Einstein-Gauss-Bonnet e para a gravitação de Lovelock (KOFINAS; OLEA, 2008), além de serem definidos para dimensões arbitrárias, ao contrário dos contratermos usuais.

No contexto da correspondência AdS/CFT, a termodinâmica de buracos negros encontra aplicações no estudo de sistemas fortemente acoplados. Em particular, é possível utilizar as propriedades termodinâmicas de buracos negros para estudar sistemas de matéria condensada (a chamada AdS/CMT), como a dinâmica e as propriedades de transporte na vizinhança de pontos quânticos críticos em sistemas descritos por teorias de campo relativísticas, e sistemas bidimensionais com transições que envolvem quebra de simetria na presença de excitações eletrônicas com *gap* nulo, como no grafeno (SACHDEV, 2011), e supercondutores holográficos (HARTNOLL; HERZOG; HOROWITZ, 2008). Ademais, as transições de fase em buracos negros são qualitativamente similares à transição de Kosterlitz-Thouless mediada por defeitos em sistemas de matéria condensada e à transição de Thouless em sistemas em teoria de cordas (STEPHENS; HU, 2001).

Por fim, um dos grandes desafios para as teorias quânticas que descrevem a gravitação tem sido a descrição da entropia de buracos negros do ponto de vista de física estatística. Recentemente, três estudos conseguiram, utilizando a correspondência AdS/CFT, realizar a contagem de microestados e construir a função de partição para buracos negros com carga e momento angular no espaço AdS com 5 dimensões a partir dos graus de liberdade microscópicos de uma teoria dual semelhante à cromodinâmica quântica (BENINI; MILAN, 2020; CHOI et al., 2020; CABO-BIZET et al., 2019).

Em conclusão, podemos perceber que a gravitação é uma área da física que não se restringe apenas ao contexto cosmológico; de fato, ela encontra aplicações em diversas áreas distintas da física, como teoria quântica de campos, física da matéria condensada, mecânica de fluidos, física de plasmas, entre outras. O presente trabalho mostra uma dessas aplicações, e abre a possibilidade da caracterização de buracos negros que possam vir a ser detectados no futuro graças ao advento da astronomia de multimensageiros (como ondas gravitacionais e astronomia com ondas eletromagnéticas).

## Referências

- ALLEN, B.; FOLACCI, A.; GIBBONS, G. Anti-de Sitter space at finite temperature. *Physics Letters B*, v. 189, n. 3, p. 304 – 310, 1987. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387914377>>. Citado na página 36.
- ANASTASIOU, G. et al. Counterterms, Kounterterms, and the variational problem in AdS gravity. mar. 2020. Preprint. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2003.06425>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- AROS, R. et al. Conserved charges for even dimensional asymptotically AdS gravity theories. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 62, p. 044002, Jul 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.044002>>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 48.
- AROS, R. et al. Conserved Charges for Gravity with Locally Anti-de Sitter Asymptotics. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 84, p. 1647–1650, Feb 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.1647>>. Citado na página 48.
- BALASUBRAMANIAN, V.; KRAUS, P. A Stress Tensor for Anti-de Sitter Gravity. *Communications in Mathematical Physics*, v. 208, p. 413–428, dez. 1999. Citado na página 42.
- BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics volume*, v. 31, p. 161–170, jun. 1973. Citado na página 14.
- BEKENSTEIN, J. D. Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 7, p. 2333–2346, Apr 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>>. Citado na página 13.
- BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 9, p. 3292–3300, Jun 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3292>>. Citado na página 14.
- BENINI, F.; MILAN, P. Black Holes in 4D  $\mathcal{N} = 4$  Super-Yang-Mills Field Theory. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 10, p. 021037, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.10.021037>>. Citado na página 66.
- BIRRELL, N.; DAVIES, P. *Quantum Fields in Curved Space*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1984. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521278584. Citado na página 14.
- BLAU, M. *Lecture Notes on General Relativity*. 2020. Disponível na internet. Disponível em: <<http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>>. Citado na página 24.
- BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 144, p. 425–451, mar. 1934. Citado na página 51.

- BROWN, J. D. et al. Thermodynamic ensembles and gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 7, n. 8, p. 1433–1444, aug 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F7%2F8%2F020>>. Citado na página 37.
- CABO-BIZET, A. et al. Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy of supersymmetric AdS<sub>5</sub> black holes. *Journal of High Energy Physics*, v. 2019, p. 62, out. 2019. Citado na página 66.
- CAI, R.-G.; PANG, D.-W.; WANG, A. Born-Infeld black holes in (A)dS spaces. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 124034, Dec 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.124034>>. Citado na página 52.
- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. ISBN 9780805387322. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.
- CARTER, B. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 26, p. 331–333, Feb 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.331>>. Citado na página 13.
- CHOI, S. et al. Large AdS black holes from QFT. 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1810.12067>>. Citado na página 66.
- CHRISTODOULOU, D. Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 25, p. 1596–1597, Nov 1970. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.25.1596>>. Citado na página 13.
- CHRISTODOULOU, D.; RUFFINI, R. Reversible Transformations of a Charged Black Hole. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 4, p. 3552–3555, Dec 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.3552>>. Citado na página 13.
- DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. 2<sup>a</sup> edição. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2006. (World Scientific Lecture Notes In Physics). ISBN 9789814477680. Citado na página 23.
- DAS, S.; MANN, R. B. Conserved quantities in Kerr-anti-de Sitter spacetimes in various dimensions. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2000, n. 08, p. 033–033, aug 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2000%2F08%2F033>>. Citado na página 42.
- DAVIES, P. C. W. Thermodynamics of black holes. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 41, n. 8, p. 1313–1355, aug 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0034-4885%2F41%2F8%2F004>>. Citado na página 27.
- DEGHANI, M. H.; SEDEHI, H. R. R. Thermodynamics of rotating black branes in  $(n + 1)$ -dimensional Einstein-Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 124018, Dec 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.124018>>. Citado na página 54.
- DEY, T. K. Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant. *Physics Letters B*, v. 595, n. 1, p. 484 – 490, 2004. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269304009104>>. Citado na página 52.

DYER, E.; HINTERBICHLER, K. Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, p. 024028, Jan 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.024028>>. Citado na página 21.

EGUCHI, T.; GILKEY, P. B.; HANSON, A. J. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics Reports*, v. 66, n. 6, p. 213 – 393, 1980. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157380901301>>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 47.

ELLIS, G. F. R.; SCHMIDT, B. G. Classification of singular space-times. *Gen. Relat. Gravit.*, v. 10, p. 989–997, ago. 1979. Citado na página 34.

EMPARAN, R.; JOHNSON, C. V.; MYERS, R. C. Surface terms as counterterms in the AdS-CFT correspondence. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 60, p. 104001, Oct 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.104001>>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 65.

FERNANDO, S. Thermodynamics of Born-Infeld–anti-de Sitter black holes in the grand canonical ensemble. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 104032, Nov 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.104032>>. Citado na página 52.

FERNANDO, S.; KRUG, D. Charged Black Hole Solutions in Einstein-Born-Infeld Gravity with a Cosmological Constant. *General Relativity and Gravitation*, v. 35, p. 129–137, 2003. Citado na página 52.

FEYNMAN, R. P. *Statistical Mechanics: A Set of Lectures*. [S.l.]: W. A. Benjamin, 1972. ISBN 0 8053 2508 5. Citado na página 22.

FRADKIN, E.; TSEYTLIN, A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Physics Letters B*, v. 163, n. 1, p. 123 – 130, 1985. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269385902059>>. Citado na página 51.

FROLOV, V. P.; NOVIKOV, I. D. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. [S.l.]: Springer, 1998. (Fundamental Theories of Physics). ISBN 978-94-011-5139-9. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 23 e 34.

GIBBONS, G. W. Aspects of born-infeld theory and string/M-theory. *AIP Conference Proceedings*, v. 589, p. 324, 2001. Citado na página 51.

GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 15, p. 2752–2756, May 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2752>>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 21, 22 e 23.

GIBBONS, G. W.; PERRY, M. J. Black holes and thermal Green functions. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 358, p. 467–494, jan. 1978. Citado na página 27.

GROSS, D. J.; PERRY, M. J.; YAFFE, L. G. Instability of flat space at finite temperature. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 25, p. 330–355, Jan 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.25.330>>. Citado na página 41.

- HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Path-integral derivation of black-hole radiance. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 13, p. 2188–2203, Apr 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.2188>>. Citado na página 15.
- HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Building a Holographic Superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, p. 031601, Jul 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.031601>>. Citado na página 66.
- HAWKING, S.; PAGE, D. Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space. *Commun. Math. Phys.*, v. 87, n. 4, p. 577–588, dez. 1983. Citado 4 vezes nas páginas 27, 36, 38 e 41.
- HAWKING, S. W. Gravitational Radiation from Colliding Black Holes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 26, p. 1344–1346, May 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.1344>>. Citado na página 13.
- HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, v. 25, p. 152–166, jun. 1972. Citado na página 13.
- HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, v. 248, p. 30–31, mar. 1974. Citado na página 14.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, v. 43, p. 199–220, ago. 1975. Citado na página 14.
- HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 13, p. 191–197, Jan 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.191>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- HAWKING, S. W. The Quantum Mechanics of Black Holes. *Scientific American*, Scientific American, a division of Nature America, Inc., v. 236, n. 1, p. 34–42, 1977. ISSN 00368733, 19467087. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/24953849>>. Citado na página 14.
- HAWKING, S. W. Quantum gravity and path integrals. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 18, p. 1747–1753, Sep 1978. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.1747>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 24.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Ed.). *General Relativity: an Einstein Centenary Survey*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1979. ISBN 0 521 22285 0. Citado 4 vezes nas páginas 21, 23, 24 e 38.
- ISRAEL, W. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 164, p. 1776–1779, Dec 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.164.1776>>. Citado na página 13.
- ISRAEL, W. Event horizons in static electrovac space-times. *Communications in Mathematical Physics*, v. 8, p. 245–260, set. 1968. Citado na página 13.



IYER, V.; WALD, R. M. Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 50, p. 846–864, Jul 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.846>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

KOFINAS, G.; OLEA, R. Universal Kounterterms in Lovelock AdS gravity. *Fortschritte der Physik*, v. 56, n. 7-9, p. 957–963, 2008. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.200810565>>. Citado na página 66.

KOMAR, A. Covariant Conservation Laws in General Relativity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 113, p. 934–936, Feb 1959. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.113.934>>. Citado na página 41.

KUBIZNAK, D.; MANN, R. B.; TEO, M. Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 34, n. 6, p. 063001, mar 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1361-6382%2Faa5c69>>. Citado na página 65.

MALDACENA, J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, v. 2, p. 231 – 252, jan. 1998. Citado na página 16.

MANN, R. B. Misner string entropy. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 60, p. 104047, Oct 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.104047>>. Citado na página 42.

MISKOVIC, O.; OLEA, R. Thermodynamics of Einstein-Born-Infeld black holes with negative cosmological constant. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 124048, Jun 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.124048>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 52.

MISNER, C.; WHEELER, J. A.; THORNE, K. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. (Gravitation). ISBN 9780716703440. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.

MORA, P. et al. Vacuum Energy in Odd-Dimensional AdS Gravity. 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/0412046>>. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 65.

MORA, P. et al. Finite Action For Chern-Simons Ads Gravity. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2004, n. 06, p. 036–036, jun 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2004%2F06%2F036>>. Citado na página 50.

MORA, P. et al. Transgression forms and extensions of Chern-Simons gauge theories. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2006, n. 02, p. 067–067, feb 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2006%2F02%2F067>>. Citado na página 51.

MYERS, R. C. Higher-derivative gravity, surface terms, and string theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 36, p. 392–396, Jul 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.36.392>>. Citado na página 44.

- OLEA, R. Mass, angular momentum and thermodynamics in four-dimensional Kerr-AdS black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2005, n. 06, p. 023–023, jun 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2005%2F06%2F023>>. Citado 3 vezes nas páginas 42, 47 e 48.
- OLEA, R. Regularization of odd-dimensional AdS gravity: Kounterterms. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media, v. 2007, n. 04, p. 073–073, apr 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2007%2F04%2F073>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 31, 42, 49 e 51.
- PAPADIMITRIOU, I.; SKENDERIS, K. Thermodynamics of asymptotically locally AdS spacetimes. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2005, n. 08, p. 004–004, aug 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2005%2F08%2F004>>. Citado na página 42.
- PAPANTONOPOULOS, E. (Ed.). *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The AdS/CFT Correspondence*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. (Lecture Notes in Physics). ISBN 978-3-642-04864-7. Citado na página 33.
- PENROSE, R. Gravitational Collapse: The Role of General Relativity. *General Relativity and Gravitation*, v. 34, p. 1141–1165, jul. 2002. Publicado originalmente em 1969. Citado na página 13.
- PENROSE, R.; FLOYD, R. M. Extraction of Rotational Energy from a Black Hole. *Nature Physical Science*, v. 229, p. 177–179, fev. 1971. Citado na página 13.
- PESKIN, M.; SCHROEDER, D. *An Introduction To Quantum Field Theory*. [S.l.]: Avalon Publishing, 1995. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813345437. Citado na página 21.
- PLANTZ, N. W. M. *Black Hole Phase Transitions and Magnetic AdS Black Branes in N=2 Supergravity*. Dissertação (Mestrado) — Institute for Theoretical Physics - Universiteit Utrecht, out. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- RIBEIRO, E. V. S.; CUADROS-MELGAR, B.; CARDOSO, F. R. Geração de soluções exatas em Relatividade Geral através do método de Kerr-Schild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 41, 00 2019. ISSN 1806-1117. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172019000400408&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172019000400408&nrm=iso)>. Citado na página 17.
- SACHDEV, S. Condensed Matter and AdS/CFT. In: \_\_\_\_\_. *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The AdS/CFT Correspondence*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 273–311. ISBN 978-3-642-04864-7. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-642-04864-7\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-04864-7_9)>. Citado na página 66.
- SCHWINGER, J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 82, p. 664–679, Jun 1951. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>>. Citado na página 14.
- SOCOLOVSKY, M. *Schwarzschild Black Hole in Anti-De Sitter Space*. 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1711.02744>>. Citado na página 33.

- STEPHENS, G. J.; HU, B. L. Notes on Black Hole Phase Transitions. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 10, p. 2183–2200, dez. 2001. Citado na página 66.
- TOLMAN, R. C.; EHRENFEST, P. Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 36, p. 1791–1798, Dec 1930. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.1791>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 37.
- TSEYTLIN, A. Vector field effective action in the open superstring theory. *Nuclear Physics B*, v. 276, n. 2, p. 391 – 428, 1986. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386903032>>. Citado na página 51.
- TSEYTLIN, A. A. Born-Infeld action, supersymmetry and string theory. 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/9908105>>. Citado na página 51.
- UNRUH, W. G. Origin of the particles in black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 15, p. 365–369, Jan 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.365>>. Citado na página 14.
- WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. ISBN 0 226 87033 2. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 31.
- WALD, R. M. Black hole entropy is the Noether charge. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 48, p. R3427–R3431, Oct 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.48.R3427>>. Citado na página 29.
- WITTEN, E. Anti-de Sitter space and holography. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, v. 2, p. 253 – 291, jan. 1998. Citado na página 16.
- YORK, J. W. Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 28, p. 1082–1085, Apr 1972. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.1082>>. Citado na página 21.
- ZANELLI, J. *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities*. 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/0502193v4>>. Citado na página 42.
- ZHAO, P. Black Holes in Anti-de Sitter Spacetime. In: . [S.l.: s.n.], 2009. Citado 3 vezes nas páginas 24, 27 e 33.