

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

BRUNO PEIXOTO PONQUIO

**Superradiância em espaços-tempos
Reissner-Nordström-de Sitter**

Lorena – SP

2020

BRUNO PEIXOTO PONQUIO

**Superradiância em espaços-tempos
Reissner-Nordström-de Sitter**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo como requisito parcial para conclusão da Graduação do curso de Engenharia Física.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Bertha Cuadros-Melgar.

Lorena – SP

Novembro de 2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Automatizado
da Escola de Engenharia de Lorena,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ponquio, Bruno Peixoto
Superradiância em espaços-tempos Reisser-Norström-de
Sitter / Bruno Peixoto Ponquio; orientadora Bertha
Cuadros-Melgar. - Lorena, 2020.
48 p.

Monografia apresentada como requisito parcial
para a conclusão de Graduação do Curso de Engenharia
Física - Escola de Engenharia de Lorena da
Universidade de São Paulo. 2020

1. Superradiância. 2. Buraco negro. 3. Reissner
nordström. 4. Amplificação. 5. Klein-gordon. I. Título.
II. Cuadros-Melgar, Bertha, orient.

Agradecimentos

Como nunca fui bom em me expressar, prefiro ser direto com esses agradecimentos, sem uma introdução extensa.

Gostaria de agradecer meus pais, Vanderlei e Jaqueline, vocês sempre foram e serão o pilar de tudo, foram vocês que me geraram, criaram e me incentivaram a estudar, mesmo que apenas na adolescência se tornou uma das minhas coisas favoritas. O amor de vocês por mim é algo inigualável e inesquecível e talvez eu nunca me acostume a viver sem. Ao meu pai sempre serei grato por me proporcionar muito amor e carinho, meu pai sempre foi um escudo contra os problemas de casa, fazendo o papel de psicólogo, conselheiro e pai ao mesmo tempo. Infelizmente o senhor partiu em 2017, trabalhando para torna meu futuro possível até o último suspiro. O senhor não poderá ver um de seus sonhos serem realizados; saiba que eu te amarei para toda a eternidade e onde quer que o senhor esteja sei que estará me observando. Pela minha mãe Jaqueline serei sempre grato por proporcionar a melhor estrutura possível, fazendo valer cada gota de suor de seu extremo esforço. Agradeço também por sempre estar ao meu lado, sempre auxiliando nas minhas decisões e carregando o enorme fardo de ser mãe e pai ao mesmo tempo. Saiba que mesmo que a gente brigue as vezes meu amor por você é infinito.

Gostaria de agradecer também meus irmãos, Felipe e Beatriz, assim como meu irmão de coração, o finado Buddy. O Felipe sempre esteve comigo, desde o útero até o presente momento em que escrevo este trabalho, em muitos momentos tivemos nossas diferenças porém ele sempre esteve presente me apoiando e após a morte de meu pai teve que arcar com algumas obrigações em casa. A Beatriz por me mostrar um lado mais humano das situações que auxiliam num melhor entendimento de como causas sociais são importantes para o mundo. Por fim, meu irmão de consideração, o beaglezinho Buddy, esse cachorrinho foi a alma mais pura que eu já conheci, era o melhor amigo de meu pai. Buddy me mostrou como o verdadeiro amor e lealdade podem ser representados em carne e osso, desde o dia em que chegou à nossa casa até o dia de nossa despedida, após 11 anos de amor e carinho. Sou eternamente grato aos três por sempre proporcionarem muito amor e afeto por mim, acho que minha vida seria vazia sem a presença de vocês três.

Quero agradecer também à Silvana, chamada carinhosamente por mim e meus irmãos de "Mãe Silvana". A Mãe Silvana está em nossa família desde que me entendo por gente, é a mulher que esteve tomando conta de mim e meus irmãos pelos últimos 20 anos e auxiliou os meus pais em nossa criação. Sou muito grato por todos os anos que você passou conosco, sempre cuidando de nós três durante o período em que meus pais trabalhavam e mesmo não compartilhando laços de sangue a considero como minha mãe.

Por fim, gostaria de agradecer a minha orientadora Bertha. A "professora", como gosto de chamar, é o maior exemplo que eu tenho de um excelente profissional acadêmico. Desde antes da minha mudança para o curso de Engenharia Física me auxiliou muito no amadurecimento acadêmico e pessoal sendo minha tutora, amiga e "mãe". Tenho uma dívida enorme com você professora, que talvez nunca consiga pagar. Acho que sem o seu auxílio já teria desistido de permanecer em Lorena, você é e sempre será uma das figuras mais marcantes na minha vida profissional e pessoal.

*”[...]Te adianto não tem
Coragem que vem
Da força de outro alguém
Que surge do além
No fim do que te mantém
Tá tudo aí dentro
E pro tempo se doe
tempo dê pra você [...]”*
Scalene, *+gnetite* (2018).

Resumo

PONQUIO, B. P. **Superradiância em espaços-tempos Reissner-Norström-de Sitter**. 2020. 48 p. Monografia (Trabalho de Graduação de Engenharia Física) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2020.

O estudo de perturbação em buracos negros é uma área de grande interesse da astrofísica. Buracos negros perturbados podem apresentar os mais distintos comportamentos, como modos quasinormais, instabilidades e até superradiância. Neste trabalho exploramos o último exemplo, a superradiância para buracos negros, em especial para a solução de Reissner-Nordström, que surge a partir de perturbações escalares com carga elétrica. Abordamos desde o surgimento de sua teoria, passando por sua extensão para buracos negros, assim como os potenciais e instabilidades associadas à perturbação que fornecem as zonas de amplificação de radiação. Por fim observamos a existência do fenômeno da superradiância para o espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter em (3+1)-dimensões, utilizando o modelo com o número multipolar $l = 0$ e variando a carga q da radiação escalar carregada incidente.

Palavras-chave: Superradiância. Reissner-Nordström. Buracos Negros.

Abstract

PONQUIO, B. P. **Superradiance in Reissner-Nordström-de Sitter spacetimes.** 2020. 48 p. Monograph (Undergraduate Thesis in Engineering Physics) – Engineering School of Lorena, University of São Paulo, Lorena, 2020.

The study of perturbation in black holes is an area of great interest for astrophysics. Perturbed black holes can show very distinct behaviors like quasinormal modes, instabilities, and even superradiance. In this work we explored the latter example, the superradiance for black holes, in particular, for the Reissner-Nordström solution generated by a charged scalar perturbation. Our approach begins with the rise of superradiance theory passing through its application to black hole's theory as well as the associated instabilities and potentials where amplification zones emerge. Finally, we observed the existence of superradiance phenomena for Reissner-Nordström-de Sitter spacetime in (3+1)-dimensions by using a model with multipolar number $l = 0$ and varying the charge associated to the incident charged scalar radiation.

Palavras-chave: Superradiance. Reissner-Nordström. Black Holes.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO TEÓRICA	17
2.1	Conceitos básicos de Relatividade Geral	17
2.1.1	Métrica	17
2.1.2	Símbolos de Christoffel	17
2.1.3	Derivada Covariante	18
2.1.4	Transporte Paralelo e Curvatura	19
2.1.5	Identidades de Bianchi	20
2.1.6	Tensor de Ricci e Escalar de Ricci	20
2.1.7	Tensor de Einstein	21
2.2	Equação de Klein-Gordon	21
2.3	Superradiância	22
2.3.1	Paradoxo de Klein	23
2.3.2	Dispersão Bosônica	24
2.3.3	Dispersão Fermiônica	26
2.3.4	Superradiância e Criação de pares	27
3	RESULTADOS	31
3.1	Extensão para teoria de buracos negros	31
3.1.1	Relação de Ginzburg-Frank	32
3.1.2	Superradiância Rotacional	33
3.1.3	Superradiância em Buracos Negros	34
3.2	Solução RN-dS (3+1)-Dimensões	37
3.2.1	Equação de Perturbação	38
4	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 Introdução

A área de estudos de perturbações em buracos negros é de grande interesse para a astrofísica. Entender como os buracos negros respondem a cada tipo de perturbação é um fenômeno que intriga os cientistas há décadas e pode apresentar alguns resultados surpreendentes.

Buracos negros são solução das equações de Einstein que surgem na relatividade geral, que é uma teoria de gravitação desenvolvida pelo alemão Albert Einstein entre 1907 e 1915. Dentro dessa teoria foram postuladas as famosas equações de campo de Einstein, as quais ditam a forma como a matéria deforma o espaço-tempo, relacionando o famoso tensor de Einstein (curvatura do espaço-tempo) com o tensor energia-momento (contendo componentes de matéria). Essas equações de campo de Einstein possuem algumas soluções peculiares, conhecidas como buracos negros. A primeira solução encontrada foi desenvolvida por Karl Schwarzschild em 1915, considerando uma solução de simetria esférica no vácuo. Um fato curioso sobre a história dessa primeira solução das equações de Einstein desenvolvida por Schwarzschild, é que ela foi concebida na frente alemã durante a Primeira Guerra Mundial, na qual Schwarzschild decidiu lutar por ser um entusiasta da guerra (SAA, 2016). Em seu tempo livre na frente de batalha contra o exército soviético, Schwarzschild obteve uma solução, considerando a simetria esférica de uma massa pontual e um tensor de energia-momento nulo, a qual seria o embrião da teoria de buracos negros. Este trabalho foi publicado em 1916, o mesmo ano em que se deu a morte de Karl Schwarzschild por conta de uma doença autoimune, pênfigo, contraída na frente durante aquele período na primeira guerra. A primeira solução carregada seria desenvolvida por Hans Reissner em 1916 e Gunnar Nordström em 1918, essa solução ficou conhecida como solução de Reissner-Nordström (RN) considerando como fonte do tensor energia-momento um campo elétrico de simetria esférica (RIBEIRO; CUADROS-MELGAR; CARDOSO, 2019). Uma solução contendo rotação só foi desenvolvida por Roy Kerr, um matemático neozelandês que pôde desenvolver essa solução ao utilizar um formalismo de tetrades nulas, similar ao formalismo de Newman-Penrose. Essa formulação só foi possível graças a um trabalho de Petrov, quem chamou muita a atenção de Kerr após um seminário apresentado por Pirani. Neste trabalho, Petrov classificava propriedades algébricas do tensor de Weyl, a partir das direções principais de vetores nulos (TEUKOLSKY, 2015). Sabemos que a utilização de vetores nulos é de extrema importância para o uso do formalismo de Newman-Penrose, o qual possibilitou a generalização da solução de Schwarzschild para a solução de Kerr.

Podemos citar que o surgimento de superradiância de buracos negros perturbados pode ocorrer para certos casos onde instabilidades na métrica aparecem a partir de pequenas

perturbações; essas instabilidades fornecem meios de extrair energia destes objetos a partir da amplificação de radiação. A ideia de roubar energia de um buraco negro foi primeiramente proposta por Penrose (BEKENSTEIN, 1973) pelo famoso processo Penrose, que consiste em lançar uma partícula com energia positiva E_0 dentro da ergosfera¹ de um buraco negro de Kerr. Penrose demonstrou que essa partícula se divide em 2 corpos com energias $E_1 < 0$, que é capturada pelo buraco negro, e uma $E_2 = E_0 + E_1$ (BEKENSTEIN, 1973). Isso pode ser interpretado como um processo de extração de energia, como aponta (BEKENSTEIN, 1973). Posteriormente Misner demonstrou que isso também é possível para ondas em espalhamento, tais ondas são amplificadas ao interagirem com o buraco negro de Kerr respeitando uma famosa relação: $\omega < m\Omega$, onde ω é a frequência de radiação incidente, m o modo da radiação e Ω o momento angular do buraco negro de Kerr. Misner também verificou que esse processo ocorre para buracos negros estáticos e carregados. O espaço-tempo que vamos usar neste trabalho é a solução RN-dS. A motivação para usar esta solução é que o buraco negro carregado assintoticamente plano não apresenta um potencial com um "vale" que possa produzir soluções superradiantes. Além disso, a solução assintoticamente de Sitter é favorecida, já que os dados observacionais mostram que nosso universo possui uma constante cosmológica positiva.

Como aponta (ZHU et al., 2014), diversas zonas de instabilidades foram encontradas em soluções de Sitter em (3+1)-dimensões para os casos de Schwarzschild, Kerr e Reissner-Nordström; em algumas destas zonas foram identificadas regiões onde a amplificação de radiação pode ocorrer de forma espontânea, o que pode ser interpretado como uma extração de energia destes buracos negros.

Portanto, é de interesse para o profissional de engenharia física o entendimento deste fenômeno por sua integralidade, pois fornece um meio de extração de energia de um corpo supermassivo como um buraco negro necessitando apenas de uma fonte coerente de radiação. A energia extraída de um buraco negro poderia fornecer um melhor entendimento de como esses gigantes gravitacionais funcionam, assim como novas possibilidades de aplicação tecnológica para uma sociedade do futuro.

Objetivos

Os objetivos deste trabalho consistem no estudo do fenômeno da superradiância e como ela ocorre na teoria de buracos negros. Essencialmente, consideramos buracos negros do tipo Reissner-Nordström (RN) assintoticamente de Sitter (dS), analisando o potencial deste tipo de solução em (3+1)-Dimensões e suas possíveis instabilidades que

¹ Ergosfera é uma região exterior ao horizonte de eventos que é característica de buracos negros com rotação. Esta região é caracterizada por possuir uma frequência rotacional igual ao buraco negro, ou seja, o espaço-tempo e os corpos que caírem dentro dessa região são arrastados com uma mesma frequência de rotação que o buraco negro.

podem acarretar no surgimento de superradiância, mesmo que esta condição não seja suficiente para que a mesma ocorra.

Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizamos o cálculo tensorial usual em relatividade geral, assim como métodos analíticos para a solução de equações diferenciais parciais como a equação de Klein-Gordon. Aliado a estes métodos analíticos foi utilizado suporte numérico com o uso do Software *Maple 19*.

2 Revisão Teórica

Neste capítulo, revisaremos alguns conceitos e ferramentas que serão necessários para a compreensão do presente trabalho. A não ser quando explicitado, utilizamos unidades geometrizadas em que $G = k_B = c = \hbar = 1$.

2.1 Conceitos básicos de Relatividade Geral

Os fundamentos teóricos da relatividade geral seguem a referência (SCHUTZ, 2009). A relatividade geral é formulada sobre a ótica de variedades pseudo-riemannianas² e métricas; sabendo disso, precisamos estabelecer algumas quantidades que são de extrema importância para o entendimento da Relatividade Geral e das próximas seções da monografia. É importante notar que utilizamos a notação de Einstein como forma de simplificação para equações contendo índices.

2.1.1 Métrica

Definimos uma função que, através de um produto tensorial, associa dois vetores u e v , gerados a partir dos vetores de base $E = (e_0, \dots, e_n)$, do espaço vetorial V , como:

$$g(u, v) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^\alpha v^\beta (e_\alpha \otimes e_\beta). \quad (2.1)$$

Tal função g é conhecida como tensor métrico e pode ser mais facilmente entendida como o "Teorema de Pitágoras" na Geometria Riemanniana. Com o tensor métrico definido, vamos introduzir breves definições sobre o pseudo-vetor que define os *Símbolos de Christoffel* que serão úteis para a construção das *Derivadas Covariantes*; mas antes dessas novas definições, temos que apresentar a métrica que será trabalhada nesta monografia.

2.1.2 Símbolos de Christoffel

Como dito acima, antes de construirmos as famosas derivadas covariantes, precisamos introduzir um pseudo-vetor conhecido como *Símbolos de Christoffel*.

Seja um campo vetorial qualquer \mathbf{V} com uma base $A = (e_0, \dots, e_n)$. A derivada deste campo vetorial, que mapeia a diferença entre dois vetores, pode ser escrita de forma

² Na matemática, uma variedade é um espaço topológico n -dimensional \mathcal{M} que localmente se parece com o espaço euclidiano. Uma variedade riemanniana é uma variedade onde a distância entre cada ponto é descrita pela métrica g , o prefixo "pseudo" nos diz que essa variedade riemanniana é localmente parecida com o espaço de Minkowski

generalizada como:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e^\alpha + V^\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.2)$$

O último termo da equação acima define o chamado símbolo de Christoffel. Como estamos em um espaço curvo, tal quantidade não pode ser ignorada pois os vetores da base não são os mesmos em todo lugar numa variedade curva. Assim, esse último termo pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu e_\mu. \quad (2.3)$$

Sabendo que as informações da geometria de uma variedade podem ser retiradas de sua métrica, podemos criar uma relação entre métrica e os símbolos de Christoffel, a qual pode ser escrita como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (2.4)$$

2.1.3 Derivada Covariante

Com esta breve definição feita na seção anterior, podemos definir o análogo às derivadas ordinárias numa variedade pseudoriemanniana, as chamadas *Derivadas Covariantes*. Podemos definir a diferenciação de um campo vetorial \mathbf{V} numa variedade pseudoriemanniana como:

$$V_{;\beta}^\alpha = V_{,\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\mu. \quad (2.5)$$

Introduzimos uma nova notação para a generalização da derivada para um espaço curvo, que pode ser escrita como:

$$V_{;\beta}^\alpha. \quad (2.6)$$

Podemos estender essa nova quantidade para alguns espaços conhecidos, como um espaço plano. Por definição, no espaço plano temos :

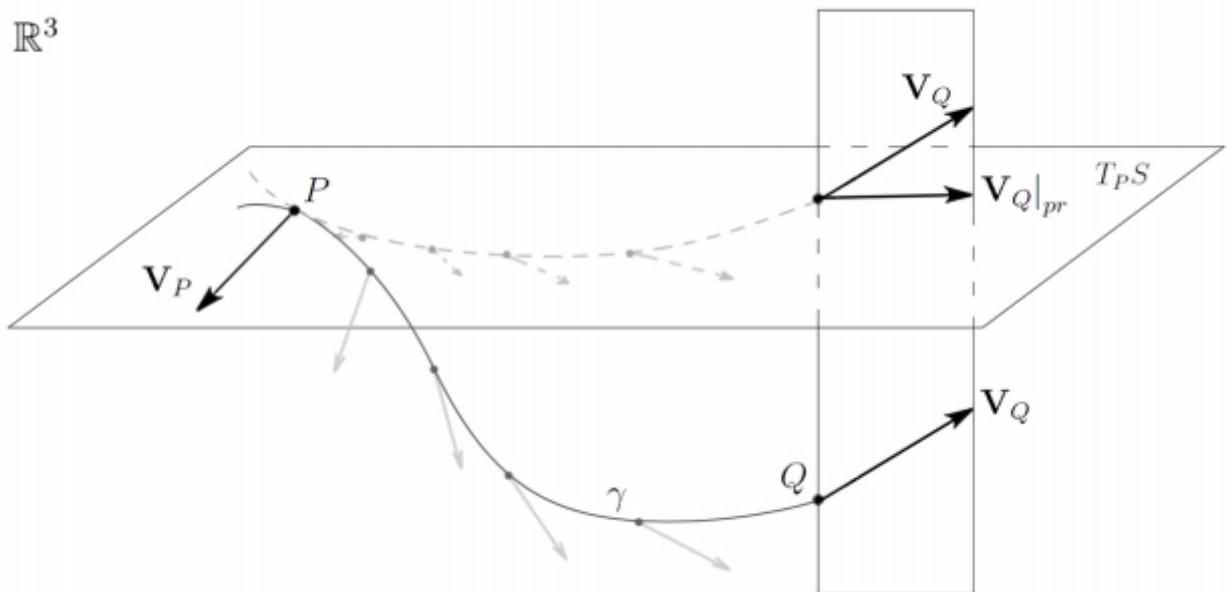
$$V_{;\beta}^\alpha = V_{,\beta}^\alpha, \quad \Gamma_{\mu\beta}^\alpha = 0. \quad (2.7)$$

Tal definição pode ser estendida para tensores de ordem superior.

2.1.4 Transporte Paralelo e Curvatura

Com base no autor (GORODETSKAYA, 2015), consideramos um campo de vetores tangentes \mathbf{V} e uma variedade curva qualquer. Escolhemos um ponto P qualquer e seu vetor tangente \mathbf{v} a fim de transportá-lo paralelamente do ponto P a um ponto Q , ambos pertencentes à variedade. Se estivessemos em um espaço plano, construindo um vetor tangente a Q de mesmo módulo e sentido do vetor \mathbf{v} em P , poderíamos assegurar que o vetor tangente neste caminho seria sempre paralelo à superfície que o contém. Não podemos dizer isso sobre uma variedade curva, pois os vetores da base não são constantes. Para construir o transporte paralelo sobre uma variedade curva, supomos um campo de vetor \mathbf{A} definido em uma variedade curva. Se os vetores de \mathbf{A} forem infinitesimalmente próximos, localmente paralelos e de mesmo tamanho, logo podemos assegurar o transporte paralelo de \mathbf{A} .

Figura 1 – Interpretação geométrica do transporte paralelo sobre uma superfície.



Fonte: (GORODETSKAYA, 2015).

Considere uma curva S parametrizada em λ e diferenciável. Com o vetor \mathbf{U} tangente ao longo de S e as componentes de \mathbf{A} constantes ao longo de λ , podemos escrever:

$$\frac{dA^\alpha}{d\lambda} = U^\beta A_{;\beta}^\alpha = 0. \quad (2.8)$$

Se consideramos ao invés de uma curva que liga dois pontos, um caminho fechado em uma variedade e desejamos calcular o transporte paralelo neste caminho, precisamos definir

uma quantidade chamada **Tensor de Riemann**:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}. \quad (2.9)$$

Tal tensor nos traz as informações de como as componentes mudam em \mathbf{A} após o transporte paralelo em um caminho fechado. Em uma variedade plana, podemos definir a noção de paralelismo globalmente, isto significa que o tensor de Riemann é nulo. Além disso, definimos o comutador entre derivadas covariantes da seguinte maneira:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A^\mu = \nabla_\alpha\nabla_\beta A^\mu - \nabla_\beta\nabla_\alpha A^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}A^\nu. \quad (2.10)$$

2.1.5 Identidades de Bianchi

Diferenciando o tensor de Riemann em relação a um x^λ , encontramos a seguinte expressão:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}). \quad (2.11)$$

Considerando um referencial inercial local, a comutação das derivadas parciais e que nossa métrica seja simétrica, temos neste ponto $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$. A partir dessas considerações, podemos construir uma equação em termos do tensor de Riemann na forma:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (2.12)$$

A equação anterior dá origem as **Identidades de Bianchi**.

2.1.6 Tensor de Ricci e Escalar de Ricci

Algumas das propriedades interessantes do Tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ são sua antissimetria na troca de α por β e de μ por ν , e sua simetria na troca dos pares $\alpha\beta$ e $\mu\nu$. Contraindo o primeiro e o terceiro índice definimos uma nova quantidade chamada **Tensor de Ricci**:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (2.13)$$

Podemos ainda contrair o tensor de Ricci e definirmos a quantidade **Escalar de Ricci**. Podemos descrever esta quantidade matematicamente como:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.14)$$

2.1.7 Tensor de Einstein

Contraindo as identidades de Bianchi obtemos uma equação com a forma:

$$g^{\alpha\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = 0. \quad (2.15)$$

Contraindo novamente a expressão acima, encontramos a seguinte equação:

$$(2R^\mu{}_\lambda - \delta^\mu{}_\lambda R)_{;\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Construindo um tensor simétrico \mathbf{G} em termos da métrica e tensor de Ricci:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = G^{\beta\alpha}. \quad (2.17)$$

Comparando a Eq. (2.17) com a Eq. (2.16), temos:

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (2.18)$$

Com as Eqs. (2.16) e (2.17) podemos construir a equação que determina as leis da dinâmica do campo. Tal equação é conhecida como a **Equação de Campo de Einstein** e tem a forma de:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (2.19)$$

Essa nova equação depende das componentes do tensor \mathbf{G} criado a partir da métrica e, portanto, do tensor de Ricci, que nos mostram o formato e deformação do espaço-tempo. O tensor \mathbf{T} é conhecido como *Tensor de energia-momento*, o qual nos dá informações da matéria e energia no espaço-tempo. A constante 8π vem da aplicação do limite Newtoniano, que determina o comportamento dos planetas no sistema solar. Aplicando as identidades de Bianchi na Eq.(2.18):

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (2.20)$$

O que nos garante a conservação de energia e momento no sistema.

2.2 Equação de Klein-Gordon

A equação central deste trabalho é a equação de Klein-Gordon, precisamente sua versão carregada na relatividade geral. Primeiramente, vamos introduzir essa equação de forma mais simplificada, utilizada na relatividade especial, sem considerar carga. Se tratando de uma equação de onda relativística, podemos encontrar a equação de Klein-Gordon em espaços planos substituindo os operadores de energia e momento na equação

de energia de uma partícula livre no repouso (RYDER, 1996):

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad (2.21)$$

$$\hat{p} = p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (2.22)$$

onde E é a energia da partícula livre, m_0 a massa da partícula e c a velocidade da luz no vácuo. A energia de uma partícula em repouso é dada como:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (2.23)$$

Fazendo $\hbar = c = 1$ e substituindo os operadores (2.21) e (2.22) na equação (2.23) temos (RYDER, 1996):

$$p^\mu p_\mu \psi = m^2 \psi, \quad (2.24)$$

$$(\square + \mu^2) \psi = 0, \quad (2.25)$$

onde μ é a massa do campo escalar ψ . Chamamos a equação (2.25) de equação de Klein-Gordon, ela representa a equação de onda relativística para partículas escalares. Algumas características interessantes dessa equação se devem a sua densidade de probabilidade ρ e densidade de corrente j^μ . Definimos estas quantidades como (RYDER, 1996):

$$\rho = \frac{i}{2m} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (\text{densidade de probabilidade}), \quad (2.26)$$

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{i}{m} \psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \quad (\text{corrente de probabilidade}), \quad (2.27)$$

onde a derivada $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$ é definida como:

$$A \overleftrightarrow{\partial}^\mu B = \frac{1}{2} (A \partial^\mu B - (\partial^\mu A) B). \quad (2.28)$$

Essas probabilidades são conservadas como vemos na equação da continuidade (RYDER, 1996):

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2m} (\psi^* \square \psi - \psi \square \psi^*) = 0. \quad (2.29)$$

Observamos que a equação de Klein-Gordon é uma equação diferencial de segunda ordem, logo podemos fazer uma escolha arbitrária de ψ e $\partial_t \psi$, o que possibilita que a densidade de probabilidade tome valores negativos (RYDER, 1996). Essa característica é de extrema importância para a dispersão de bósons num potencial de barreira, criando a possibilidade de um regime de superradiância, como veremos a seguir.

2.3 Superradiância

Antes de seguir com os estudos da superradiância, tomamos o livro (BRITO; CARDOSO; PANI, 2015) como base teórica para apresentar o fenômeno da superradiância

e sua extensão para a teoria de buracos negros. Os estudos iniciais em superradiância surgiram da mecânica quântica, precisamente do trabalho de Oskar Klein em 1929 (KLEIN, 1929) ao estudar as propriedades de um potencial de escada (poço barreira) na equação de Dirac. Em seus estudos, Klein mostrou que há emissão espontânea de pósitrons a partir da emissão de elétrons se o potencial é forte o suficiente (CALOGERACOS; DOMBEY, 1999). Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Klein (CALOGERACOS; DOMBEY, 1999), sendo uma propriedade de equações de onda relativísticas. Em 1941 Hund estendeu os estudos para campos escalares carregados (HUND, 1941) na equação de Klein-Gordon (partículas bosônicas) e mostrou que, para um potencial de escada, há o aparecimento de pares de partículas carregadas; contudo, veremos que este fenômeno não se estende para férmions.

2.3.1 Paradoxo de Klein

Assim como indica (HOLSTEIN, 1998) devemos, num primeiro momento, mostrar o caso não relativístico de dispersão por potencial de barreira. Disso consideramos o seguinte potencial escalar:

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Uma partícula não relativística, com carga e , incidente da esquerda, obedece a equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo (HOLSTEIN, 1998):

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + e\phi \right) \psi(z) = E\psi(z) \quad (2.31)$$

com as seguintes soluções da equação de onda $\psi(z)$:

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{ipz} + r(\rho) \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-ipz} & \text{se } z \leq 0 \\ t(\rho) \frac{1}{\sqrt{q}} e^{iqz} & \text{se } z > 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $p = \sqrt{2m/E}$ é o momento para o lado esquerdo da barreira e $q = \sqrt{2m(E - e\phi_0)}$ é o momento da partícula no lado direito da barreira. O coeficiente ρ representa a razão entre os momentos $\rho = q/p$. Disso, os coeficientes r e t são escritos em função de $\rho = \sqrt{1 - e\phi_0/E}$:

$$r(\rho) = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}, \quad t(\rho) = \frac{2\sqrt{\rho}}{1 + \rho} \quad (2.33)$$

Chamamos estas amplitudes de reflexão e transmissão, respectivamente. Como indica a física moderna, a avaliação do fluxo de energia carregado pelas ondas da esquerda (*ingoing*) e da direita (*outgoing*) fornecem os coeficientes de transmissão e reflexão; disso, ao normalizarmos o sistema de uma forma "WKB" (a maneira como escrevemos as equações

de onda (2.32)) definimos os coeficientes de reflexão e transmissão como o valor absoluto das amplitudes de transmissão e reflexão, disso temos:

$$R = |r(\rho)|^2 = \frac{|1 - \rho|^2}{|1 + \rho|^2}, \quad T = |t(\rho)|^2 = \frac{4\rho}{|1 + \rho|^2}, \quad (2.34)$$

Analisando os momentos para os seguintes casos: Quando $E > e\phi_0$ temos que p, q são reais, logo temos transmissão e reflexão satisfazendo a relação $R + T = 1$, para $E < e\phi_0$ o momento do lado direito tornasse complexo, isso é traduzido em uma completa reflexão das ondas incidentes do lado esquerdo. Se fizermos a mesma análise para uma equação de onda relativística como a equação de Klein-Gordon com as mesmas características que as equações (2.32), temos a seguinte equação unidimensional e seus respectivos momentos (HOLSTEIN, 1998):

$$\left[(E - e\phi(z))^2 - \frac{d^2}{dz^2} + m^2 \right] \psi(z) = 0, \quad (2.35)$$

$$p = \sqrt{E^2 - m^2}, \quad q = \sqrt{(E - e\phi_0)^2 - m^2}. \quad (2.36)$$

Assim como para o caso não relativístico, para $E < e\phi_0$ temos reflexão e transmissão respeitando a relação $R + T = 1$, para $E > e\phi_0$ com $e\phi_0 - E < m$ há reflexão total assim como para a equação de Schrödinger. Contudo, surge uma nova possibilidade, para $E > e\phi_0$ com $e\phi_0 - E > m$ temos que o momento do lado esquerdo q é real assim como o momento p do lado direito, o que configura reflexão e transmissão com $R + T > 1$. Chamamos esse fenômeno de paradoxo de Klein. Esse fenômeno pode ser resolvido se considerarmos o surgimento de uma criação de pares, isto é, caso uma barreira de potencial seja forte o bastante podemos gerar um par de partícula e antipartícula do vácuo. No caso de Klein, havia o aparecimento de um pósitron (antipartícula do elétron) tunelando pela barreira, já o elétron incidente foi refletido pelo potencial de barreira, retornando pra o raio incidente. Por conservação de energia, a única possibilidade do aparecimento dessa antipartícula se dá pela extração de energia do potencial de barreira, que deve ser forte o suficiente para satisfazer o paradoxo de Klein. A seguir veremos como esse fenômeno está relacionado com a superradiância e sua possibilidade para diferentes tipos de partícula.

2.3.2 Dispersão Bosônica

Como vimos anteriormente, o surgimento de um fluxo de partículas transmitidas por uma barreira de potencial para diferentes condições de energia surge da possibilidade da criação de um par de partículas e antipartículas a partir de um potencial forte o suficiente, esse fenômeno é conhecido como paradoxo de Klein. Essa propriedade surge apenas para ondas que obedeçam equações relativísticas como a equação de Klein-Gordon. Contudo, como veremos a seguir, há algumas limitações físicas para o surgimento dessa criação de pares e isso envolve o tipo de partícula na qual estamos trabalhando. Primeiramente vamos

reaproveitar o caso da equação de Klein-Gordon eletricamente carregada, isto é, vamos considerar como se comporta uma incidência bosônica em um potencial eletromagnético. Utilizando a convenção de Einstein, podemos escrever a equação de Klein-Gordon como:

$$\Phi_{;\mu}^{;\mu} = 0, \quad (2.37)$$

onde consideramos Φ o campo escalar minimamente acoplado com um potencial eletromagnético A_μ em $(1+1)$ -dimensões. Definimos a derivada covariante deste campo como: $\Phi_{;\mu} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi$, onde e é a carga do campo escalar. O potencial eletromagnético obedece a seguinte relação:

$$A_0 \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{quando } x \rightarrow -\infty \\ V & \text{quando } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.38)$$

podemos escrever a equação da perturbação espacial considerando o seguinte *Ansatz* $\Phi = e^{-i\omega t} f(x)$. A equação de Klein Gordon em $(1+1)$ dimensões pode então ser separada na seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (\omega - eA_0)^2 f = 0. \quad (2.39)$$

Uma das possíveis soluções dessa equação diferencial surge ao considerarmos um feixe de partículas viajando da esquerda para a direita, ou seja, do $-\infty$ espacial até o ∞ espacial. Escrevemos as equações de onda *ingoing* (esquerda) e *outgoing* (direita) como:

$$f_-(x) = \mathcal{I}e^{i\omega x} + \mathcal{R}e^{-i\omega x}, \text{ quando } x \rightarrow -\infty, \quad (2.40)$$

$$f_+(x) = \mathcal{T}e^{ikx}, \text{ quando } x \rightarrow \infty, \quad (2.41)$$

Essas equações comportam os termos de incidência das partículas, assim como suas partes refletidas e transmitidas pela barreira de potencial, os coeficientes \mathcal{I} , \mathcal{R} e \mathcal{T} representam os coeficientes de incidência, reflexão e transmissão, respectivamente. Definimos então o vetor de onda k em termos da relação de dispersão destas soluções assintóticas como:

$$k = \pm(\omega - eV). \quad (2.42)$$

O sinal da Eq. (2.42) deve ser escolhido a partir do sinal da velocidade de grupo das ondas. Para obtermos soluções em acordo com as condições de contorno das Eqs. (2.40) e (2.41), ou seja, ondas vindas da esquerda para a direita e a parte transmitida devem possuir velocidade de grupo positiva, isto é, $\partial\omega/\partial k > 0$, portanto, tomamos o sinal positivo na Eq. (2.42) com $\omega > 0$. Por fim, obtemos as relações entre os coeficientes das Eqs. (2.40) e (2.41) a partir da matriz Wronskiana W definida como:

$$W = \det \begin{pmatrix} f_- & f_+ \\ f'_- & f'_+ \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Sendo a Eq. (2.39) uma equação diferencial de segunda ordem, a única solução que apresenta duas funções f linearmente independentes ocorre quando $W = 0$, disso, para a dispersão bosônica temos a seguinte relação:

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - eV}{\omega} |\mathcal{T}|^2. \quad (2.44)$$

É possível notar que para a região $0 < \omega < eV$ temos que $|\mathcal{R}|^2 > |\mathcal{I}|^2$, o que configura uma amplificação para as ondas refletidas, chamamos este intervalo de regime de superradiância. Veremos futuramente que este resultado está de acordo com a mecânica estatística, pois para dispersão bosônica podem existir partículas com mesmo estado. Por hora, daremos sequência apresentando a dispersão fermiônica.

2.3.3 Dispersão Fermiônica

A dispersão de um feixe de férmions não massivos deve obedecer a equação de Dirac, considerando acoplamento mínimo entre o campo espinorial Ψ_μ e um potencial eletromagnético A_μ :

$$\gamma^\mu \Psi_{;\mu} = 0, \quad (2.45)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac na relatividade geral, que obedecem uma relação de anticomutação: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Escolhendo um *Ansatz* do tipo $\Psi = e^{-i\omega t} \chi(x)$, onde $\chi(x)$ é um espinor do tipo:

$$\chi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

e tomando a seguinte forma para as matrizes de Dirac num espaço-tempo em (1+1) dimensões:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

As equações espinoriais (2.45) desacoplam num sistema da seguinte forma:

$$df_1/dx - i(\omega - eA_0)f_2 = 0, \quad (2.48)$$

$$df_2/dx - i(\omega - eA_0)f_1 = 0. \quad (2.49)$$

Considerando um feixe de férmions não massivos emitidos de $-\infty$ que são parcialmente refletidos e transmitidos pela barreira de potencial, temos as seguintes soluções para as componentes espinoriais:

$$(f_1^{in}, f_2^{in}) = \begin{cases} (\mathcal{I}e^{i\omega x} - \mathcal{R}e^{-i\omega x}, \mathcal{I}e^{i\omega x} + \mathcal{R}e^{-i\omega x}) & \text{quando } x \rightarrow -\infty \\ (\mathcal{T}e^{ikx}, \mathcal{T}e^{ikx}) & \text{quando } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.50)$$

Sabemos que a densidade de corrente na equação de Dirac é:

$$j^\mu = -e\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi, \quad (2.51)$$

com os coeficientes de reflexão e transmissão:

$$R = \frac{\dot{J}_{reflec}}{\dot{J}_{inc}}, \quad (2.52)$$

$$T = \frac{\dot{J}_{trans}}{\dot{J}_{inc}}. \quad (2.53)$$

Disso, por conservação de corrente e igualando as equações de onda em $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$, temos a seguinte relação entre os coeficientes de transmissão, reflexão e incidência:

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - |\mathcal{T}|^2. \quad (2.54)$$

De (2.54) podemos observar que para qualquer frequência fornecida temos $|\mathcal{R}|^2 \leq |\mathcal{I}|^2$, logo, não observamos superradiância para uma dispersão fermiônica.

2.3.4 Superradiância e Criação de pares

Essa diferença entre a existência ou não de um regime de superradiância está relacionado com a natureza das partículas. A primeira diferença vem das propriedades intrínsecas dessas partículas. Sabemos que os férmions são governados pela equação de Dirac, a qual possui uma densidade de corrente de probabilidade positiva definida, ou seja, a probabilidade de que uma partícula seja transmitida é sempre positiva e existe num intervalo $0 \leq |\mathcal{T}|^2 \leq |\mathcal{I}|^2$ ou seja, a probabilidade de transmissão existe em um intervalo entre não haver tunelamento ou que todas as partículas sejam tuneladas. Já na equação de Klein-Gordon a densidade de corrente de probabilidade pode ter seu sinal alterado, o que possibilita a amplitude de transmissão acomodar valores negativos dentro de um intervalo $-\infty \leq \frac{\omega - eV}{\omega} |\mathcal{T}|^2 \leq |\mathcal{I}|^2$; isso permite a existência de um regime de superradiância, onde, para um certo intervalo de frequências, há amplificação de radiação emitida. Segundo a teoria quântica de campos esse fenômeno ocorre na presença de um campo eletromagnético muito forte, onde há possibilidade da aparição de uma criação de pares para um dado estado de energia.

Podemos entender como a criação de pares se relaciona com a existência da superradiância ao analisarmos distribuições de probabilidade fornecidas pelas estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Sabemos que o número médio de pares de bósons e férmions num dado estado de energia segue a seguinte distribuição:

$$\bar{n}_{B,F} = \frac{1}{1/\mathcal{P} \mp 1}, \quad (2.55)$$

onde $\mathcal{P} \leq 1$ é a probabilidade de produção espontânea de um único par de partícula-antipartícula. Na equação (2.55) o sinal negativo representa a estatística para bósons e o sinal positivo para férmions, por conta do princípio de exclusão de Pauli.

A partir de um processo de segunda quantização, obtemos as seguintes expressões para o número de partículas para um dado estado:

$$\bar{n}_B = \left| \frac{\omega - eV}{\omega} \right| |\mathcal{T}|^2, \quad \bar{n}_F = |\mathcal{T}|^2. \quad (2.56)$$

Das relações anteriores podemos observar que na região de superradiância temos: quando há uma alta probabilidade de criação espontânea de um par, ou seja, quando $\mathcal{P} \rightarrow 1$, ocorre que o número máximo de pares fermiônicos possíveis é de $0 \leq \bar{n}_F \leq 1$ enquanto para as mesmas condições o número de pares bosônicos é $\bar{n}_B \rightarrow \infty$. Vemos também que quando não há probabilidade espontânea da criação de um par, isto é, $\mathcal{P} \rightarrow 0$, temos que o número de pares bosônicos criados é $\bar{n}_B \rightarrow 0$, assim como para pares fermiônicos. Observamos que ao aplicar as relações estatísticas (2.55) e (2.56) nas relações de incidência e transmissão para dispersão de bósons como em (2.44), mostramos que $|\mathcal{R}|^2 \rightarrow |\mathcal{I}|^2$ quando $\mathcal{P} \rightarrow 0$, disso, concluímos que só existe superradiância quando a probabilidade de criação de um par partícula-antipartícula for diferente de 0, $\mathcal{P} \neq 0$. Apesar de serem fenômenos relacionados, a ocorrência de uma criação de pares e superradiância em campos suficientemente fortes não são a mesma coisa. A criação de pares pode surgir sempre quando o sistema é cineticamente favorável, ou seja, pode ocorrer sem a superradiância. Existem alguns casos na física de buracos negros onde não existe superradiância, mesmo assim esses buracos negros emitem radiação Hawking ³, desse modo, consideramos a radiação Hawking como um análogo à criação de pares para um campo gravitacional forte.

Para elucidar esse processo, (BRITO; CARDOSO; PANI, 2015) propõem um experimento mental. Podemos estudar a conservação de energia para a existência da criação de pares na superradiância considerando uma bateria conectada a duas caixas, onde há um acréscimo de potencial V entre um caixa aterrada externa e um caixa interna, há também um dispositivo na placa interna que absorve todas as partículas incidentes nele. Consideramos uma onda bósonica não massiva num intervalo de superradiância. Aplicando a condição de superradiância $\omega < eV$ na relação (2.44) temos:

$$|\mathcal{R}|^2 - \frac{eV - \omega}{\omega} |\mathcal{T}|^2 = |\mathcal{I}|^2. \quad (2.57)$$

O sinal negativo na frente do coeficiente de transmissão se deve ao fato de que a corrente de probabilidade na equação de Klein-Gordon não é positivo definida. De (2.57) observamos que existe um número maior de partículas refletidas pela barreira de potencial em relação ao número de partículas de incidência. Isso nos informa que a interação entre o potencial de barreira e o raio de incidência simulam uma criação de pares que emite partículas e antipartículas. As partículas desse par compõem o fluxo de partículas refletidas com carga e , enquanto para fluxo de transmissão é interpretado como fluxo de antipartículas da criação de pares geradas pelo potencial de barreira com carga $-e$. Na visão energética, cada partícula incidente com uma energia ω é refletida com um acréscimo ω de energia, isso ocorre pela conservação de energia associada à criação de pares, uma

³ A radiação Hawking é a radiação característica da evaporação dos buracos negros. Nesse contexto, campos que habitam regiões muito próximas do horizonte de eventos podem sofrer excitações, dessas excitações há a criação de um par partícula-antipartícula. Ao observamos o comportamento das partículas, observamos que a antipartícula cai em direção ao buraco negro enquanto que a partícula tunela a barreira de potencial gravitacional deste buraco negro, assim escapando para o infinito.

vez que surge uma energia $-\omega$ da antipartícula que é balanceada pelo acréscimo de ω para cada partícula refletida; disso, cada vez mais partículas "entram" no raio refletido com carga e e energia ω fornecendo antipartículas com energia $-e$ absorvidas pelo dispositivo dentro da caixa interna. Essa troca de energia entre a caixa e o absorvedor está associada a uma energia cinética $E_{cin} = eV - \omega$. A manutenção do potencial V dentro da caixa interna só ocorre se o acréscimo de potencial que ocorre entre as duas caixas com energia $E_{ab} = eV$ for absorvido pelo dispositivo. O sistema total tem uma variação de energia $E_{cin} - E_{ab} = eV - \omega - eV = -\omega$, onde $E_{disp} = -\omega$ é a energia dissipada pelo sistema para cada partícula que "entra" no raio refletido. No caso contrário onde não há superradiância, temos $\omega > eV$ e $|\mathcal{R}|^2 \leq |\mathcal{I}|^2$; neste caso a energia cinética fornecida ao absorvedor é $E_{cin} = \omega - eV$. Uma quantidade eV é dada para a bateria, que resulta em um acréscimo ω para a energia total do sistema. Por conservação de energia isso significa que o raio de reflexão neste caso é constituído de antipartículas, enquanto o transmitido é composto de partículas. Essa analogia mostra que a superradiância está relacionada à dissipação de energia da "bateria" para o sistema, ou seja, este fenômeno possui certa relação com a termodinâmica do sistema como veremos no futuro.

3 Resultados

No capítulo a seguir descrevemos a extensão da teoria da superradiância para buracos negros, com base no livro do autor (BRITO; CARDOSO; PANI, 2015), em especial para o caso de soluções carregadas como a solução de Reissner-Nordström de-Sitter.

3.1 Extensão para teoria de buracos negros

O marco inicial do estudo de superradiância se deu por Ginzburg e Frank (BEKENSTEIN; SCHIFFER, 1998; GINZBURG, 1996), os quais descobriram que um objeto que se move uniformemente num meio pode emitir espontaneamente radiação mesmo estando no estado fundamental (BEKENSTEIN; SCHIFFER, 1998). Dicke (BEKENSTEIN; SCHIFFER, 1998; DICKE, 1954) utilizou o mesmo termo superradiância para descrever o fenômeno de amplificação de radiação.

Posteriormente Zel'dovich (Zel'Dovich, 1972) mostrou que um cilindro feito de material absorvente de radiação poderia amplificar essa radiação ao obedecer uma simples condição:

$$\omega - m\Omega < 0. \quad (3.1)$$

onde a relação de dispersão ω representa a frequência das ondas emitidas, m um número quântico azimutal e Ω a velocidade angular do cilindro. Misner também sugeriu que buracos negros com rotação também poderiam amplificar radiação eletromagnética, porém esses cálculos não foram publicados (BEKENSTEIN; SCHIFFER, 1998). O mesmo também notou que o caso de amplificação de radiação eletromagnética incidente num buraco negro de Kerr tem bases termodinâmicas muito fortes, pois está intimamente ligada com o teorema da área de Hawking (BEKENSTEIN; SCHIFFER, 1998; HAWKING, 1971); essa ligação ocorre pois a equação (3.1) é a única que satisfaz totalmente o teorema da área de Hawking. Essa relação termodinâmica tornou-se ainda mais evidente com base nos argumentos termodinâmicos que Zel'dovich utilizou para explicar a superradiância rotacional a partir da equação de Klein-Gordon com um termo de absorvidade (Zel'Dovich, 1972; BRITO; CARDOSO; PANI, 2015). Disso vamos mostrar, a seguir, as bases que possibilitaram a extensão da teoria da superradiância para buracos negros, que mostraram a condição de Ginzburg-Frank, assim como argumentos termodinâmicos que validam sua existência.

3.1.1 Relação de Ginzburg-Frank

Do ponto de vista energético, é importante estudarmos como ocorre a emissão espontânea de um fóton na superradiância. O exemplo mais simples ocorre ao considerarmos um objeto massivo de massa M em movimento, com uma energia $E_f = E_i \pm \hbar\omega$ e momento $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}$ definidos em um referencial inercial, essa é a energia total de uma partícula após a emissão de um fóton com energia $\hbar\omega$ e momento $\hbar\mathbf{k}$. Nessas condições podemos definir uma emissão ou absorção de fótons com a variação de massa de repouso, que nada mais é do que a variação energética antes e depois da absorção de um fóton vista por um referencial se movendo na mesma direção:

$$E_f - E_i = -\gamma_i(E_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}); \quad \text{emissão} \quad (3.2)$$

$$E_f - E_i = \gamma_i(E_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}); \quad \text{absorção} \quad (3.3)$$

$$\gamma_i = (1 - \mathbf{v}_i^2)^{-1/2}, \quad \text{transformação de Lorentz} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}_i = \partial E_i / \partial \mathbf{p}_i, \quad \text{velocidade inicial da partícula} \quad (3.5)$$

Sabemos que no estado fundamental $E_i < E_f$, um fóton só pode ser emitido caso a condição de Ginzburg - Frank seja satisfeita, considerando $E_i = \hbar\omega$ e $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$:

$$\omega - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{k} < 0, \quad (3.6)$$

onde $k = |\mathbf{k}|$ é o vetor de onda e $\omega(k)$ é a relação de dispersão de um fóton. Considerando uma dispersão no vácuo, ou seja, para um $\omega(k) = k$, a relação de Ginzburg-Frank (3.6) nunca é satisfeita, isso se reflete na obviedade de que a invariância de Lorentz proíbe a emissão de uma partícula no estado fundamental (BRITO; CARDOSO; PANI, 2015). Contudo, essa relação é espontânea para uma relação de dispersão do tipo $\omega = k/\eta(\omega)$, onde $\eta(\omega) = 1/v_{ph}$ é o coeficiente de refração de um meio dielétrico isotrópico com velocidade de fase v_{ph} . Aplicando essa condição na relação de Ginzburg-Frank (3.6) é fácil perceber que existe emissão espontânea de um fóton se:

$$\omega = \frac{k}{\eta(\omega)} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1}{v_{ph}}; \quad \text{substituindo em (3.6)}, \quad (3.7)$$

$$v_{ph}k - v_i k \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \cos(\theta) > \frac{v_{ph}}{v_i}, \quad (3.8)$$

$$\theta < \theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{v_{ph}}{v_i}\right), \quad \theta_c \text{ é o ângulo de espalhamento coerente}, \quad (3.9)$$

ou seja, quando a relação (3.7) tem $v_{ph} < v_i$. Observamos esse tipo de condição quando apenas espalhamento coerente ocorre no sistema; podemos definir espalhamento coerente quando um fóton absorvido pelo corpo é imediatamente emitido pelo mesmo na mesma direção, sem que haja mudança de movimento. Disso, podemos observar este tipo de fenômeno até mesmo em objetos sem uma estrutura interna $E_f = E_i$ em uma escala de energia relevante, como uma carga pontual. A espontaneidade dessa emissão não só

respeita as leis de conservação de energia como foi visto, como também possui razões termodinâmicas para sua ocorrência. Como discute (BEKENSTEIN; SCHIFFER, 1998) um objeto em seu estado fundamental sem nenhum fóton ao seu redor, configura um estado de baixa entropia. Disso, a emissão é favorecida pela segunda lei da termodinâmica que fornece a seguinte relação:

$$(\omega - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{k})a(\omega) > 0 \quad (3.10)$$

onde $a(\omega)$ é a absorvidade característica de um corpo. Logo, a superradiância está ligada com uma absorvidade negativa do sistema, ou seja, com sua dissipação.

Um exemplo de emissão espontânea no contexto da superradiância é observado no efeito Vavilov-Cherenkov (BRITO; CARDOSO; PANI, 2015), onde elétrons viajam em um meio refratário (água possui $\eta = 1$) com uma velocidade igual à da luz no vácuo c , dentro de um meio onde a velocidade de fase é menor que a velocidade do objeto (a velocidade da luz na água é $0.75c$). Esses elétrons emitem radiação em frequências superradiantes características do fenômeno.

3.1.2 Superradiância Rotacional

Anteriormente vimos que a emissão espontânea de fótons superradiantes está intrinsecamente ligada com a velocidade de um corpo ser maior que a velocidade de fase no meio, porém, sabemos que isso é impossível para o vácuo na geometria plana. Contudo, para uma simetria esférica ou cilíndrica isso é possível. A velocidade angular de um corpo com este tipo de simetria é de $\Omega = \omega/m$. Disso, a amplificação de ondas incidentes é possível satisfazendo a seguinte relação (Zel'Dovich, 1972)

$$\omega < m\Omega. \quad (3.11)$$

Essa relação é muito parecida com os exemplos vistos anteriormente, de fato, uma análise termodinâmica pode mostrar isso com maior clareza. Considere um corpo massivo com simetria axial e rotação; se assumimos equilíbrio térmico, podemos definir exatamente a entropia S deste corpo assim como sua massa M e temperatura T . Caso um pacote de ondas com frequências $(\omega, \omega + d\omega)$ incidir neste, podemos determinar a variação de energia e momento angular total J como (Zel'Dovich, 1972):

$$\frac{dE}{dt} = Z_m P_m d\omega, \quad \frac{dJ}{dt} = Z_m \frac{m}{\omega} P_m d\omega, \quad (3.12)$$

onde $P_m(\omega)d\omega$ é a potência associada às ondas incidentes e $(m/\omega)P_m(\omega)d\omega$, a taxa de momento angular carregado pelas mesmas, Z_m é uma fração de energia que será absorvida

pelo corpo. Um referencial inercial rotacionando na mesma direção que o corpo observaria uma troca de energia dE_0 do tipo (Zel'Dovich, 1972):

$$dE_0 = dE - dJ\Omega = dE \left(1 - \frac{m\Omega}{\omega} \right). \quad (3.13)$$

Da termodinâmica, sabemos que o processo de absorção configura um aumento na entropia do sistema, disso escrevemos:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dE_0}{dt} = \frac{\omega - m\Omega}{\omega T} Z_m P_m d\omega. \quad (3.14)$$

Sabemos também que a entropia sempre aumenta segundo a 2ª lei da termodinâmica, isso nos leva a seguinte conclusão:

$$(\omega - m\Omega)Z_m > 0, \quad (3.15)$$

Comparando a equação (3.15) com a relação (3.11), o regime de superradiância ocorre quando $Z_m < 0$; esse argumento termodinâmico de Zel'dovich entra em acordo com a validação termodinâmica de uma emissão espontânea, como visto anteriormente ao compararmos a fração de energia Z_m com a dissipatividade do sistema $\alpha < 0$.

3.1.3 Superradiância em Buracos Negros

A última seção foi finalizada abordando uma das características-chaves da superradiância; o meio por onde se propagam as ondas deve possibilitar dissipação. Sabemos que mesmo na ausência de matéria, o que conhecemos por vácuo, a superradiância se torna possível somente em um espaço-tempo curvo. Isso se torna um atrativo para a relatividade geral, sobre tudo no estudo de buracos negros.

Sabemos que buracos negros são soluções das equações de Einstein; algumas soluções famosas realmente ocorrem na ausência de matéria, como a solução de Schwarzschild, e possuem algumas propriedades extremas; talvez a mais fascinante seja a existência de uma região de perda de causalidade conhecida como horizonte de eventos. O horizonte de eventos se torna de extrema importância para o estudo de superradiância, pois este confere ao vácuo uma característica dissipativa, isto é, caso considerarmos o horizonte de eventos como uma membrana viscosa dotada de condutividade elétrica, gravidade superficial e até mesmo dissipação.

Essa visão peculiar do horizonte de eventos é conhecida como paradigma da membrana (THORNE et al., 1986; BRITO; CARDOSO; PANI, 2015), tal paradigma torna-se relevante em distâncias muito próximas ao horizonte de eventos. Algumas descobertas importantes sobre a extração eletromagnética de um buraco negro com rotação foram feitas

por Blandford-Znajek (ZNAJEK, 1978; BRITO; CARDOSO; PANI, 2015), considerando que o horizonte de eventos está de alguma forma em interação com o espaço fora do buraco negro, fornecendo assim propriedades como dissipação e, dessa maneira, não é visto unicamente como uma região de não retorno.

O paradigma da membrana fornece os mesmos resultados que esperamos encontrar na relatividade geral, desde o próprio horizonte de eventos até o limite espacial conhecido (THORNE et al., 1986). A diferença é que esse paradigma considera o ponto de vista de partículas e campos muito próximos desse horizonte; tais partículas e campos experimentam uma física como se estivessem em uma camada sobreposta ao horizonte de eventos e esta camada possui uma estrutura extremamente complexa, sendo essencialmente um relato do passado histórico do buraco negro. Essa membrana não tem qualquer influência sobre o passado ou presente da evolução das partículas ou campos fora do limite desta membrana, de uma forma como se o horizonte de eventos fosse esticado sobre esta zona como uma membrana, disso, podemos criar condições de contorno simplificadas neste horizonte esticado (THORNE et al., 1986).

Como abordado anteriormente, sob o ponto de vista de partículas e campos muito próximos ao horizonte de eventos, é plausível pensar que os referenciais e observadores possuem um papel muito importante nesse paradigma, e de fato tem. Uma das condições de membrana esticada mais importante é o seu limite espacial, neste paradigma podemos "esticar" o quão longe quisermos, desde que escolhamos um valor pequeno o suficiente respeitando a função de lapso α (THORNE et al., 1986):

$$\frac{d\tau}{dt} = \alpha = (-g_{00})^{1/2}, \quad (3.16)$$

onde τ é o tempo próprio de um referencial inercial e t o tempo universal. Considerando que esse referencial inercial possa ser escrito em termos de vetores do tipo $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, definimos a taxa de tempo sentida pelo referencial em relação ao universo como (THORNE et al., 1986):

$$\vec{e}_0 = \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.17)$$

A medida que o referencial se aproxima do horizonte de eventos, a função lapso tende a zero $\alpha \rightarrow 0$, isto é, o relógio do referencial bate cada vez mais lento, até que ele congela em $r = r_+$ e $d/d\tau \rightarrow \infty$ (THORNE et al., 1986). Znajek e Damour (ZNAJEK, 1978; Damour, 1982; THORNE et al., 1986) conseguiram demonstrar algumas propriedades elétricas como densidade de corrente, corrente superficial e resistividade desta região utilizando o paradigma da membrana, escolhendo um raio α_H com um valor pequeno o suficiente da função lapso $\alpha = \alpha_H$. Outros resultados interessantes são mostrados em (THORNE et al., 1986), o que nos levam a crer que a partir de condições de contorno

apropriadas é possível estender a noção da região ao redor do horizonte de eventos de um buraco negro, sobre tudo a sua propriedade de dissipação que é de extremo interesse para o estudo da superradiância.

Tendo definido como encontrarmos dissipação no vácuo na teoria de buracos negros, vamos explorar mais a sua termodinâmica, precisamente a implicação do teorema da área no surgimento da superradiância (BEKENSTEIN, 1973; BRITO; CARDOSO; PANI, 2015). A ideia de extrair energia de um buraco negro foi primeiramente apresentada por Penrose para a solução de Kerr a partir de uma partícula dentro da ergosfera (BEKENSTEIN, 1973). Misner mostrou que isso é também possível para ondas que respeitem a seguinte relação de dispersão:

$$\omega < m\Omega, \quad (3.18)$$

onde Ω é a frequência rotacional do buraco negro (BEKENSTEIN, 1973). Misner originalmente fez a análise considerando apenas ondas escalares, Teukolsky e posteriormente Misner conjecturaram que o processo de amplificação também ocorre para ondas eletromagnéticas e gravitacionais que satisfazem a equação (3.18).

Começamos nosso cálculos considerando um buraco negro de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist com massa M , carga Q e parâmetro de rotação a :

$$ds^2 = \frac{\Delta}{R^2}(a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2 - \frac{\sin^2(\theta)}{R^2}((r^2 + a^2)d\phi - a dt)^2 - \frac{R^2}{\Delta} dr^2 - R^2 d\theta^2, \quad (3.19)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2, \quad (3.20)$$

$$R^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta). \quad (3.21)$$

Escrevemos o momento angular \vec{L} e área A (BEKENSTEIN, 1973) como:

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (3.22)$$

$$a = \frac{L}{m}, \quad (3.23)$$

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Disso, podemos definir a variação da área do horizonte de eventos A como (BEKENSTEIN, 1973):

$$\delta A = 4A(r_+ - r_-)^{-1}(\delta M - \Omega \delta L - \Phi \delta Q), \quad (3.25)$$

onde Φ é o potencial eletromagnético. A segunda lei da termodinâmica implica que a área do horizonte de eventos nunca diminui, disso a equação (3.25) fornece a seguinte relação (BEKENSTEIN, 1973):

$$dM > \Omega \delta L + \Phi \delta Q. \quad (3.26)$$

A determinação do intervalo de amplificação das ondas depende da relação de energia e momento que as ondas escalares carregam. A primeira relação para analisarmos é a relação entre o fluxo de energia, fornecido pela componente $-T_t^r$ do tensor energia-momento e o fluxo de momento angular por T_ϕ^r . O *Ansatz* para ondas escalares segue o seguinte modelo:

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = f(r, \theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}, \quad (3.27)$$

$$T_{\mu\nu} = \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha}. \quad (3.28)$$

Ondas escalares que passam por um buraco negro com simetria esférica carregam momento angular com uma relação m/ω . Uma onda espalhada ao ser refletida pelo buraco negro causa uma variação de massa δM e momento angular δL no buraco negro, que fornece a seguinte relação, respeitando as condições de conservação de energia e momento angular (BEKENSTEIN, 1973):

$$\Omega \delta L = \Omega \delta M \frac{m}{\omega}. \quad (3.29)$$

Aplicando a equação (3.19) na relação (3.26) temos:

$$\delta M \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) > 0. \quad (3.30)$$

Se satisfeita a condição de Misner (3.18) teríamos um decréscimo de massa $\delta M < 0$, isto é, a massa do buraco negro decresce neste processo. Esse decréscimo indica que as ondas refletidas carregam mais energia do que as ondas incidentes, o que configura uma amplificação pela extração de energia do buraco negro. Podemos estender essa ideia para a extração de carga, analisando a razão entre o fluxo de carga e energia que passam por um buraco negro com simetria esférica. Assim, temos uma relação $e/\hbar\omega$ e, por conservação de carga e energia, a equação (3.26) se torna (BEKENSTEIN, 1973):

$$\delta M \left(1 - \frac{e\Phi}{\hbar\omega} \right) > 0. \quad (3.31)$$

Disso, observamos que a condição de Misner é satisfeita se $\omega < (e/\hbar)\Phi$, ou seja, a amplificação ocorre com a extração de carga do buraco negro.

3.2 Solução RN-dS (3+1)-Dimensões

O espaço tempo no qual estamos interessados neste estudo é o espaço-tempo de Reissner-Nordström de Sitter em (3+1)-Dimensões. Escrevemos o elemento de linha da

métrica utilizando assinatura do tipo $(-, +, +, +)$:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin(\theta)^2d\phi^2, \quad \text{onde} \quad (3.32)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (3.33)$$

M é a massa do buraco negro, Q a carga elétrica do buraco negro e Λ é a constante cosmológica positiva. Analisando a geometria do espaço-tempo fornecida pela equação (3.33), podemos determinar a posição de algumas particularidades deste buraco negro, entre elas o horizonte de eventos, o qual pode ser determinado fazendo o coeficiente da parte temporal igual a 0:

$$f(r) = 0 \Rightarrow \Lambda r^4 - (3 - 6M)r^2 - 3Q^2 = 0. \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é uma equação de quarta ordem, portanto possui quatro raízes. Dessas quatro raízes encontramos três regiões de interesse, o horizonte de Cauchy r_- , o horizonte de eventos r_+ e o horizonte cosmológico⁴ r_c . Como a equação (3.34) não possui um termo cúbico pelo menos uma das raízes fornecidas é negativa, logo não possui significado físico. Podemos então fatorar a função $f(r)$ em termos de suas raízes e fazemos a seguinte consideração (CHAMBERS, 1997; ZHU et al., 2014):

$$r_0 < r_- < r_+ < r_c, \quad \text{onde} \quad r_0 < 0, \quad (3.35)$$

$$f(r) = \frac{\Lambda}{3r^2} [(r - r_-)(r - r_+)(r_c - r)(r - r_0)], \quad (3.36)$$

onde $r_0 = -(r_- + r_+ + r_c)$ (ZHU et al., 2014). Escrevemos a função $f(r)$ como a equação (3.36) por ser naturalmente integrável.

3.2.1 Equação de Perturbação

Nesta monografia iremos analisar o fenômeno de superradiância para perturbações de partículas escalares carregadas (bósons carregados). Sabemos que este tipo de perturbação é governada pela equação de Klein-Gordon carregada. Consideramos então um campo escalar Ψ com acoplamento mínimo com um quadripotencial $A_\mu = \{-Q/r, 0, 0, 0\}$ da seguinte forma:

$$\left[(\nabla^\mu - iqA^\nu) (\nabla_\mu - iqA_\nu) - \mu^2 \right] \Psi = 0, \quad (3.37)$$

onde q é a carga e μ a massa do campo escalar Ψ . Abrindo a equação acima e realizando as contrações respectivas, podemos reescrever a equação (3.37) da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \Psi = iq (g^{\mu\nu} \nabla_\mu A_\nu + g^{\mu\nu} A_\mu \nabla_\nu) \Psi + q^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \Psi + \mu^2 \Psi. \quad (3.38)$$

⁴ É o horizonte que indica o raio do universo observável.

Podemos facilmente calcular o 4-volume, definido pela raiz do determinante da métrica, $\sqrt{-g} = r^2 \sin(\theta)$, podemos aplicá-lo na equação (3.38). Podemos também usar as componentes de $g^{\mu\nu}$ na equação, como a métrica é diagonal apenas as componentes diagonais surgiram na equação (3.38):

$$-\frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_t [(r^2 \sin(\theta)) f^{-1} \partial_t] \Psi + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r [(r^2 \sin(\theta)) f \partial_r] \Psi + \quad \text{umber} \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta [(r^2 \sin(\theta)) \frac{1}{r^2} \partial_\theta] \Psi + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\phi [(r^2 \sin(\theta)) \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\phi] \Psi = \quad \text{umber} \quad (3.40)$$

$$iq \left[-f^{-1} \partial_t \left(\frac{-Q}{r} \right) - f^{-1} \left(\frac{-Q}{r} \right) \partial_t \right] \Psi - q^2 f^{-1} \frac{Q^2}{r^2} \Psi + \mu^2 \Psi. \quad (3.41)$$

Para nossa solução, consideramos um *Ansatz* para o campo escalar do tipo $\Psi(t, r, \theta, \phi) = \psi(t, r) S(\theta) e^{im\phi}$ assim como (ZHU et al., 2014). Substituindo esse *Ansatz* e rearranjando a equação (3.39) da seguinte forma, temos:

$$-f^{-1} \frac{\partial_t^2 \psi}{\psi} + \frac{2f}{r} \frac{\partial_r \psi}{\psi} + f' \frac{\partial_r \psi}{\psi} + f \frac{\partial_r^2 \psi}{\psi} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial_\theta S(\theta)}{S(\theta)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial_\theta^2 S(\theta)}{S(\theta)} - \frac{m^2}{r^2 \sin^2(\theta)} = \quad \text{umber} \quad (3.42)$$

$$f^{-1} 2iq \frac{Q}{r} \frac{\partial_t \psi}{\psi} - f^{-1} q^2 \frac{Q^2}{r^2} + \mu^2, \quad (3.43)$$

multiplicando toda a equação (3.42) por r^2 podemos resolver a parte angular da seguinte forma:

$$\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial_\theta S(\theta)}{S(\theta)} + \frac{\partial_\theta^2 S(\theta)}{S(\theta)} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{S(\theta)} \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta S(\theta)) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} = -l(l+1), \quad (3.44)$$

onde a constante de separação de variáveis l representa o número multipolar associado ao momento angular da perturbação. Substituindo a equação (3.44) na equação (3.42) e multiplicando por $f\psi(t, r)/r^2$ temos:

$$-\partial_t^2 \psi + \frac{2}{r} f^2 \partial_r \psi + f f' \partial_r \psi + f^2 \partial_r^2 \psi - \frac{f}{r^2} l(l+1) \psi = 2iq \frac{Q}{r} \partial_t \psi - q^2 \frac{Q^2}{r^2} \psi + f \mu^2 \psi. \quad (3.45)$$

Podemos rearranjar a equação (3.45) como uma equação do tipo Schrödinger, escrita como:

$$-\partial_t^2 X(t, r_*) + \partial_{r_*}^2 X(t, r) + 2iq \Phi \partial_t X - V(r) X(t, r_*) = 0, \quad \text{onde} \quad (3.46)$$

$$\Phi = -\frac{Q}{r}. \quad (3.47)$$

A equação (3.46) nos fornece o potencial associado à perturbação e com esse potencial poderemos analisar o intervalo de superradiância. A derivada radial depende da coordenada

tartaruga ⁵ r_* , a qual também será encontrada da equação (3.46). Fazemos então a seguinte transformação:

$$\psi(t, r) = X(t, r_*)N(r), \quad \text{onde} \quad (3.48)$$

$$r = r(r_*). \quad (3.49)$$

Aplicando a regra da cadeia nos operadores de derivada radial e substituindo a equação (3.48) na equação (3.45) encontramos:

$$- N\partial_t^2 X + f^2(r'_* \partial_{r_*} r'_* \partial_{r_*} + (r'_*)^2 \partial_{r_*}^2) XN + \left[\frac{2}{r} f^2 f f' \right] r'_* \partial_{r_*} XN \quad (3.50)$$

$$- 2iq \frac{Q}{r} N \partial_t X - \frac{f}{r^2} l(l+1) NX + q^2 \frac{Q^2}{r^2} XN - f\mu^2 XN = 0. \quad (3.51)$$

Escrevendo a equação (3.50) de uma maneira semelhante à equação (3.46) obtemos:

$$- \partial_t^2 X + \left[2f^2 r'_* \frac{\partial_{r_*} N}{N} r'_* + f^2 r'_* \partial_{r_*} r'_* + \left(\frac{2}{r} f^2 + f f' \right) r'_* \right] \partial_{r_*} X + f^2 (r'_*)^2 \partial_{r_*}^2 X \quad (3.52)$$

$$+ \left[f^2 (r'_*)^2 \frac{\partial_{r_*}^2 N}{N} + f^2 r'_* \partial_{r_*} r'_* \frac{\partial_{r_*} N}{N} + \left(\frac{2}{r} f^2 + f f' \right) r'_* \frac{\partial_{r_*} N}{N} - \frac{f}{r^2} l(l+1) + q^2 \frac{Q^2}{r^2} - f\mu^2 \right] X \quad (3.53)$$

$$+ 2iq\Phi \partial_t X = 0. \quad (3.54)$$

Fazendo o coeficiente de $\partial_{r_*}^2$ unitário encontramos:

$$r_* = \int f^{-1}(r) dr, \quad (3.55)$$

$$r_* = -\frac{1}{\kappa_-} \ln \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right) + \frac{1}{\kappa_+} \ln \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) - \frac{1}{\kappa_c} \ln \left(1 - \frac{r}{r_c} \right) + \frac{1}{\kappa_0} \ln \left(1 - \frac{r}{r_0} \right), \quad (3.56)$$

onde κ_i é a gravidade superficial para cada raiz da função $f(r)$. A função r_* é chamada de coordenada tartaruga, ela mapeia o espaço-tempo entre o horizonte de eventos e o infinito radial da seguinte forma: quando $r \rightarrow r_+$ temos $r_* \rightarrow -\infty$ e para $r \rightarrow r_c$ temos $r_* \rightarrow \infty$. Fazendo o coeficiente de ∂_{r_*} igual a 0 encontramos a função $N(r)$:

$$N(r) = \frac{1}{r}, \quad (3.57)$$

⁵ O adjetivo "tartaruga" decorre de, conforme $r \rightarrow 2M$, $r_* \rightarrow \infty$; ou seja, conforme a coordenada r se aproxima de $2M$, a coordenada r_* cresce indefinidamente sem nunca alcançar, de fato, o raio de Schwarzschild, em analogia ao paradoxo de Aquiles e a tartaruga, de Zenão de Alexandria.

O coeficiente de $X(t, r)$ é igual a $-V(r)$. Disso podemos encontrar o potencial associado à perturbação com a seguinte forma:

$$V(r) = -q^2\Phi^2 + f(r) \left(\frac{f'}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 \right). \quad (3.58)$$

Podemos agora encontrar a equação de perturbação radial assumindo que $X(t, r) = \chi(r)e^{-i\omega t}$; aplicando na equação (3.46) encontramos:

$$\partial_{r_*}^2 \chi + (\omega^2 - \bar{V}(r))\chi = 0, \quad (3.59)$$

$$\bar{V}(r) = 2\omega q \frac{Q}{r} - q^2 \frac{Q^2}{r^2} + f(r) \left(\frac{f'}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 \right), \quad (3.60)$$

onde \bar{V} é o potencial efetivo da perturbação. Como cita (ZHU et al., 2014) é esperado que o potencial efetivo seja negativo na região entre o horizonte cosmológico e o horizonte de eventos e esta região negativa pode conter algumas instabilidades de onde pode surgir o fenômeno da superradiância de forma espontânea. Isso ocorre pois dentro desse espectro onde o potencial efetivo é negativo podem existir perturbações crescentes. Usando r_+ e r_c no potencial efetivo, encontramos um comportamento assintótico para o potencial descrito por:

$$k_+^2 = \omega^2 - \bar{V}(r_+) = \omega^2 - 2\omega q \frac{Q}{r_+} + q^2 \frac{Q^2}{r_+^2} = \left(\omega - q \frac{Q}{r_+} \right)^2, \quad (3.61)$$

$$k_c^2 = \omega^2 - \bar{V}(r_c) = \omega^2 - 2\omega q \frac{Q}{r_c} + q^2 \frac{Q^2}{r_c^2} = \left(\omega - q \frac{Q}{r_c} \right)^2, \quad (3.62)$$

Utilizando os potenciais (3.61) e (3.62) na equação (3.59) podemos resolver a equação de perturbação para ambas as regiões. Chamamos a solução em r_+ como as ondas *ingoing* e a solução em r_c como as ondas *outgoing* escritas como:

$$\chi \sim \begin{cases} \mathcal{T}e^{-ik_+r_*} & \text{quando } r_* \rightarrow -\infty \\ \mathcal{R}e^{ik_c r_*} + \mathcal{I}e^{-ik_c r_*} & \text{quando } r_* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.63)$$

Como sugere (BRITO; CARDOSO; PANI, 2015), dado que a equação (3.59) é uma equação diferencial de segunda ordem, a única opção que apresenta duas soluções linearmente independentes para χ é a nulidade da matriz wronskiana $W = 0$. Para este caso a equação (3.59) possibilita que a função χ tenha um conjugado complexo χ^* e que este conjugado seja a segunda solução linearmente independente. Disso fazemos $W = \chi\chi^{*'} - \chi^*\chi'$ e obtemos:

$$W_1 = 2ik_+|\mathcal{T}|^2, \quad \text{quando } r_* \rightarrow -\infty \quad (3.64)$$

$$W_2 = -2ik_c(|\mathcal{R}|^2 - |\mathcal{I}|^2). \quad \text{quando } r_* \rightarrow \infty \quad (3.65)$$

A matriz wronskiana é nula quando $W_1 = W_2$, o que fornece a seguinte relação:

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}| - \frac{k_+}{k_c}|\mathcal{T}|^2. \quad (3.66)$$

Considerando que 100% das ondas incidentes cheguem à barreira de potencial e substituindo as equações (3.61) e (3.62) na equação (3.66), podemos escrever:

$$|R|^2 = 1 - \frac{(\omega - qQ/r_+)}{(\omega - qQ/r_c)}|\mathcal{T}|^2. \quad (3.67)$$

É fácil observar que o intervalo de superradiância, isto é, $|R|^2 > 1$ ocorre quando:

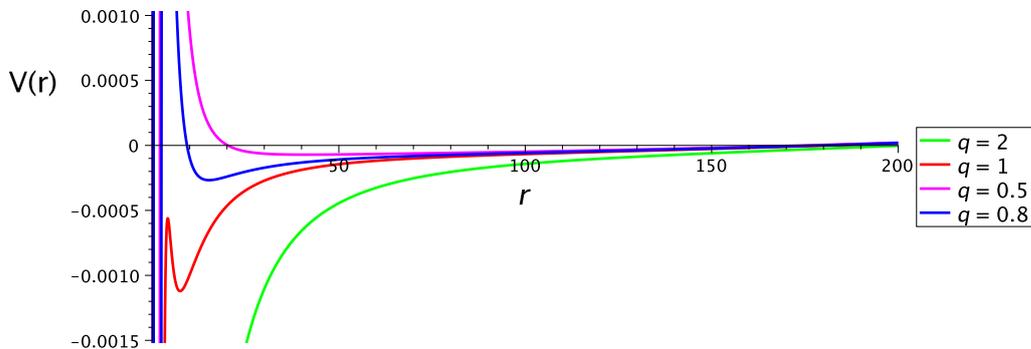
$$\omega > \frac{qQ}{r_c}, \quad (3.68)$$

$$\omega < \frac{qQ}{r_+}, \quad \text{portanto} \quad (3.69)$$

$$\frac{qQ}{r_c} < \omega < \frac{qQ}{r_+}. \quad (3.70)$$

A superradiância torna-se espontânea dentro desse intervalo de frequências. A fim de validar nossos resultados, vamos apresentar gráficos do potencial para diferentes cargas para perturbações não massivas e o número quântico angular $l = 0$.

Figura 2 – Potenciais para diferentes cargas da perturbação escalar q com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

Observamos na figura 2 que os potenciais associados à perturbação para diferentes cargas são descritos por curvas que apresentam regiões com $V(r) < 0$. Esses intervalos onde o potencial é negativo são zonas de instabilidade de onde ondas incidentes são amplificadas

pelo potencial do buraco negro. A medida que estas ondas carregadas interagem com o potencial elétrico, a energia é "roubada" em forma de carga, como discutido na seção 3.1.3.

Uma análise mais detalhada sobre a região descrita pela inequação (3.70) pode ser feita ao analisar a função amplificação Z para diferentes cargas q de ondas não massivas. Definimos a função amplificação como:

$$Z(\omega) = 1 - \frac{|\mathcal{R}|^2}{|\mathcal{T}|^2} = -\frac{(\omega - qQ/r_+)}{(\omega - qQ/r_c)}. \quad (3.71)$$

As zonas esperadas de amplificação para diferentes cargas q são mostradas na tabela 1.

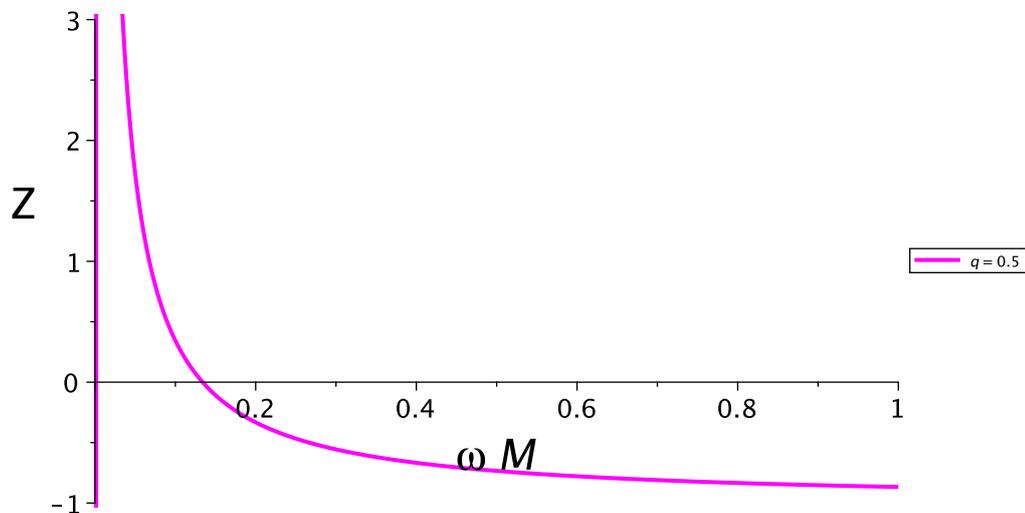
Tabela 1 – Intervalo das regiões de amplificação para diferentes cargas q com $Q = 0.5$, $M = 1$ e $\Lambda = 10^{-4}$

q	qQ/r_c	qQ/r_+
0.5	0.001451825328	0.1339578391
0.8	0.002322920525	0.2143325426
1	0.002903650656	0.2679156782
2	0.005807301312	0.5358313565

Fonte: Autoria própria

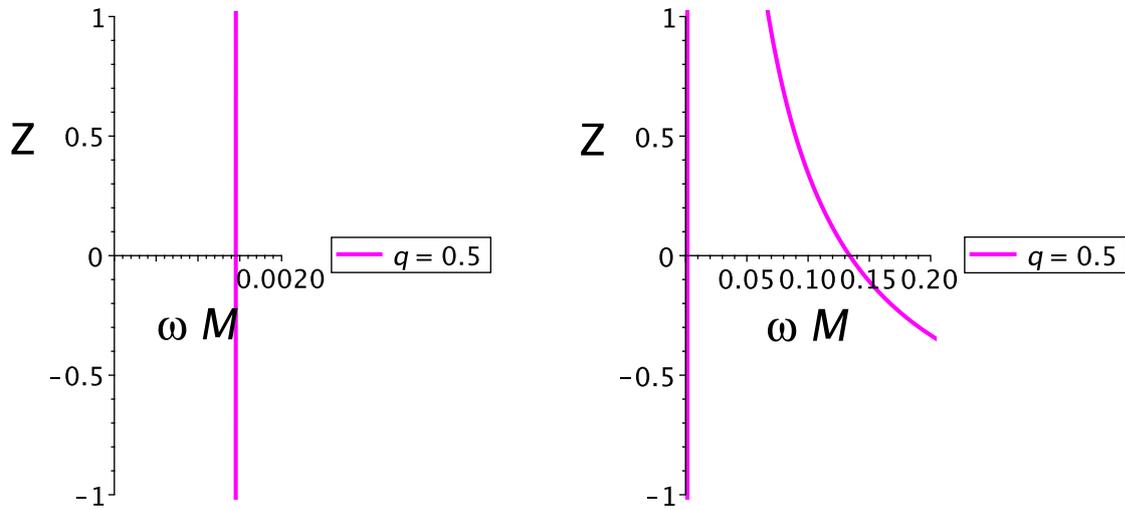
Essa tabela indica os intervalos onde as frequências ω fornecem uma imagem positiva para $Z(\omega)$, isto é, quando $Z > 0$, temos $|\mathcal{R}| > |\mathcal{I}|$, o que indica uma zona de superradiância.

Figura 3 – Função amplificação plotada para carga $q = 0.5$ em um intervalo ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

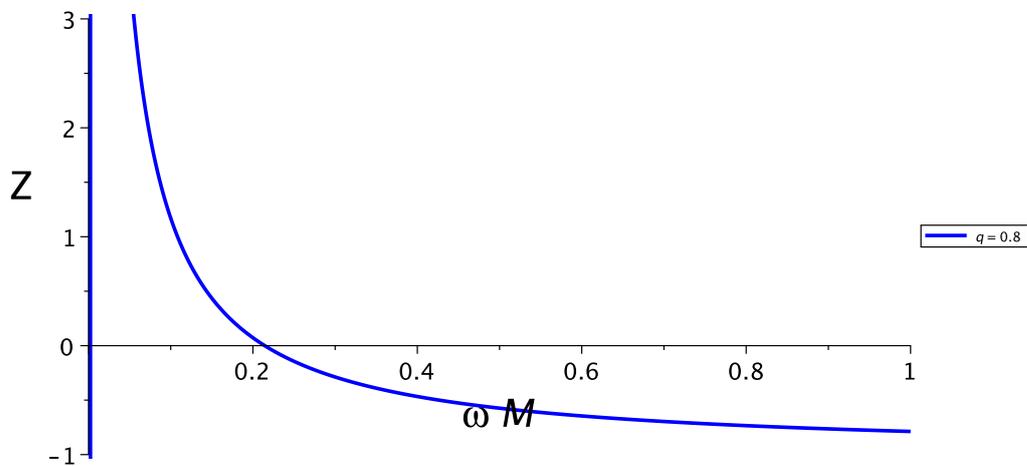
Figura 4 – Pontos do intervalo de amplificação plotada para carga $q = 0.5$ em um domínio ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

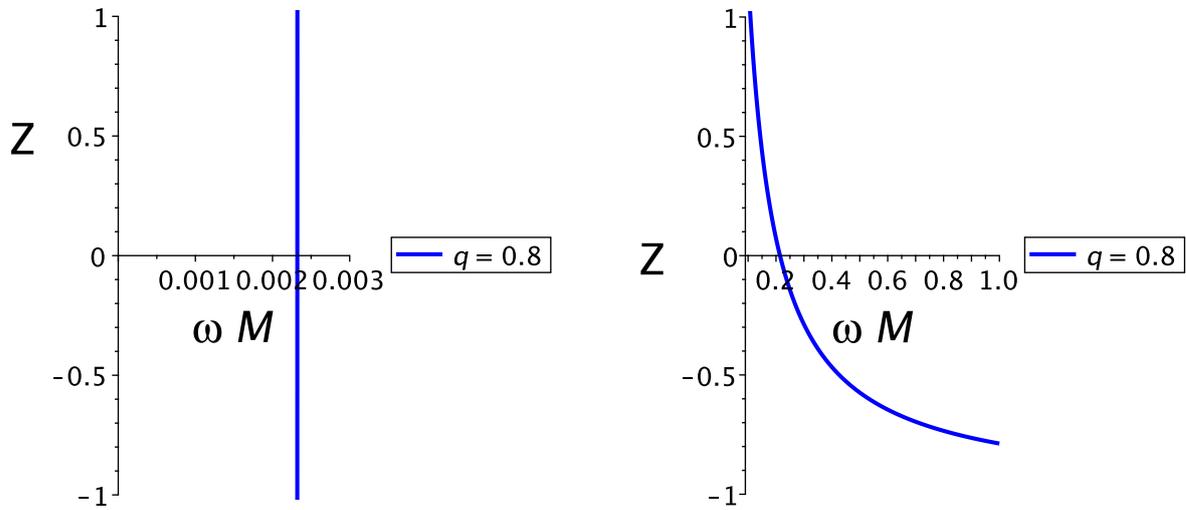
A figura 3 nos mostra o comportamento da função de amplificação dentro de um intervalo real de frequências. A figura 4 nos indica os extremos para os quais a relação (3.70) é respeitada. Observamos que os valores estão em acordo com os fornecidos pela tabela 1 para o valor de carga $q = 0.5$. É esperado que ondas incidentes com frequências contidas dentro do intervalo (3.70) tenham sua amplificação devido à extração de carga do potencial efetivo. Nas figuras 5, 7 e 9 serão mostradas as curvas para os casos com $q = 0.8$, $q = 1$ e $q = 2$.

Figura 5 – Função amplificação plotada para carga $q = 0.8$ em um intervalo ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



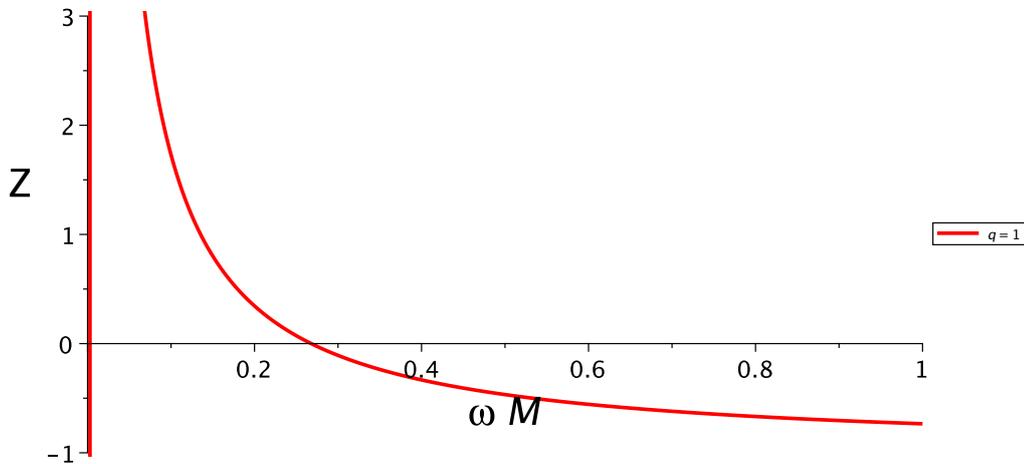
Fonte: Autoria própria.

Figura 6 – Pontos do intervalo de amplificação plotada para carga $q = 0.8$ em um domínio ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

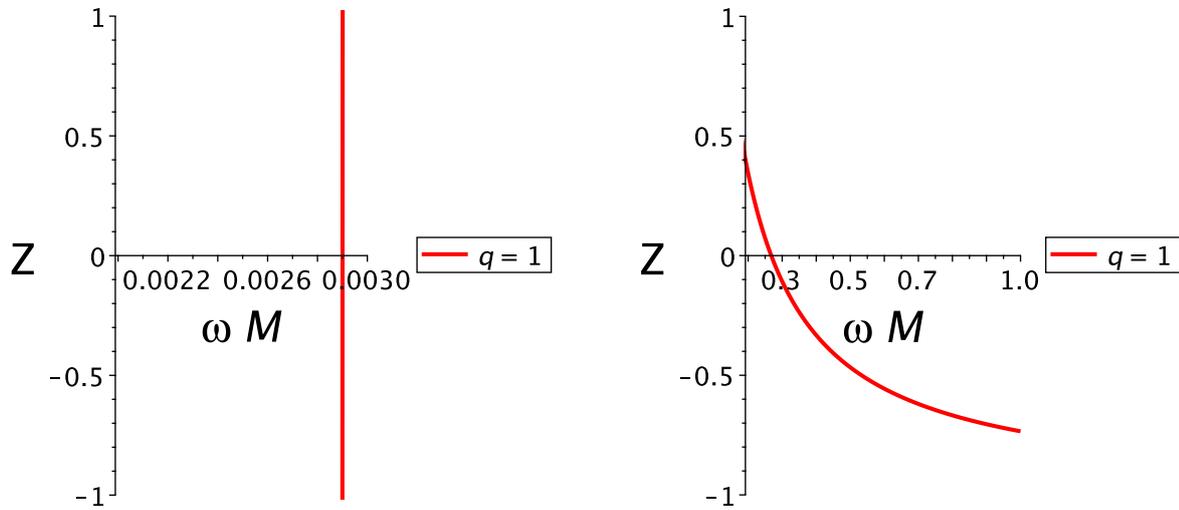
Figura 7 – Função amplificação plotada para carga $q = 1$ em um intervalo ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

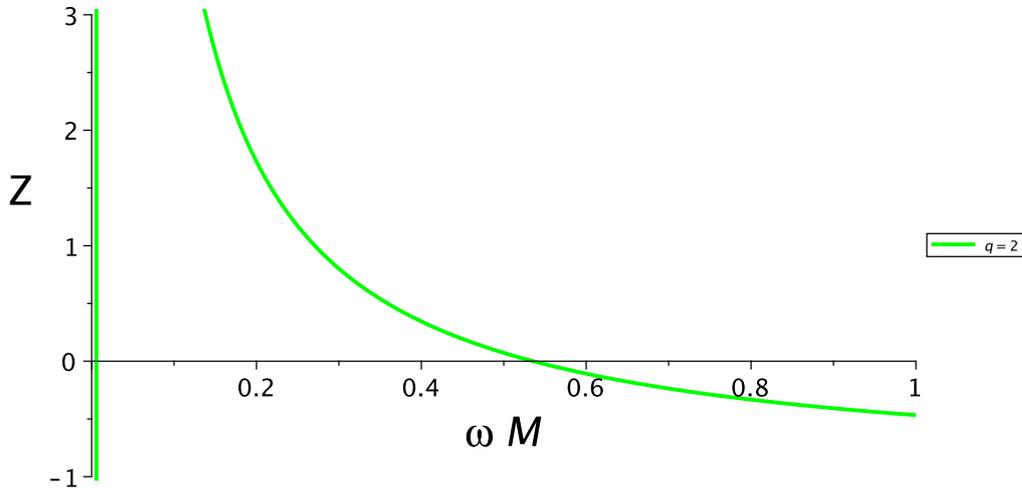
Observamos que para todos os casos, o início e fim das zonas de superradiância estão em concordância com as calculadas na tabela 1, isso indica que o modelo descreve bem o fenômeno da superradiância já que a região de amplificação ocorre nos intervalos previamente calculados na tabela. Observamos também que ao aumentarmos o valor da carga da perturbação escalar q , o início e o fim da região de amplificação é deslocado para a direita, além disso, observamos um aumento na diferença entre o ponto inicial e final, isso pode ser melhor observado nos gráficos. Para o caso onde $q = 0.5$ na figura 4 vemos que apenas frequências entre $0.001451825328 < \omega < 0.1339578391$ podem sofrer amplificação.

Figura 8 – Pontos do intervalo de amplificação plotada para carga $q = 1$ em um domínio ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

Figura 9 – Função amplificação plotada para carga $q = 2$ em um intervalo ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$

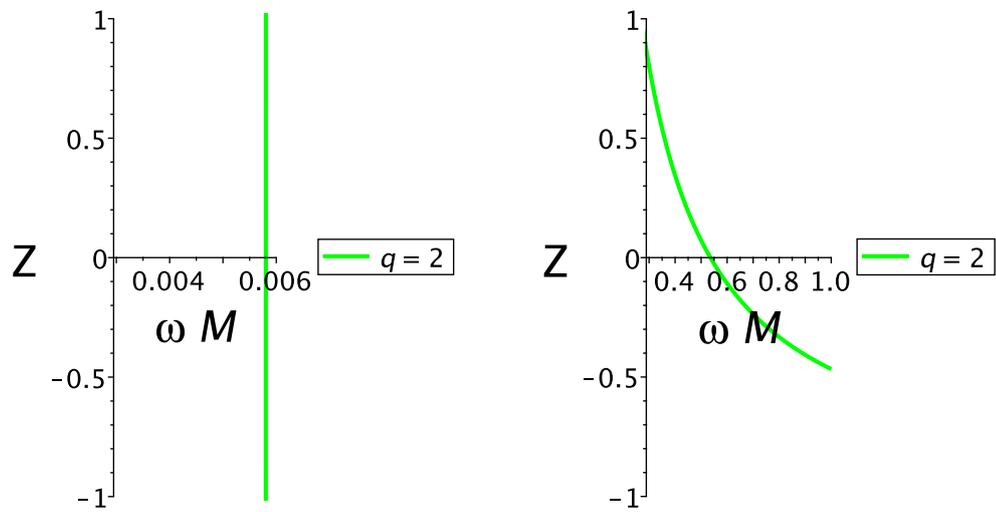


Fonte: Autoria própria.

Já para o caso onde $q = 2$ na figura 9 esse intervalo comporta um maior espectro de frequências, já que ele se estende num intervalo $0.005807301312 < \omega < 0.5358313565$.

O estudo focou somente no caso onde consideramos o número quântico $l = 0$. Como indicam os estudos de (ZHU et al., 2014), a instabilidade para o caso carregado não ocorre para números maiores de l . Um fato interessante é que para o caso de $l = 1$ (ZHU et al., 2014) não encontrou zonas negativas no potencial associado, que poderiam fornecer zonas de instabilidade com origem superradiante, contudo, os estudos dos modos quasinormais

Figura 10 – Pontos do intervalo de amplificação plotada para carga $q = 2$ em um domínio ωM com $Q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $M = 1$



Fonte: Autoria própria.

indicam que o buraco negro permanece estável para esse tipo de perturbação e apresentam superradiância.

4 Conclusão

A superradiância é um fenômeno de grande valor para a física e seu entendimento é fundamental pelas diversas aplicações que ela possui. Observamos que é possível estender esse fenômeno da mecânica quântica para a teoria de buracos negros e disso, demonstramos que este efeito possibilita uma maneira de extrairmos energia de um buraco negro de forma espontânea pela amplificação de ondas escalares. Contudo, este efeito também pode ser generalizado para outros tipos de radiação como menciona o autor ([BEKENSTEIN, 1973](#)).

Embora a nossa tecnologia atual não seja avançada o suficiente, em um contexto futurista, o aproveitamento dessa energia extraída poderia beneficiar a raça humana por se tratar de um fenômeno "natural", o qual surge de instabilidades geradas em um buraco negro, por diferentes tipos de perturbação.

Nessa monografia, mostramos como esse fenômeno surge em um buraco negro do tipo Reissner-Nordström-de Sitter, quando perturbado por ondas escalares carregadas ([ZHU et al., 2014](#)). A partir da equação de Klein-Gordon para um campo carregado, obtivemos a equação radial que a perturbação deve obedecer, em termos da coordenada tartaruga. Analisando o potencial dessa equação para diferentes cargas do campo escalar com número multipolar $l = 0$ através dos gráficos, encontramos que a região entre o horizonte de eventos e o horizonte cosmológico corresponde a um "vale" de potencial negativo. Essa região já é um forte indício da possível existência de instabilidades.

Considerando um experimento de espalhamento nesse tipo de potencial, é possível definir coeficientes de reflexão e transmissão associados ao comportamento assintótico da perturbação tanto no horizonte de eventos quanto no horizonte cosmológico. Esse procedimento mostra que, para diferentes valores de carga da perturbação escalar, encontramos diferentes regiões onde é possível observar superradiância. Portanto, podemos afirmar que as instabilidades do potencial para $l = 0$ tem origem superradiante. Além do mais, esse resultado foi verificado nos gráficos da função amplificação mostrados no capítulo anterior.

Finalmente, vale a pena ressaltar que, como mencionam os autores ([KONOPLYA; ZHIDENKO, 2014](#)), a condição de superradiância também aparece para números multipolares mais altos. Dessa maneira, nem todos os modos superradiantes implicam em uma instabilidade no buraco negro de Reissner-Nordström-de Sitter.

Referências

- BEKENSTEIN, J. D. Extraction of energy and charge from a black hole. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 7, p. 949–953, Feb 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.949>>. Citado 4 vezes nas páginas 14, 36, 37 e 49.
- BEKENSTEIN, J. D.; SCHIFFER, M. The many faces of superradiance. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 58, n. 6, Aug 1998. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.58.064014>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.
- BRITO, R.; CARDOSO, V.; PANI, P. *Superradiance: Energy Extraction, Black-Hole Bombs and Implications for Astrophysics and Particle Physics*. Springer International Publishing, 2015. (Lecture Notes in Physics). ISBN 9783319190006. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=gGonCgAAQBAJ>>. Citado 9 vezes nas páginas 22, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36 e 41.
- CALOGERACOS, A.; DOMBEY, N. Klein tunnelling and the klein paradox. *International Journal of Modern Physics A*, v. 14, n. 04, p. 631–643, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X99000312>>. Citado na página 23.
- CHAMBERS, C. M. The Cauchy horizon in black hole de sitter space-times. *Annals Israel Phys. Soc.*, v. 13, p. 33, 1997. Citado na página 38.
- Damour, T. Surface Effects in Black-Hole Physics. In: *Marcel Grossmann Meeting: General Relativity*. [S.l.: s.n.], 1982. p. 587. Citado na página 35.
- DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 93, p. 99–110, Jan 1954. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99>>. Citado na página 31.
- GINZBURG, V. L. Radiation by uniformly moving sources (vavilov–cherenkov effect, transition radiation, and other phenomena). *Physics-Uspekhi*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 39, n. 10, p. 973–982, oct 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070%2Fpu1996v039n10abeh000171>>. Citado na página 31.
- GORODETSKAYA, Y. Estudo de noção de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica com aplicações na relatividade geral. In: . [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 19.
- HAWKING, S. W. Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 26, p. 1344–1346, May 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.1344>>. Citado na página 31.
- HOLSTEIN, B. R. Klein’s paradox. *American Journal of Physics*, v. 66, n. 6, p. 507–512, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.18891>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- HUND, F. Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten wellenbild der materie. *Zeitschrift für Physik*, v. 117, n. 1, p. 1–17, 1941. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01337403>>. Citado na página 23.

KLEIN, O. Die reflexion von elektronen an einem potentialsprung nach der relativistischen dynamik von dirac. *Zeitschrift für Physik*, v. 53, n. 3, p. 157–165, 1929. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01339716>>. Citado na página 23.

KONOPLYA, R.; ZHIDENKO, A. Charged scalar field instability between the event and cosmological horizons. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 90, n. 6, Sep 2014. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.064048>>. Citado na página 49.

RIBEIRO, E. V. S.; CUADROS-MELGAR, B.; CARDOSO, F. R. Gerações de soluções exatas em Relatividade Geral através do Método de Kerr-Schild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 41, 00 2019. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172019000400408&nrm=iso>. Citado na página 13.

RYDER, L. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144. Disponível em: <<https://books.google.co.uk/books?id=L9YhYS7gcXAC>>. Citado na página 22.

SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 38, 00 2016. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172016000400301&nrm=iso>. Citado na página 13.

SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9781139479004. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GgRRt7AbdwQC>>. Citado na página 17.

TEUKOLSKY, S. A. The kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 32, n. 12, p. 124006, Jun 2015. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124006>>. Citado na página 13.

THORNE, K. et al. *Black Holes: The Membrane Paradigm*. Yale University Press, 1986. (Silliman Memorial Lectures). ISBN 9780300037708. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=T94hD5rR8oYC>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

Zel'Dovich, Y. B. Amplification of Cylindrical Electromagnetic Waves Reflected from a Rotating Body. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 35, p. 1085, jan. 1972. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 34.

ZHU, Z. et al. Stability of reissner-nordström black hole in de sitter background under charged scalar perturbation. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 90, n. 4, Aug 2014. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.044042>>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 38, 39, 41, 46 e 49.

ZNAJEK, R. The electric and magnetic conductivity of a kerr hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 185, p. 833–840, 11 1978. Citado na página 35.