UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

Logaritmos: Ensiná-los ou não? Uma breve discussão.

LEANDRO DE OLIVEIRA SODRÉ

LORENA - SP

2008

LEANDRO DE OLIVEIRA SODRÉ

Logaritmos: Ensiná-los ou não? Uma breve discussão.

Monografia apresentada ao 6.º curso de Pós-Graduação "Lato Sensu" em Matemática da Escola de Engenharia de Lorena.

Orientador: Profº. Dr. Antonio Sérgio Cobianchi

LORENA - SP

2008

LEANDRO DE OLIVEIRA SODRE

LOGARITMOS: ENSINÁ-LOS OU NÃO? UMA BREVE DISCUSSÃO.

Monografia apresentada ao 6.º curso de Pós-Graduação "Lato Sensu" em Matemática da Escola de Engenharia de Lorena.

Profº. Dr. Antonio Sérgio Cobianchi (Orientador) – USP (EEL)

Profº. Dr. Adriano Francisco Siqueira – USP (EEL)

Profº. Dr. Oswaldo Luiz Cobra Guimarães – USP (EEL)

MENSAGEM

Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento.

Porque melhor é a sua mercadoria do que a mercadoria de prata, e a sua renda do que o ouro mais fino.

Mais preciosa é do que os rubins; e tudo o que podes desejar não se pode comparar a ela.

Aumento de dias há na sua mão direita; na sua esquerda, riqueza e honra.

Os seus caminhos são caminhos de delícias, e todas as suas veredas, paz.

É árvore da vida para os que a seguram, e bem-aventurados são todos os que a retêm.

O Senhor, com sabedoria, fundou a Terra; preparou os céus com inteligência.

Pelo seu conhecimento, se fenderam os abismos, e as nuvens destilam o orvalho.

PROVÉRBIOS 2: 13 – 20

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, fiel amigo, que me deu condições de concluir este trabalho; agradeço aos meus pais, que têm sido grandes companheiros em minha caminhada; aos meus irmãos, pelo grande apoio; aos meus amigos, pela amizade sincera; aos meus irmãos em Cristo, pelas constantes orações e palavras de ânimo; à minha noiva Raquel, por tanto amor, carinho e compreensão; aos meus colegas de trabalho, pelo apoio e incentivo; ao meu ilustre orientador, Professor Doutor Antônio Sérgio Cobianchi, pelo muito que aprendi com ele; e aos demais professores do 6.º Curso de Especialização em Matemática da “FAENQUIL”.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma discussão sobre a validade ou não de, atualmente, se ensinar logaritmos nas escolas brasileiras. Inicialmente, são feitas algumas perguntas que colocam em dúvida a necessidade deste ensino e outras que ponderam sobre possíveis desvantagens da exclusão desse conteúdo do currículo escolar. Posteriormente, são apresentados ao leitor os conceitos básicos dos logaritmos. São levantados argumentos para as conclusões ao ser mostrada a história dos logaritmos, um pouco da biografia de seu inventor, e também oito aplicações do conteúdo. Foi registrado como alguns livros abordam o conteúdo e, antes de serem feitas as considerações finais, foi feita a análise de uma pesquisa sobre a opinião de alunos em relação ao aprendizado dos logaritmos. As considerações finais registram que manter o ensino dos logaritmos nas escolas brasileiras pode trazer muitos benefícios aos alunos.

Palavras-chave: logaritmos; ensino dos logaritmos; história dos logaritmos; aplicações dos logaritmos.

ABSTRACT

This paper discusses about the real need of the logarithm teaching process at the Brazilian schools. We start this monograph asking some issues which question this need and, on the other hand, trying to show the importance of this Math subject during school program. First we present some basic concepts about logarithm. Some arguments are based on the history of logarithm showing the biography of its author and the applications of it. Next we show how some books plots this contents and before the Conclusions, we made a research into the student opinions about the logarithm learning process. At the end of our research we realized that the logarithm teaching process at the Brazilian schools can bring many benefits to the students.

Key-words: logarithm; logarithm teaching process; the History of logarithm; applications of logarithm.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 1

2. REFERENCIAL TEÓRICO 4

3. CONHECIMENTOS BÁSICOS DE LOGARITMOS 8

3.1. Logaritmos decimais 12

3.2. Função logarítmica 14

4. UM BREVE HISTÓRICO DOS LOGARITMOS 16

4.1. John Napier 16

4.2. A invenção dos logaritmos... 18

4.3. Construção geométrica dos logaritmos........ 24

4.4. Um pouco sobre a história dos logaritmos decimais 26

5. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS 29

5.1. Na Matemática Financeira 29

5.2. Na Biologia 30

5.3. Na escala Richter.. 31

5.4. No cálculo da intensidade sonora 32

5.5. No cálculo do pH 33

5.6. No relógio de carbono.. 34

5.7. Na dosagem de medicamentos.. 37

5.8. E**m previsões estatísticas**... 38

6. ABORDAGEM DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DOS LOGARITMOS 40

7. ANÁLISE DE UMA PESQUISA DE OPINIÃO 44

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS 46

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 51

ANEXOS 55

Anexo A – Um exemplo de multiplicação utilizando uma das fórmulas de Prostaférese 55

Anexo B – Um exemplo de como multiplicar utilizando logaritmos decimais 56

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, no Brasil, o ensino dos logaritmos está inserido no currículo de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio (BRASIL, 2002, p. 128).

Esse conteúdo, historicamente, surgiu com o objetivo de atender à necessidade de facilitar, essencialmente, as operações de multiplicação e divisão. Na época, os cálculos eram feitos utilizando-se o ábaco. Como ele é um instrumento mecânico com um número finito de hastes, as operações feitas nele são limitadas àquelas em que o resultado tem, no máximo, tantos algarismos quantas forem as hastes do ábaco utilizado. Alem disso, o sistema posicional decimal de numeração estava começando a ser utilizado na Europa, portanto fazer cálculos nesse sistema despendia bastante tempo. Hoje, a maioria dos cálculos são efetuados, com muita rapidez e precisão, por pequenos aparelhos de baixo valor aquisitivo: as calculadoras. Ninguém mais utiliza o ábaco ou tábuas de logaritmos para efetuar cálculos. Sendo assim, ainda existem motivos pedagógicos que justifiquem a permanência do ensino dos logaritmos nas escolas?

Muitos defendem a idéia de que devemos ensinar apenas aquilo que tenha sentido ou aplicação imediata no cotidiano dos alunos. De acordo com Adler (19--, p. 13), Rousseau dizia que a criança aprende unicamente o que compreende ter valor real e imediato para seu uso ou prazer. Na rotina diária da maior parte da população, os logaritmos não são utilizados. Poder-se-ia, então, dizer que não há necessidade nem importância no ensino dos logaritmos? Todo o conhecimento do assunto e suas contribuições históricas devem ser abandonados e esquecidos?

Há, no entanto, inúmeras aplicações dos logaritmos em diversas ciências, como a Física, a Biologia, a Química e até mesmo em alguns campos da própria Matemática, como a Estatística e a Matemática Financeira. Além de ser aplicáveis, mesmo em situações específicas, os logaritmos exigem abstração e certo grau de criatividade na realização de alguns exercícios, como os que fornecem o logaritmo de um número, em certa base, e pedem o logaritmo de um outro, aparentemente bem diferente daquele. Exemplificando: Dado $\log 2 = 0{,}3010$, calcule $\log 50$. Os logaritmos são dotados de uma lógica muito interessante, e a forma como se deu a invenção deles pode servir como fonte de inspiração e motivação para aqueles que se interessam pela Matemática. Portanto, privar os alunos desse conteúdo não seria privá-los de momentos nos quais eles poderiam estar desenvolvendo a criatividade, a capacidade de abstrair e o gosto pela lógica matemática? O estudo de tal conteúdo não poderia proporcionar aos alunos um contato curioso e produtivo com a calculadora científica e com o computador?

Diante dessas questões, fica evidente a necessidade de se pesquisar sobre a validade ou não de, nos dias de hoje, ensinar logaritmos nas escolas brasileiras.

Com o objetivo de encontrar respostas para essas indagações, propomo- nos, neste trabalho, a fazer um estudo panorâmico sobre o assunto.

Assim, apresentamos, na Seção 2, um quadro teórico com alguns comentários sobre temas educacionais que consideramos importantes e que servirão de base para nossas considerações finais. Na Seção 3, registramos alguns conceitos básicos dos logaritmos, encontrados em quase todos os livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio. Na Seção 4, relatamos um pouco da história do conteúdo, iniciando por uma rápida biografia de John Napier, passando pela forma como se deu a invenção dos logaritmos, pela sua construção geométrica e pelo surgimento dos logaritmos decimais. Na Seção 5, mostramos oito aplicações dos logaritmos: na Matemática Financeira, na Biologia, na Escala Richter, no cálculo da Intensidade Sonora, no cálculo do pH, no relógio de carbono, na dosagem de medicamentos e em previsões estatísticas. Mostramos, na Seção 6, um resumo da abordagem que alguns livros didáticos dão ao ensino desse conteúdo. Na

Seção 7, analisamos o resultado de uma pesquisa que realizamos sobre a opinião dos alunos em relação ao gosto deles pelos logaritmos. Por fim, na Seção 8, fazemos as considerações finais sobre a pesquisa.

Com este trabalho, também pretendemos fornecer alguns subsídios que auxiliem professores de Matemática em suas reflexões sobre o ensino dos logaritmos, e procuramos criar elementos que possam, além de facilitar futuras decisões sobre o currículo escolar, gerar melhorias no ensino desse conteúdo. Assim como o filósofo alemão Friedrich Wilhelm Nietzsche (1844 – 1900) ao escrever seus textos (LAROSSA, 2005, p. 21), não temos o objetivo de transmitir um conteúdo de verdade absoluta, nem colocar um saber contra outro saber, nem sequer instruir o leitor. Desejamos expressar uma opinião que combine com outras opiniões, com outras experiências e possa produzir algo que vá além do que já se conhece, algo que vá além das nossas experiências vividas até aqui.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos alguns comentários sobre variados temas relacionados à educação. Diante de tantos temas pertinentes ao assunto, escolhemos alguns que julgamos ser de grande importância para a pesquisa proposta, a começar pela Escola e sua função na sociedade.

A Escola é um espaço social destinado à prática de ensinar e à prática de aprender. Aprender é uma prática, pois o aluno é ativo no seu processo de aprendizagem e, de acordo com Onrubia (2003, p. 123), é ele quem *constrói, modifica, enriquece e diversifica seus esquemas de conhecimento a respeito de diferentes conteúdos escolares a partir do significado e do sentido que pode atribuir a esses conteúdos e ao próprio fato de aprendê-los*. Ao conjunto dessas duas práticas damos o nome de Educação Escolar.

Dentro da visão construtivista, o ensino é entendido como uma ajuda ajustada ao processo de aprendizagem e tem como objetivo levar o aluno a um nível em que as modificações nos seus esquemas de conhecimento sejam suficientemente profundas, significativas e permanentes, ou seja, ele deverá atingir um estado de autonomia para compreender conceitos e atuar de modo crítico e ético na sociedade. Assim, o aluno poderá enfrentar as situações do seu cotidiano adequadamente e sozinho.

O professor tem a tarefa de ajudar os alunos, de forma ajustada a cada um, a aprender, da maneira mais significativa possível, aquilo que é necessário ao seu desenvolvimento pessoal e à sua capacidade de compreensão da realidade e de atuação nela. De acordo com Onrubia (2003, p. 123), sem essa ajuda, é altamente improvável que os alunos cheguem ao nível esperado no tempo previsto para o ensino escolar.

De modo simplificado, a Escola é uma instituição social e socializadora, que valoriza e incentiva construções sócioculturais e favorece o bem-estar e o desenvolvimento geral dos alunos em suas dimensões sociais, de equilíbrio pessoal e cognitivas; os conteúdos de aprendizagem são culturais/sociais; o professor é agente mediador entre indivíduo, sociedade e conhecimento; o aluno é aprendiz social e é ativo nesse processo; o desenvolvimento humano é cultural e contextualizado (SOLÉ e COLL, 2003, p. 14 e 15).

A verdadeira Escola, na opinião de Sole e Coll (2003, p. 15) e de Freire (1996), é aquela capaz de atender à diversidade. Assim, a Escola deve atender igualmente tanto a alunos que gostam quanto a alunos que não gostam de Matemática, Física, História, Português, ou qualquer outra disciplina. Portanto, a educação deve ser diversificada, ora direcionando seus projetos a alunos que gostam de equipamentos eletrônicos, ora aos que preferem esportes, leitura, experiências em laboratórios, exercícios abstratos, trabalhos artesanais, em grupos ou individuais, dentre outras preferências que os alunos possam apresentar. É bem claro que, em dois alunos de uma sala, uma única aula provoca reações diferentes; isso é parte da individualidade e unicidade de cada ser humano.

Infelizmente, o ensino escolar brasileiro, em geral, é muito compartimentado, ou seja, cada ramo da ciência é tratado separadamente, sem nenhuma interligação. Porém, um tratamento interdisciplinar tem recebido grande destaque nas discussões pedagógicas dos últimos anos. Guerra et al. (1998, p. 33) comentam que

> *a extrema compartimentalização do conhecimento em disciplinas isoladas produz nos estudantes a falsa impressão de que o conhecimento e o próprio mundo são fragmentados. Tal visão implica numa formação que acaba sendo, na realidade, uma deformação.*

Fica evidente que a Escola deve proporcionar ao aluno uma formação que o leve a perceber a importância e as aplicações de cada um dos ramos da ciência e o elo existente entre cada um desses ramos. De acordo com Maragom e Lima (2002, p. 20), Izabel Cristina Petráglia afirma que *o conjunto beneficia o ensino porque o aluno busca relações para entender. Só quando ele sai da disciplina e consegue contextualizar é que ele vê ligação com a vida* . Assim, a interdisciplinaridade no ensino contribui para a formação de cidadãos capazes de compreender melhor a realidade e de tomar decisões de maneira mais consciente.

Como quase todas as Ciências fazem uso da Matemática, essa disciplina poderia, facilmente, ser trabalhada de forma interdisciplinar nas Escolas. A ausência dessa abordagem no ensino de Matemática pode ser um dos fatores que justifiquem a dificuldade apresentada por muitos alunos na aprendizagem dessa disciplina.

Atualmente, de acordo com Gravina e Santarosa (1998, p. 6), a Educação conta com um novo aliado para a superação das dificuldades no aprendizado e afirmam que *os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem*. Diante de uma sociedade altamente tecnológica,

> *não é mais possível ignorar as alterações que as tecnologias da informação e da comunicação (TICs) provocam na forma como as pessoas vêem e aprendem o mundo, bem como desprezar o potencial que tais tecnologias apresentam quando incorporadas à educação*. (KAMPFF et al., 2004, p. 1)

Também incentivando o uso de tecnologias no ensino, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OC-EM), documento do Governo Federal, afirmam que *é importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática* (BRASIL, 2006, p. 87).

Fácil é perceber que a tarefa do professor é árdua, cabe a ele preparar e ministrar aulas, avaliar os alunos, fazer cursos de atualização, aperfeiçoamento e especialização, dentre outros, e colocar em prática os novos conhecimentos adquiridos. Porém, mesmo diante de tantos desafios inerentes à educação escolar, a alegria de ensinar torna-se uma exigência para aqueles que se dispõem a ser educadores (FREIRE, 1996, p. 80). Alves, em *A alegria de ensinar* (2003, p.13), afirma que *o mestre nasce da exuberância da felicidade* e, em *Conversas sobre educação* (2003, p. 83), registra que *quando se admira um mestre, o coração dá ordens à inteligência para aprender as coisas que o mestre sabe*. A palavra discípulo está diretamente relacionada com a palavra mestre e nos remete à idéia de uma pessoa que deseja ser semelhante a seu superior. Solé e Coll (2003, p. 23) nos ensinam que no sentido que o aluno atribui ao processo de aprendizagem intervêm os aspectos motivacionais e afetivo-relacionais. Daí se percebe que, mesmo diante de uma tarefa árdua, o professor deve ter vontade e prazer de ensinar e conclui-se que, quando um professor tem alegria de ensinar, é muito mais provável que o aluno se motive a aprender o conteúdo ministrado.

Essa pequena explanação de alguns tópicos que consideramos importantes sobre a Educação servirá como instrumento de análise desta pesquisa.

3. CONHECIMENTOS BÁSICOS DE LOGARITMOS

A definição de logaritmos utilizada hoje, proposta pelo grande matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) em 1728 (MAOR, 2004, p. 22) é: “Logaritmo de um número real *N*, maior que zero, na base *b*, real positiva e diferente de 1, é igual a *x* se, e somente se, *b* elevado a *x* for igual a *N*” (*N* é chamado de logaritmando). Utilizando linguagem matemática, escrevemos:

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N,\ 0 < b \neq 1 \text{ e } N > 0$$

A condição $0 < b \neq 1 \text{ e } N > 0$ é feita para garantir a existência e a unicidade da solução, quando se considera o conjunto universo como sendo o dos números reais. Caso não houvesse a restrição seria impossível, utilizando a definição, calcular $\log_1 3$ e $\log_{-2} -4$, por exemplo, e existiriam infinitas soluções para $\log_1 1$.

Dessa definição surgem algumas propriedades imediatas:

1) $\log_N N = 1$, pois $N^1 = N$.

2) $\log_N 1 = 0$, pois $N^0 = 1$.

3) $b^{\log_b N} = N$, pois sendo $\log_b N = \log_b N$, pela definição, temos que $b^{\log_b N} = N$.

4) $\log_b b^m = m$, pois sendo $b^m = b^m$, pela definição, segue que $\log_b b^m = m$.

5) $\log_b N = \log_b M \Leftrightarrow N = M$. Podemos justificar essa equivalência da seguinte maneira:

Provemos, inicialmente, a implicação $\log_b N = \log_b M \Rightarrow N = M$.

Se $\log_b N = \log_b M$, pela definição de logaritmo, temos que $b^{\log_b M} = N$. Pela terceira propriedade, $b^{\log_b M} = M$. Logo, **M = N** $\boxed{1}$.

Provemos, agora, que, se N = M, então $\log_b N = \log_b M$.

Seja N = M. Suponha $\log_b N = x$ e $\log_b M = y$. Assim, $b^x = N$ e $b^y = M$. Como N = M, segue que $b^x = b^y$, de onde concluímos que x = y e, portanto, $\mathbf{\log_b N = \log_b M}$ $\boxed{2}$.

Concluímos, de $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$, que $\log_b N = \log_b M \Leftrightarrow N = M$.

Uma outra propriedade dos logaritmos é que $\log_b N = \frac{\log_c N}{\log_c b}$, respeitando as condições de existência para os logaritmos. Essa fórmula da mudança de base mostra que existe uma relação entre os logaritmos em qualquer base que quisermos considerar.

Verificamos a validade da fórmula da seguinte maneira:

Sejam $\log_b N = x$, $\log_c N = y$, e $\log_c b = z$. Assim, $b^x = N, c^y = N$ e $c^z = b$. Substituindo a segunda e a terceira igualdade na primeira, temos que $(c^z)^x = c^y$. Logo, xz = y e, portanto, $x = \frac{y}{z}$, ou seja, $\log_b N = \frac{\log_c N}{\log_c b}$.

Os logaritmos foram desenvolvidos no início do século XVII e possuem quatro propriedades operatórias muito interessantes. Essas propriedades foram utilizadas, por muitos anos, para facilitar cálculos de multiplicação, divisão, radiciação e potenciação. Essas propriedades são:

1) $\log_b M \cdot N = \log_b M + \log_b N$

Demonstração:

Seja $\log_b M \cdot N = x$.

$\log_b M \cdot N = x \Rightarrow \mathbf{b^x = M \cdot N}$ $\boxed{1}$

Seja $\log_b M = y$ e $\log_b N = z$. Assim, $\mathbf{b^y = M}$ $\boxed{2}$ e $\mathbf{b^z = N}$ $\boxed{3}$.

Substituindo $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ em $\boxed{1}$, temos que $b^x = b^y \cdot b^z \Rightarrow b^x = b^{y+z} \Rightarrow x = y + z$.

Portanto, $\log_b M \cdot N = \log_b M + \log_b N$.

Essa propriedade facilitava a operação de multiplicação, transformando-a em adição. No Apêndice B mostramos como isso era feito calculando o produto 21,316·4,1439, utilizando conceitos de logaritmos decimais, ou logaritmos de base 10.

2) $\log_b M \div N = \log_b M - \log_b N$ (Essa propriedade facilitava a divisão, e sua demonstração é análoga à da propriedade 1.)

3) $\log_b M^n = n \log_b M$

Demonstração:

Sejam $\log_b M = x$ e $\log_b M^n = y$. Assim, aplicando a definição de logaritmos, temos que $b^x = M$ $\boxed{1}$ e $b^y = M^n$ $\boxed{2}$. Substituindo $\boxed{1}$ em $\boxed{2}$, segue que $b^y = \left(b^x\right)^n \Rightarrow b^y = b^{nx} \Rightarrow y = nx$, ou seja, $\log_b M^n = n \log_b M$.

Essa propriedade era utilizada para tornar mais simples o cálculo de potências, que passou a ser feito através de uma simples multiplicação.

4) $\log_b \sqrt[n]{M} = \dfrac{\log_b M}{n}$

Demonstração:

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \log_b M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_b M = \frac{\log_b M}{n}.$$

Podemos perceber que, por essa propriedade, o cálculo de uma raiz, de índice qualquer, pode ser reduzido a uma simples divisão.

3.1 – Logaritmos decimais

Logaritmos decimais ou comuns são os logaritmos de base 10. Esses logaritmos possuem características bem particulares. Em sua notação, podemos omitir a base, ou seja, podemos escrever apenas log x, pois significa o mesmo que $\log_{10}$ x.

Sabemos que qualquer número real positivo está compreendido entre duas potências de 10 com expoentes inteiros consecutivos. Podemos então escrever que, dado $x \in \Re_{+}^{*}$, existe $C \in Z$ tal que $10^{C} \leq x < 10^{C+1}$. Decorre então que $\log 10^{C} \leq \log x < \log 10^{C+1}$ e, conseqüentemente, $C \leq \log x < C+1$. Assim, o logaritmo de qualquer número real positivo x pode ser escrito como $\log x = C + M$, onde C é um número inteiro que chamamos de Característica de log x e M é um decimal entre 0 e 1 que recebe o nome de Mantissa de log x.

Para encontrarmos a Mantissa de log x, basta consultarmos em uma tabela logarítmica o valor correspondente para x. É comum as tabelas apresentarem apenas os algarismos que aparecem após a vírgula na representação decimal das mantissas. Iezzi, Dolce e Murakami (1993) apresentam uma tabela de Mantissas para os números inteiros de 10 a 999 com 4 casas decimais. Consultando essa tabela, verificamos que a mantissa de log 327 é M = 0,5145.

Mostraremos agora que, se $x_2 = x_1 \cdot 10^{a}$, com $a \in Z$, a Mantissa de $\log x_2$ será a mesma de $\log x_1$.

Podemos escrever que $\log x_1 = C_1 + M_1$, $C_1 \in Z$ e $0 \leq M_1 < 1$.

Assim, $\log x_2 = \log x_1 \cdot 10^a = \log x_1 + \log 10^a = (C_1 + M_1) + a$. Como C_1, $a \in Z$, então $C_1 + a = C_2 \in Z$, e podemos escrever: $\log x_2 = C_2 + M_1$. Portanto a mantissa de $\log x_2$ é a mesma de $\log x_1$, quando $x_2 = x_1 \cdot 10^a$.

Assim, a mantissa de log 327 é a mesma de, por exemplo, log 32,7; log 3,27; $\log 0{,}327$; log 3270; e log 32700; que é M = 0,5145.

Para encontrarmos a Característica de log x, é bem simples. Temos dois casos a considerar: quando x > 1 e quando 0 < x < 1.

No primeiro caso, quando x > 1, podemos verificar que, se x tem *n* algarismos em sua parte inteira, então $10^{n-1} \leq x < 10^n$. Assim, $n - 1 \leq \log x < n$, o que nos leva a concluir que a Característica de log x será *n -1*. Portanto, a Característica do logaritmo de um número maior que 1 é igual à quantidade de algarismos de sua parte inteira subtraída de uma unidade. Por exemplo: a Característica de log 27,32 é 1, e a de log 2435,473 é 3.

Quando 0 < x < 1, a Característica de log x é a quantidade de zeros que precede o primeiro algarismo não-nulo na representação decimal de x, com sinal negativo. Isso porque, se na representação decimal de x o primeiro algarismo não-nulo aparece na enésima casa decimal, ou seja, existem *n* zeros antes do primeiro algarismo não-nulo, então $10^{-n} \leq x < 10^{-n+1}$ e, portanto, $-n \leq \log x < -n + 1$. Sendo M a mantissa de log x ($0 \leq M < 1$), segue que $\log x = -n + M$ e, portanto, a característica de log x é –n. Por exemplo: a característica de $\log 0{,}0032$ é -3, e a de $\log 0{,}021$ é -2.

Vamos agora obter valores para log 32,7 e log 0,0327.

Como 32,7 tem dois algarismos na parte inteira, a característica de log 32,7 é 1, e como já vimos que a mantissa de log 32,7 é 0,5145, log 32,7 = 1 + 0,5145 = 1,5145.

Antes do primeiro algarismo não-nulo (3) de 0,0327, existem dois zeros, assim, $\log 0{,}0327$ tem característica –2 e mantissa 0,5145. Logo, log 0,0327 = –2 + 0,5145, que é igual a –1, 4855.

3.2. Função logarítmica

O conceito de função surgiu por volta de 1720. Foi definido por Euler (EVES, 2004, p. 661) e é posterior ao conceito dos logaritmos.

Em linguagem matemática, a função logarítmica é definida por

$$f : \Re_{+}^{*} \to \Re;\ f(x) = \log_{b} x,\ 1 \neq b > 0\,.$$

Essa função é a inversa da função exponencial: $f : \Re \to \Re;\ f(x) = b^{x},\ 1 \neq b > 0$.

Graficamente, podemos observar que o Conjunto Imagem (Im) da função logarítmica é o conjunto dos números reais. Com o objetivo de ilustrar que, se b > 1, a função será crescente e que ela será decrescente caso 0 < b < 1, apresentamos a seguir dois gráficos, um utilizando b = 2 e o outro, b = 1/2.

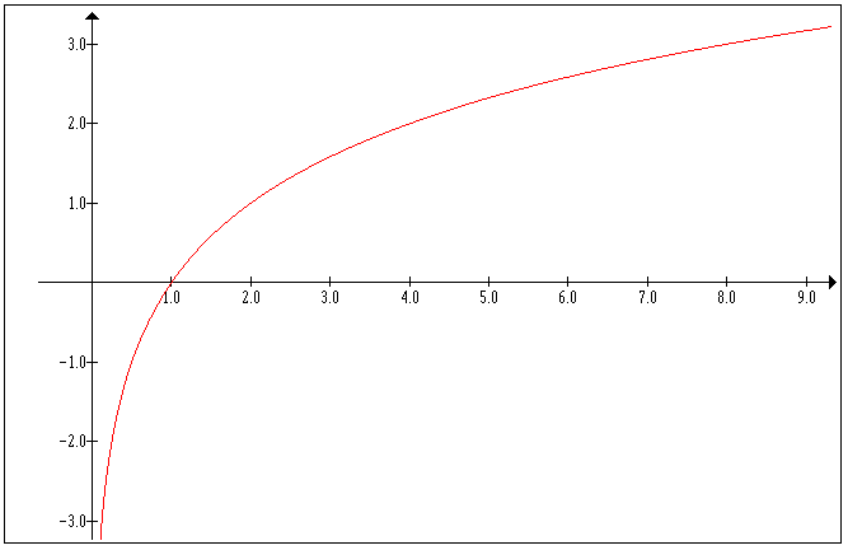


Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

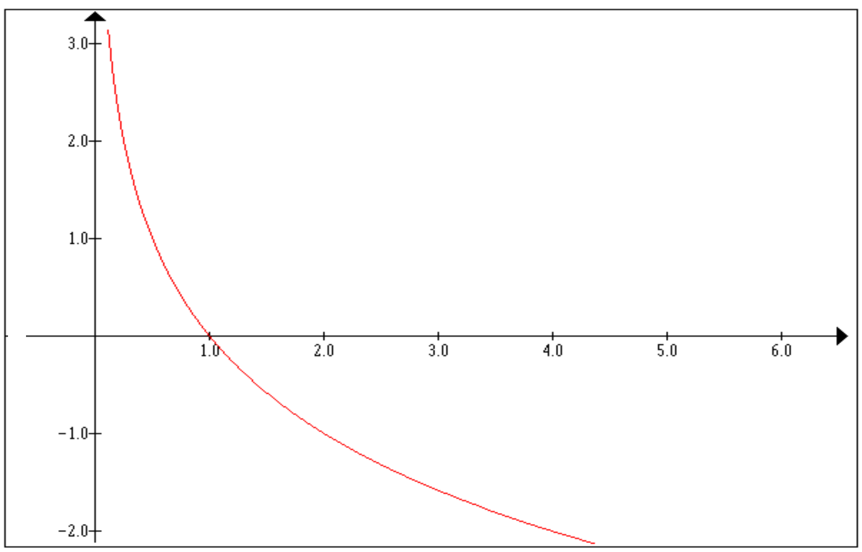


Gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$

Os logaritmos podem parecer um conteúdo puramente abstrato, mas, como veremos mais adiante, eles possuem aplicações em vários campos da ciência.

4. UM BREVE HISTÓRICO DOS LOGARITMOS

Neste capítulo vamos apresentar alguns comentários históricos sobre os logaritmos. Iniciaremos apresentando um pouco da biografia do personagem que é mais aceito como seu inventor, John Napier. Em seguida, mostraremos uma teoria para a criação dos logaritmos. Logo após, descreveremos e provaremos sua construção geométrica; e, por fim, faremos algumas considerações históricas sobre os logaritmos decimais.

4.1. John Napier

John Napier nasceu em 1550 no castelo Merchiston, propriedade de sua família, perto de Edimburgo, Escócia. Seus pais se chamavam Archibald Napier e Janet Bothweel (MAOR, 2004, p. 15).

John Napier (1550-1617)

Aos 13 anos, Napier foi para a Universidade de St Andrews estudar religião. Aproximadamente oito anos depois, voltou para sua terra natal e se casou com Elizabeth Stirling, com quem teve dois filhos. Ficou viúvo em 1579 (aos 29 anos), mas logo se casou com Agnes Chisholm, e dessa união nasceram dez filhos a Neper (como também é conhecido). Após a morte de seu pai, em 1608, assumiu o comando do castelo como o oitavo senhor, e lá passou o resto da vida.

Napier era protestante e, em 1593, publicou *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* (Simples descoberta de todas as revelações de São João), livro no qual expõe seus pontos de vista sobre religião. Esse livro foi traduzida em várias línguas e teve 21 edições, sendo dez delas lançadas durante sua vida.

Em 1579 inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível de água nas minas de carvão. Assim como Arquimedes (287 a.C), Napier fez projetos de espelhos gigantes que seriam capazes de incendiar navios inimigos. Outros projetos dele foram o de um “submarino” e o de uma carruagem modificada que seria capaz de destruir qualquer ser vivo com mais de 30 cm de altura que estivesse em um raio de até 6,4 km.

Conta-se que, certa vez, ao se irritar com um vizinho cujos pombos comiam os grãos de sua propriedade, Napier mergulhou grãos em uma forte solução alcoólica e os deu aos pombos. Desse modo, as aves ficaram embriagadas, não conseguiam voar e foram capturadas por ele. Outra história diz que ele, desconfiando de que algum de seus empregados o estava roubando, descobriu o malfeitor de forma muito criativa: colocou em uma sala escura, amarrado a uma mesa, um galo negro; disse para seus empregados encostarem a mão no dorso do galo pois descobrir-se-ia se algum deles o roubava. Ele havia colocado cinza no dorso do animal e o malfeitor foi o único que saiu da sala com as mãos limpas, pois, com a consciência pesada, ficou com medo de colocar a mão no animal e ser descoberto.

O nome de John Napier permanece vivo na história não pelo que já foi citado sobre ele neste texto, mas pela invenção dos logaritmos. Essa invenção foi de tão grande importância que segundo Laplace ela dobrou a vida dos astrônomos (EVES, 2004, p. 346). Por ter contribuído grandemente para a Matemática, vamos considerar Napier um matemático, mesmo ele não sendo possuidor do título acadêmico. Napier morreu no dia 3 de abril de 1617 (com 67 anos) e foi enterrado na igreja de St Cuthbert, em Edimburgo.

4.2. A invenção dos logaritmos

Dois nomes estão relacionados à invenção dos logaritmos: John Napier (1550-1617) e Jobst Bürg (1552-1632). Mesmo trabalhando na mesma época, cada um chegou aos seus resultados sem a influência do outro. No entanto seus trabalhos apresentam grandes semelhanças. Há indícios de que Bürg tenha iniciado seus trabalhos antes de Napier, porém este é mais aceito como o inventor dos logaritmos, pois publicou seu trabalho seis anos antes de Bürg apresentar seus resultados. A obra de Napier foi publicada em 1614 em um livro intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). O termo logaritmo foi inventado por Napier e significa número proporcional.

No século XVI, quando a Navegação, a Astronomia e a Economia tiveram grandes avanços, tornou-se necessário multiplicar e dividir números muito grandes ou muito pequenos e, na época, esses cálculos exigiam bastante tempo. Para haver ainda mais avanços, era necessário que a Matemática também passasse por mudanças evolutivas.

Napier, então, dispõe-se a encontrar uma maneira de facilitar o algoritmo da multiplicação e da divisão, o que consegue com a invenção dos logaritmos, trazendo, assim, grandes benefícios para a sociedade e a Ciência.

Para isso, provavelmente, Napier teve duas fontes de inspiração. Uma delas foi a *prostaférese* ("adição e subtração" em grego), processo que utiliza as fórmulas trigonométricas $2\cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, $2\,\text{sen}\,A \cos B = \text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)$, $2\cos A\,\text{sen}\,B = \text{sen}(A+B) - \text{sen}(A-B)$ e $2\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ para obter produtos ou quocientes utilizando adições ou subtrações em lugar de multiplicações ou divisões. Esse processo foi largamente utilizado a partir do século XVI, porém a primeira das fórmulas apresentadas foi deduzida por ibn-Yunus, já no século XI (BOYER, 2002, p. 164 e 212). As quatro identidades citadas acima são, às vezes, conhecidas como fórmulas de Werner por ser provável que Johannes Werner (1468 – 1528) as utilizou para facilitar cálculos na Astronomia (EVES, 2004, p. 343). Tycho Brahe (1546 – 1601), astrônomo dinamarquês e sucessor de Nicolau Copérnico (1473 – 1543), também fez uso intenso da prostaférese nas pesquisas que realizou em seu observatório (HOGBEN, 1958, p. 485; BOYER, 2002, p. 213 e 214). No anexo A, mostramos um exemplo de como calcular o produto de dois números pela prostaférese. Outra possível origem para o raciocínio que levou Napier à invenção dos logaritmos foi a relação entre os termos de uma Progressão Geométrica e os expoentes da razão dessa PG (pela seqüência de raciocínio descrita a seguir, fica notório que essa idéia foi a que mais inspirou Napier na invenção dos logaritmos).

Michael Stifel (1487-1567) publicou, em 1544, uma obra em que mostra que, ao multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $1, q, q^2, q^3, \ldots$, o produto será o termo cujo expoente é igual à soma dos expoentes dos dois termos iniciais (propriedade já conhecida por Arquimedes) (HOGBEN, 1958, p. 489). Atualmente podemos dizer que $q^{m}.q^{n} = q^{m+n}$ e também que $q^{m} : q^{n} = q^{m-n}$, para quaisquer valores reais de m e n. Stifel, no entanto, considerava apenas expoentes inteiros (MAOR, 2004, p. 19).

Também de acordo com Maor (2004, p. 19), a idéia de Napier era:

> *Se pudermos escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes. Além disso, elevar um número à enésima potência [...] seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n, e encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas, ou seja, a divisão por n. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.*

Como as potências de $1 - 10^{-7}$ (0,9999999) decrescem lentamente, Napier utilizou esse valor como base das potências para conservar os termos da seqüência geométrica próximos uns dos outros e facilitar interpolações.

Para evitar trabalhar com frações decimais (que na época ainda não eram tão conhecidas e tão utilizadas quanto hoje), ele multiplicou $1 - 10^{-7}$ e suas potências por 10^7 e então definiu:

Se $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, então L é o logaritmo de N (para facilitar, vamos escrever simplesmente que L = Nap log N).

Assim, Nap log $10^7 = 0$, pois $10^7 = 10^7(1 - 10^{-7})^0$, e Nap log $10^7(1 - 10^{-7}) = 1$, pois $10^7(1 - 10^{-7}) = 10^7(1 - 10^{-7})^1$.

Inicialmente, Napier calculou e apresentou uma tabela com 101 termos. Em uma coluna estavam os valores de L, que começavam em 0 e terminavam em 100, e na outra os de N, sendo o primeiro valor 10^7, correspondente a L = 0, o segundo $10^7(1 - 10^{-7})^1$, correspondendo a L = 1, e o último $10^7(1 - 10^{-7})^{100}$, que corresponde a L = 100.

TABELA COM ALGUNS DOS 101 ELEMENTOS DA PRIMEIRA TABELA DE NAPIER

N	L = Nap log N
$10^7 = 10.000.000$	0
$10^7(1 - 10^{-7})^1 = 9.999.999$	1
$10^7(1 - 10^{-7})^2 = 9.999.998$	2
$10^7(1 - 10^{-7})^3 = 9.999.997$	3
. . .	. . .
$10^7(1 - 10^{-7})^{97} = 9.999.903$	97
$10^7(1 - 10^{-7})^{98} = 9.999.902$	98
$10^7(1 - 10^{-7})^{99} = 9.999.901$	99
$10^7(1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$	100

Em seguida, ele apresentou uma tabela com 51 elementos, obtidos multiplicando 10^7 por potências de $1 - 10^{-5}$, valor aproximado de $(1 - 10^{-7})^{100}$, que por sua vez é o fator que multiplica 10^7 no último elemento da primeira tabela. Os números apresentados na segunda tabela são valores aproximados de 10^7, $10^7(1 - 10^{-7})^{100}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{200}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{300}$, ..., $10^7(1 - 10^{-7})^{5000}$. Assim, obteve os seguintes valores de L: 0 , 100, 200, 300, ..., 5000.

Napier repetiu a idéia e calculou 21 elementos multiplicando 10^7 por potências de 0,9995, valor aproximado de $(1 - 10^{-7})^{5000}$. Os valores, também aproximados, de N na terceira tabela são

10^7, $10^7(1 - 10^{-7})^{5000}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{10.000}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{15.000}$, ..., $10^7(1 - 10^{-7})^{100.000}$. Os valores de L são: 0, 5000, 10.000, ..., 100.000.

Finalmente, a partir de cada um dos 21 elementos da tabela anterior, ele calculou 68 elementos utilizando a razão 0,99, valor aproximado para o fator que multiplica 10^7 no último elemento da tabela anterior. Os valores, aproximados, são:

- 10^7, $10^7(1 - 10^{-7})^{100.000}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{200.000}$ ..., $10^7(1 - 10^{-7})^{6.800.000}$
- $10^7(1 - 10^{-7})^{5000}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{105.000}$, ..., $10^7(1 - 10^{-7})^{6.805.000}$
- $10^7(1 - 10^{-7})^{10.000}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{110.000}$, ..., $10^7(1 - 10^{-7})^{6.810.000}$
- ...
- $10^7(1 - 10^{-7})^{100.000}$, $10^7(1 - 10^{-7})^{200.000}$, ..., $10^7(1 - 10^{-7})^{6.900.000}$

Podemos observar que o trabalho realizado por Napier não foi pequeno; ele utilizou vinte anos para realizar seus cálculos.

Utilizando a definição de Napier e suas tabelas, para calcular o produto de dois números, procedia-se da seguinte maneira:

Sejam N_1 e N_2 os números.

Procuravam-se na tabela logarítmica os valores de Nap log N_1 e Nap log N_2. Somavam-se esses valores e obtinha-se um valor S. Novamente se utilizava a tabela para encontrar o número *x* cujo logaritmo fosse S, ou seja, Nap log x = S. Encontrado x, bastava multiplicá-lo por 10^7 para obter o valor de $N_1 \cdot N_2$. No apêndice B, há um exemplo de como utilizar os logaritmos decimais para calcular o produto de dois números.

Verifica-se facilmente que esse procedimento é correto provando, como feito a seguir, que $\text{Nap log}\,\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = \text{Nap log}\,N_1 + \text{Nap log}\,N_2$.

Seja L_1 = Nap log N_1 e L_2 = Nap log N_2, ou seja, $N_1 = 10^7(1-10^{-7})^{L_1}$ e $N_2 = 10^7(1-10^{-7})^{L_2}$.

$$N_1 \cdot N_2 = 10^{14}(1-10^{-7})^{L_1+L_2} \Rightarrow$$
$$N_1 \cdot N_2 = 10^7\left[10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2}\right] \Rightarrow$$
$$\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = 10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2} \Rightarrow$$

$$\text{Nap log}\,\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = L_1 + L_2 \Rightarrow$$
$$\text{Nap log}\,\frac{N_1 \cdot N_2}{10^7} = \text{Nap log}\,N_1 + \text{Nap log}\,N_2$$

Percebemos que $\text{Nap log}\,N_1 \cdot N_2 \neq \text{Nap log}\,N_1 + \text{Nap log}\,N_2$. Essa é uma diferença entre os logaritmos definidos por Napier e os definidos por Euler, que, como já mencionamos na introdução, têm como propriedade a igualdade $\log_b N_1 \cdot N_2 = \log_b N_1 + \log_b N_2$.

Chamamos a atenção para o fato de que, para valores crescentes, os logaritmos de Napier (ou neperianos) são decrescentes, enquanto que os logaritmos de base *e*, ou naturais (ln), são crescentes; esse é um dos motivos pelos quais é historicamente incorreto chamar os logaritmos naturais de logaritmos neperianos

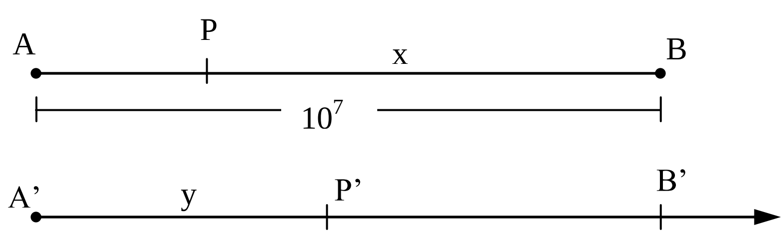
Felizmente, e com o apoio de Henry Briggs (HOGBEN, 1958, p. 504), os logaritmos de Napier foram aceitos e recebidos com muito entusiasmo pelos cientistas da Europa e da China. Johann Kepler (1571 – 1630), que deu continuidade aos trabalhos astronômicos de Brahe, por exemplo, utilizou-os com grande sucesso em seus cálculos das órbitas planetárias (BOYER, 2002, p. 216).

Apresentamos a seguir a construção físico-geométrica que Napier fez para seus logaritmos.

4.3. Construção geométrica dos logaritmos

Além da definição algébrica, Napier também definiu seus logaritmos da seguinte maneira:

Sejam $\overline{AB}$ um segmento de reta, cujo comprimento é 10^7, e $\overrightarrow{A'B'}$ uma semi-reta com origem em A'. Considere um ponto P, que se desloca em $\overline{AB}$, a partir de A, com velocidade numericamente igual à distância dele a B; considere também um ponto P' que parte de A' e se desloca sobre $\overrightarrow{A'B'}$ com velocidade constante e igual a 10^7.



Se PB = x e A'P' = y, então Nap log x = y.

Atualmente, utilizando conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral, pode-se provar, como faremos a seguir, que essa definição é equivalente à que fizemos anteriormente, a qual garante que, se N = $10^7(1 - 10^{-7})^L$, então L = Nap log N.

Sabemos que x e y são variáveis dependentes do tempo *t* e podemos verificar que a posição de P é dada por $S_P = 10^7 - x$. Como a velocidade de P é x, e a derivada da função espaço é a função velocidade, segue que $\frac{dS_P}{dt} = x$, ou seja, $\frac{d(10^7 - x)}{dt} = x$. Temos também que $\frac{d(10^7 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}$. Assim, $-\frac{dx}{dt} = x$, o que nos leva a concluir que $\frac{dx}{dt} = -x$.

Como a velocidade de P' é igual a 10^7, temos que $\frac{dy}{dt} = 10^7$.

Utilizando a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 10^7 = \frac{dy}{dx} \cdot (-x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{10^7}{x} \Rightarrow y = -10^7 \ln cx \, .$$

Se x = 10^7, P está em A, P' está em A' e, portanto, y = 0. Logo:

$$y\left(10^7\right) = 0 \Rightarrow 0 = -10^7 \ln\left(c \cdot 10^7\right) \Rightarrow \ln\left(c \cdot 10^7\right) = 0 \Rightarrow c \cdot 10^7 = 1 \Rightarrow c = 10^{-7} \, .$$

Assim, $y = -10^7 \ln 10^{-7} x$. Fazendo uma mudança de base, temos que $y = -10^7 \frac{\log_{e^{-1}} 10^{-7} x}{\log_{e^{-1}} e}$. Obtemos então que:

$$y = -10^7 \frac{\log_{e^{-1}} 10^{-7} x}{-1} \Rightarrow y = 10^7 \log_{e^{-1}} 10^{-7} x \Rightarrow \log_{\frac{1}{e}} 10^{-7} x = \frac{y}{10^7} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{y}{10^7}} = \frac{x}{10^7} \Rightarrow x = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{y}{10^7}}$$

Como $\frac{1}{e} \cong \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, segue que $x = 10^7 \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{y}{10^7}}$.

Temos que $x = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$, de onde concluímos que Nap log x = y, o que encerra nossa demonstração.

Prosseguiremos apresentando agora um pouco sobre o surgimento dos logaritmos decimais.

4.4. Um pouco sobre a história dos logaritmos decimais

Os primeiros logaritmos calculados na base 10 foram publicados em 1624 por Henry Briggs (1561-1631), que, de acordo com Hogben (1958, p. 497), contou com a colaboração de Napier. Briggs era professor de Geometria do Colégio Greshan, em Londres. Ele ficou tão entusiasmado com a invenção de Napier, que se interessou em conhecê-lo pessoalmente.

O conceito de base dos logaritmos surgiu no encontro entre os dois matemáticos, quando Briggs sugeriu duas mudanças nos logaritmos neperianos. As mudanças sugeridas foram: que o logaritmo de 1 fosse igual a 0 e que o de 10 fosse igual a uma potência apropriada de 10. Depois de alguns cálculos e análises, ambos concordaram que o logaritmo de 1 deveria ser 0 e que o logaritmo de 10 fosse igual a $1 = 10^0$.

A obra de Briggs, *Arithmetica Logarithmica*, continha o resultado dos cálculos que ele fez para os logaritmos decimais de todos os inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, aproximados até a 14.ª casa decimal. Os logaritmos dos inteiros entre 20.000 e 90.000, aproximados até a 10ª casa decimal, foram calculados por Adrian Vlacq (1600 – 1667), um editor holandês, e publicados em 1628 na 2.ª edição de *Arithmetica Logarithmica* (MAOR, 2004, p. 27; EVES, 2004, p. 346).

Para exemplificar o método das aproximações sucessivas utilizado por Briggs (HOGBEN, 1958, p. 503 e 504), vamos calcular $\log_{10} 5 = \log 5$, com uma aproximação de 7 casas decimais.

PROCEDIMENTO UTILIZADO POR BRIGGS PARA O CÁLCULO DE log 5

N	n = log N
$N_1 = 1$	$n_1 = 0{,}0000000$
$N_2 = 10$	$n_2 = 1{,}0000000$
$N_3 = \sqrt{N_1 \cdot N_2} = 3{,}162277$	$n_3 = (n_1 + n_2)/2 = 0{,}5000000$
$N_4 = \sqrt{N_2 \cdot N_3} = 5{,}623413$	$n_4 = (n_2 + n_3)/2 = 0{,}7500000$
$N_5 = \sqrt{N_3 \cdot N_4} = 4{,}216964$	$n_5 = (n_3 + n_4)/2 = 0{,}6250000$
$N_6 = \sqrt{N_4 \cdot N_5} = 4{,}869674$	$n_6 = (n_4 + n_5)/2 = 0{,}6875000$
$N_7 = \sqrt{N_4 \cdot N_6} = 5{,}232991$	$n_7 = (n_4 + n_6)/2 = 0{,}7187500$
$N_8 = \sqrt{N_6 \cdot N_7} = 5{,}048065$	$n_8 = (n_6 + n_7)/2 = 0{,}7031250$
$N_9 = \sqrt{N_6 \cdot N_8} = 4{,}958067$	$n_9 = (n_6 + n_8)/2 = 0{,}6953125$
$N_{10} = \sqrt{N_8 \cdot N_9} = 5{,}002865$	$n_{10} = (n_8 + n_9)/2 = 0{,}6992187$

A idéia utilizada foi que $\log \sqrt{A \cdot B} = \frac{1}{2} \log A \cdot B = \frac{1}{2}(\log A + \log B)$. Observe que, de N_3 em diante, sempre utilizamos um número maior e um número menor que 5 para calcularmos a média geométrica deles; isso com o objetivo de convergirmos o resultado para 5, valor para o qual queremos encontrar o logaritmo.

Podemos ver que, assim como os cálculos iniciais de Napier, o trabalho de Briggs foi árduo, porém de muita valia por mais de três séculos.

Em 1620, utilizando o conceito de logaritmos, Edmund Gunter (1581 – 1626) criou uma rudimentar calculadora, ou melhor, uma régua de calcular. A partir de então, surgiram outras réguas, mais sofisticadas e mais precisas, que se tornaram indispensáveis para os cientistas. Apenas aproximadamente 350 anos depois, surgem no mercado as primeiras calculadoras eletrônicas manuais; 10 anos depois as réguas de calcular já eram instrumentos ultrapassados. Hoje, os logaritmos não são usados para calcular produtos ou quocientes, porém são aplicados em várias situações, como veremos a seguir.

5. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Com o objetivo de ampliarmos as possibilidades de argumentação na discussão da validade ou não do ensino dos logaritmos, apresentaremos agora algumas aplicações desse conteúdo.

5.1. Na Matemática Financeira

O montante *M* gerado por um capital *C*, aplicado à taxa *i*, em um determinado tempo *t* é

$$M = C(1 + i)^t$$

Para calcularmos o tempo necessário para obtermos um determinado montante, precisamos isolar o valor de *t*. Isso é feito da seguinte maneira:

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow (1+i)^t = \frac{M}{C} \Rightarrow \log_{(1+i)} \frac{M}{C} = t \Rightarrow t = \frac{\log M - \log C}{\log\ (1+i)}\ .$$

Se uma pessoa aplicar R$ 1.000,00 a uma taxa de 0,5% ao mês, o tempo necessário para se obter um montante de R$ 1.500,00 será

$$t = \frac{\log 1500 - \log 1000}{\log(1+0{,}005)} \cong 6 \text{ anos e 10 meses.}$$

Assim, para encontrarmos o valor de *t*, devemos aplicar conhecimentos de logaritmos.

As calculadoras financeiras fazem os cálculos automaticamente, porém não são tão comuns ou populares quanto as científicas, que não possuem esse recurso.

5.2. Na Biologia

Sob condições ideais, admite-se que o número de bactérias de uma colônia pode ser calculado pela fórmula

$$N = N_0 e^{ct}$$

onde N_0 é o número inicial de bactérias; *e* é o número de Euler, que vale aproximadamente 2,718281; *c* é uma constante; e *t* é o tempo (IEZZI, DOLCE e MURAKAMI, 1993, p. 89).

Conhecido o valor de *c* e desejando calcular o tempo necessário para obter uma determinada quantia de bactérias, basta isolar o valor de *t* na equação. Assim,

$$N = N_0 e^{ct} \Rightarrow e^{ct} = \frac{N}{N_0} \Rightarrow \ln e^{ct} = \ln \frac{N}{N_0} \Rightarrow ct = \ln \frac{N}{N_0} \Rightarrow t = \frac{1}{c} \ln \frac{N}{N_0}$$

Novamente, torna-se necessário o conhecimento de logaritmos para encontrarmos o valor de *t*.

5.3. Na Escala Richter

A Escala Richter, definida pelo sismógrafo C. F. Richter, aplicada pela primeira vez em 1935, mede a energia liberada pelos terremotos. Durante um tremor, surgem ondas de energia que se propagam pela crosta terrestre e que são graficamente registradas por um sismômetro ou sismógrafo.

Uma fórmula utilizada para se calcular o valor *M* da magnitude de um terremoto é

$$M = \log\left(\frac{A}{t}\right) + B$$

na qual *A* é a amplitude máxima do gráfico registrado no sismômetro, medida em micra, *t* é a duração do tremor, em segundos; e *B* é um valor empírico que depende da distância entre o epicentro do abalo e a estação medidora. De acordo com Thomas (2002, p. 38), para um terremoto cujo epicentro foi a 10.000 km da estação medidora, *B* = 6,8.

Se um sismômetro registrou um abalo a 10.000 km, cuja amplitude foi de 10 micra e a duração foi de 5s, a magnitude do terremoto será

$$M = \log\left(\frac{10}{5}\right) + 6{,}8 = \log 2 + 6{,}8 \cong 0{,}3 + 6{,}8 = 7{,}1$$

Pela fórmula descobre-se que, para termos uma unidade de diferença entre a magnitude de dois terremotos com a mesma duração, é necessário que a amplitude de um seja 10 vezes maior que a do outro.

O sismo mais intenso já registrado atingiu o valor de 9,5 e ocorreu a 22 de maio de 1960, no Chile.

5.4. No cálculo da Intensidade Sonora

O Nível de Intensidade é a intensidade sonora média percebida ou detectada pelo sistema auditivo humano. Esse nível de intensidade é calculado pela expressão

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

na qual *I* é a intensidade da onda, ou seja, a energia com que a onda sonora atravessa determinada região, e I_0 é a intensidade sonora mínima percebida pelo ser humano ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2). A unidade de β é o decibel (db).

Pela fórmula percebe-se que, se a diferença entre dois níveis de intensidade é 20 db (2x10), a intensidade de uma das ondas é 100 vezes (10^2) a intensidade da outra (se a diferença entre dois níveis de intensidade for $n \cdot 10$, a intensidade de uma onda será 10^n vezes a intensidade da outra).

Se a intensidade de uma onda é 1w/m^2, o nível de intensidade correspondente será

$$\beta = 10\log\frac{1}{10^{-12}} = 10\log 10^{12} = 120\,\text{db}\,.$$

Sabe-se que 120 db é o limiar da dor para a audição humana e que

> *quando exposto, diariamente, a ruídos acima de 75 db, o ser humano, em poucos anos, sofre mudanças em seu organismo, como: dilatação das pupilas, palpitação cardíaca, dificuldade na digestão, elevação na pressão arterial, alteração na secreção de vários hormônios. As mulheres podem ter o ciclo menstrual desregulado. Além disso, outras conseqüências podem ser a desestabilidade emocional e o estresse (FUKE, 1993, p. 391).*

5.5. No cálculo do pH

Nos rótulos de alguns produtos, consta a seguinte informação: “pH balanceado”. O pH (potencial hidrogeniônico) é um valor que indica se uma solução (uma substância) é básica, neutra ou ácida. Tal valor é calculado pela expressão

$$\text{pH} = \log\frac{1}{[\text{H}^{+}]} = -\log \text{H}^{+}$$

na qual H^{+} é a concentração de íon H^{+} na solução, medida em mol por litro.

Essa fórmula foi proposta em 1909 pelo químico dinamarquês Sϕren Peter Lauritz Sϕrensen (1868 – 1939), quando fazia estudos sobre o controle de qualidade da produção de cerveja, e é usada hoje até mesmo na engenharia (ATKINS, 2001, p. 518).

Uma solução cuja concentração de H^+ é $6{,}3 \times 10^{-8}$ mol/L tem $pH = -\log 6{,}3 \cdot 10^{-8} \cong -(0{,}8 - 8) = 7{,}2$.

O pH da maioria das soluções está compreendido entre 0 e 14. Uma solução é considerada alcalina se tem pH > 7, básica se pH < 7 e neutra se pH = 7. De acordo com essa definição, a água é uma substância neutra.

5.6. No Relógio de Carbono

Alguns átomos emitem parte de sua massa sob a forma de radiação e, assim, transforma-se em outros elementos. Por exemplo, o rádio, pela radiação, transforma-se em chumbo.

A quantidade existente, Q, de uma substância radioativa obedece à seguinte lei:

$$Q = Q_0 e^{ct}$$

na qual Q_0 é a quantidade da substância quando o tempo t é zero, e c é uma constante que varia de substância para substância e é calculada experimentalmente. Essa lei é conhecida como lei do decaimento natural ou decaimento radioativo (IEZZI, DOLCE e MURAKAMI, 1993, p. 89; THOMAS, 2002, p.27).

O rádio é um elemento químico radioativo que demora 1690 anos para que uma certa quantia dele seja reduzida à metade. Dizemos, resumidamente, que a vida média do rádio é 1690 anos.

Se pegarmos hoje 60g de rádio, utilizando a fórmula, descobriremos que em 100 anos apenas 2g da substância foram transformados em chumbo pela radiação. Os cálculos são:

Se t = 1690, então Q = $q_0/2$. Assim

$$\frac{q_0}{2} = q_0 e^{c \cdot 1690} \Rightarrow e^{1690c} = 0{,}5 \Rightarrow 1690c = \ln 0{,}5 \Rightarrow c = \frac{\ln 0{,}5}{1690}$$

Como $Q = q_o e^{ct}$, para t = 100 anos, temos:

$$Q = 60e^{\frac{\ln 0{,}5}{1690} \cdot 100} \Rightarrow Q \cong 58g$$

Portanto, em 100 anos, perdeu-se 2g (60g – 58g) do material.

O Relógio de Carbono é um método usado para descobrir há quanto tempo se deu a morte de um fóssil, desde que em sua constituição exista carbono. Esse cálculo é feito com base no fato de todo ser vivo que tem carbono em sua constituição também possuir carbono-14, que é radioativo. Antes de morrer, a razão entre a quantidade de carbono e a de carbono-14 existente no organismo é constante. Pode-se então descobrir o valor de um, conhecido o valor do outro. Depois da morte, a lei do decaimento radioativo se aplica para o carbono-14 e passa a não existir o equilíbrio entre as quantidades dos carbonos.

Sabe-se que a vida média do carbono-14 é aproximadamente 5500 anos. Se em um fóssil a quantidade desse elemento é 30% da que existia quando o ser ainda era vivo, há quanto tempo morreu o fóssil?

Como a vida média do carbono-14 é 5500 anos, temos:

$$\frac{q_0}{2} = q_0 e^{c \cdot 5500} \Rightarrow e^{5500c} = 0{,}5 \Rightarrow 5500c = \ln 0{,}5 \Rightarrow c = \frac{\ln 0{,}5}{5500}$$

Como hoje $Q = 0{,}3q_0$ e $Q = q_o e^{ct}$,

$$0{,}3q_0 = q_0 e^{\frac{\ln 0{,}5}{5500} \cdot t} \Rightarrow t = \frac{5500 \cdot \ln 0{,}3}{\ln 0{,}5} \cong 9553 \text{ anos.}$$

Portanto o fóssil morreu há aproximadamente 9553 anos.

A seguir mostramos o gráfico do decaimento radioativo de 1000 unidades de massa de carbono-14.

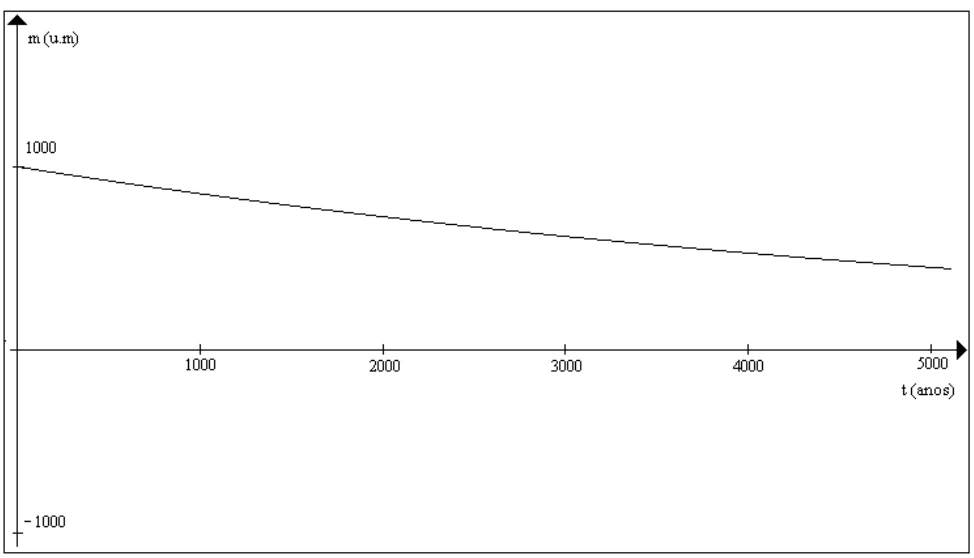


Gráfico do decaimento radioativo de 1000 unidades de massa de carbono-14

5.7. Na dosagem de medicamentos

Todo medicamento aplicado em um paciente é eliminado aos poucos do organismo. A quantidade f(t) que permanece no corpo, em função do tempo *t*, obedece, muito aproximadamente, à seguinte lei:

$$f(t) = Ce^{kt}$$

na qual *C* é a dose aplicada (t = 0), e *k* é uma constante que varia de remédio para remédio (HEIN e BIENBENGUT, 2005).

Sabe-se, experimentalmente, que a vida média da Teofilina — um derivado da cafeína, indicado no tratamento de obstruções das vias aéreas — é 8 horas. Se um paciente recebe uma dose C = 100mg de Teofilina, quanto tempo depois existirá apenas 10mg do medicamento no organismo do paciente?

Se a vida média do medicamento é 8 horas, então:

f(8) = C/2 = 100/2 = 50.

Temos então que $50 = 100e^{k.8} \Rightarrow 8k = -\ln 2 \Rightarrow k = -\dfrac{\ln 2}{8}$.

Queremos o valor de t para o qual f(t) = 10. Assim:

$$10 = 100e^{\frac{-\ln 2}{8}\cdot t} \Rightarrow 10^{-1} = e^{\ln 2^{-\frac{t}{8}}} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{8}} = 10^{-1} \Rightarrow$$

$$\log_2 2^{-\frac{t}{8}} = \log_2 10^{-1} \Rightarrow -\frac{t}{8} = \log_2 10^{-1} \Rightarrow t = \log_2 10^8 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\log 10^8}{\log 2} = \frac{8}{0{,}30103} \cong 26h30\,min$$

Portanto, 26,5h após a aplicação de 100mg de Teofilina em um paciente, ele ainda terá 10mg do medicamento em seu corpo.

5.8. Em previsões estatísticas (crescimento populacional)

Um dos ramos da Estatística, a Estatística Indutiva, é responsável por fazer extrapolações dos dados coletados e fazer previsões. É comum os censos de algumas comunidades apresentarem um crescimento percentual constante, por certo período de tempo. Assim se, estatisticamente, percebe-se que uma população que hoje tem P_0 habitantes cresce a uma taxa i ao ano, em t anos o número de habitantes dessa comunidade será

$$P = P_0(1 + i)^t$$

Se uma população tem hoje 4.936 milhões de habitantes e cresce aproximadamente 3% a.a., quanto tempo ela levará para atingir a marca de 8.000 milhões de pessoas?

Temos que $P_0 = 4.936$, $i = 3\%$ e $P = 8.000$.

Como $P = P_0(1 + i)^t$, $8.000 = 4.936(1 + 0{,}03)^t \Rightarrow$

$1{,}03^{\,t} = 1{,}621 \Rightarrow \; t = \dfrac{\log 1{,}621}{\log 1{,}03} \;\Rightarrow t \cong 16$ anos e 4 meses.

Os cálculos aqui apresentados são muito semelhantes aos de juros compostos, porém se referem a uma aplicação dos logaritmos em outro campo da Matemática, mostrando assim uma abrangência maior de tal conteúdo.

6. ABORDAGEM DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DOS LOGARITMOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar a abordagem utilizada em alguns livros didáticos para o ensino dos logaritmos. Os livros foram selecionados pela posição de destaque alcançada pelos autores e pela facilidade que tivemos em ter acesso a tais livros. O primeiro livro analisado foi M*atemática Fundamental: uma nova abordagem* (GIOVANNI, BONJORNO e JUNIOR, 2002). Esse livro mostra, em seu breve comentário histórico de três parágrafos, o século da invenção dos logaritmos, os dois nomes ligados a essa invenção, a necessidade que havia de facilitar as operações de multiplicação e divisão e como os logaritmos foram bem recebidos.

O estudo do conteúdo começa mostrando como alguns números podem ser escritos como potências de 10 e, em seguida, faz-se a definição de logaritmos. Há um comentário sobre como calcular logaritmos decimais na calculadora e um sobre a meia-vida do Tório 234. O livro comenta sobre a condição de existência de um logaritmo e sobre as conseqüências da definição; trabalha as equações logarítmicas e as propriedades operatórias dos logaritmos; traz uma breve explicação sobre cologaritmo e mudança de base. O estudo termina com uma rápida e superficial explanação sobre a função logarítmica e sobre as inequações. Há um comentário que afirma ser a arquitetura da Torre Eiffel baseada na função $\log_{1/2} x$. Seis dos últimos vinte e sete exercícios envolvem aplicações dos logaritmos.

Dois dos três autores desse livro, José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, publicaram, também pela FTD, em 2000, uma coleção de três volumes de livros didáticos para o

Ensino Médio sob o título *Matemática: uma nova abordagem*. No volume 1 da coleção, comparado com o livro analisado, os autores trabalham um pouco mais das aplicações dos logaritmos, abrangem mais pontos da história do conteúdo e acrescentam um estudo sobre logaritmos decimais.

O segundo livro pesquisado foi *Matemática* (IEZZI, et al., 1997). Esse livro não faz nenhum comentário histórico e, logo após mostrar que nem todas as equações exponenciais podem ser resolvidas utilizando apenas o conteúdo que acabou de ser estudado — função exponencial —, faz a definição formal de logaritmo. Em seguida mostra as conseqüências da definição e comenta sobre sistemas de logaritmos. Rapidamente trabalha as propriedades operatórias e mudança de base. O assunto é interrompido por uma breve explicação sobre funções inversíveis. Com um exemplo de aplicação financeira, inicia-se o estudo da função logarítmica. Dentro do capítulo ainda são estudadas equações e inequações exponenciais e logarítmicas. Por fim, é feito um estudo sobre os logaritmos decimais, abrangendo, inclusive, propriedades da Característica e da Mantissa. Apenas um exercício mostra uma aplicação dos logaritmos.

Em seguida, analisamos *Matemática para a escola de hoje* (FACCHINI, 2006). Nesse livro, não há nenhuma introdução histórica e já se começa o estudo pela definição formal de logaritmo. Na seqüência, estudam-se as conseqüências da definição, as propriedades operatórias e cologaritmo. Há um exercício proposto muito abrangente e bem elaborado sobre o pH de uma solução. O capítulo prossegue com um rápido estudo sobre mudança de base, equações, funções e inequações logarítmicas. Segue uma breve explanação sobre equações e inequações exponenciais e sobre sistemas de logaritmos. Por fim, faz-se um estudo sobre logaritmos decimais incluindo Característica e Mantissa. Além do já citado exercício sobre pH, há mais cinco problemas sobre aplicações dos logaritmos, sendo um sobre terremoto e Escala Richter.

No penúltimo livro que pesquisamos, *Matemática* (SMOLE e KIYUKAWA, 1999), o capítulo sobre logaritmos começa contextualizando o assunto, mostrando o crescimento de uma planta que, a cada mês, dobra sua altura; é feita a representação gráfica desse crescimento com o passar dos meses. Em seguida, define-se logaritmo e são demonstradas as propriedades imediatas dessa definição. O texto prossegue com um estudo sobre as propriedades operatórias e um pequeno comentário sobre mudança de base no qual são citados os nomes de Napier e Briggs por seus trabalhos com as tábuas de logaritmos decimais (Maor (2004, p. 27) afirma que os cálculos foram feitos apenas por Briggs). Logo após são trabalhadas funções e inequações logarítmicas, equações e inequações exponenciais e sistemas de logaritmos. Antes de finalizar o capítulo, é feito um estudo sobre logaritmos decimais e um comentário sobre como calcular logaritmos na calculadora científica. Em uma seção chamada Elo, há uma explanação sobre a Escala Richter, e é citada a utilização dos logaritmos na medição da Intensidade Sonora. Há um Exercício Resolvido sobre a aplicação do conteúdo na Matemática Financeira e apenas três outros exercícios envolvendo aplicações dos logaritmos.

O último livro que analisamos foi *Fundamentos de Matemática Elementar* (IEZZI, DOLCE e MURAKAMI, 1993). Esse livro contém sete capítulos dos quais os cinco últimos abordam o conhecimento sobre logaritmos. Antes de iniciar o terceiro capítulo, há um texto de Hygino H. Domingues chamado “Os logaritmos segundo Napier”. Nesse texto há um pequeno histórico de Napier e de sua invenção e alguns comentários sobre Briggs.

O primeiro capítulo destinado ao assunto, logo após mostrar que nem sempre é possível resolver uma equação exponencial reduzindo as potências à mesma base, define logaritmos em palavras e, depois, em símbolos matemáticos. Esse capítulo também mostra as conseqüências da definição, as propriedades operatórias e comenta sobre sistemas de logaritmos e sobre mudança de base.

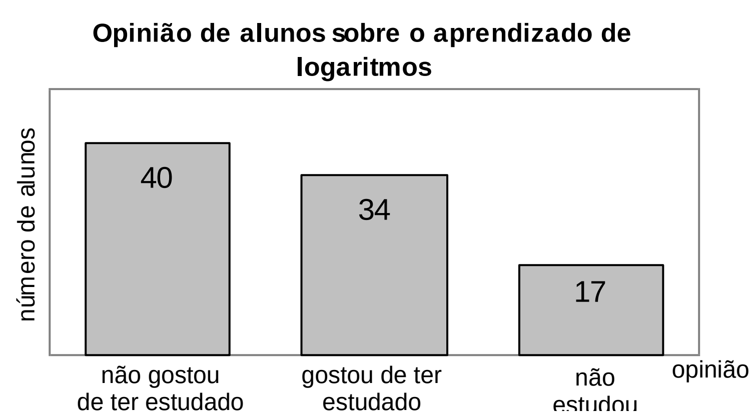
O capítulo seguinte, capítulo IV, trabalha rapidamente a função logarítmica. Já o capítulo V explora as equações exponenciais e logarítmicas e contém 83 exercícios. O penúltimo capítulo é destinado ao estudo das inequações exponenciais e logarítmicas e, para encerrar, o capítulo VII explana sobre os logaritmos decimais. Dos 274 exercícios inseridos nos capítulos sobre logaritmos, um é sobre a Escala Richter, um sobre o pH, dois sobre o crescimento de uma cultura de bactérias, três sobre radioatividade e cinco sobre aplicações financeiras.

Após essa análise, apresentaremos, na Seção seguinte, o resultado de uma pesquisa sobre a opinião dos alunos em relação ao aprendizado dos logaritmos.

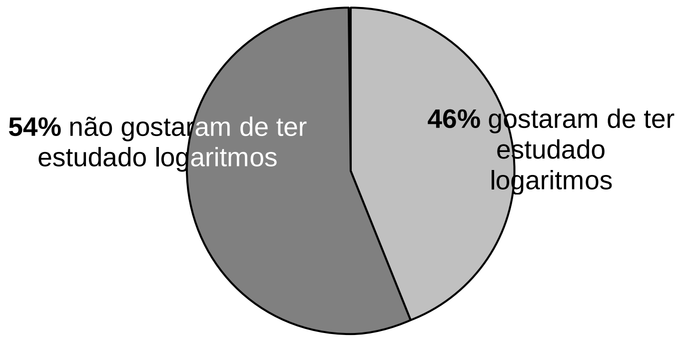
7. ANÁLISE DE UMA PESQUISA DE OPINIÃO

Com o objetivo de conhecer a opinião de alguns alunos em relação ao aprendizado dos logaritmos, fizemos uma pequena pesquisa, com 91 alunos de três escolas estaduais de Guaratinguetá, São Paulo. Dos alunos que opinaram na pesquisa, 21 são do 2.º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Ana Fausta de Magalhães; 28 do 2.° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professor Augusto da Costa Braga; e 42 do 3.° ano do Ensino Médio da Escola Técnica Professor Alfredo de Barros Santos.

O questionário aplicado continha três perguntas de múltipla-escolha. A primeira pergunta era "Você gostou de ter estudado logaritmos?", e as alternativas de respostas eram "Sim", "Não" e "Não estudei". A segunda pergunta era "Você estudou a história e as aplicações dos logaritmos?", e as alternativas eram "Sim" e "Não". A última pergunta era "Você gosta de Matemática?", e as possibilidades de respostas eram "Sim" e "Não".



Pelos dados coletados, constatamos que existe um razoável equilíbrio entre o número de alunos que gostaram e o número de alunos que não gostaram de estudar logaritmos. Há uma leve superioridade destes, que representam 54% dos que estudaram o conteúdo (40 alunos), em relação àqueles, que representam 46% (34 alunos). Dos que estudaram o conteúdo, 51% não estudaram nem as aplicações nem a história dos logaritmos; isso nos revela que o ensino desse conteúdo, muitas vezes, é desvinculado de sua construção histórica e de suas aplicações práticas.



Interesse dos alunos pelos logaritmos

Dos alunos que afirmaram ter gostado dos logaritmos, 44% também não conhecem aplicações ou a história do conteúdo, revelando que essa parte da Matemática, por si só, gera satisfação em uma boa parcela dos alunos que a aprendem.

Outro dado interessante é que, dos alunos que registraram gostar de Matemática, 43% não gostaram de ter estudado logaritmos, e dos que não gostam de Matemática, 26% revelaram ter gostado de logaritmos. Isso reitera que um mesmo conteúdo ou uma mesma aula provocam reações diferentes em cada um dos alunos e que não se pode esperar que um determinado conteúdo agrade a todos os alunos de uma classe.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelo que já foi exposto neste trabalho, ficou claro que os logaritmos surgiram com o objetivo de suprir uma necessidade social e que tiveram relevante importância histórica, tanto para a Ciência quanto para a sociedade em geral. Por motivo dessa grande importância, um dos selos postais que a Nicarágua, em 1971, lançou para homenagear as 'dez fórmulas matemáticas mais importantes do mundo' foi dedicado aos logaritmos (EVES, 2004, p. 347). Pelo mesmo motivo, foi feita uma comemoração ao tricentenário da descoberta dos logaritmos e, como parte dessa comemoração, entre 1924 e 1949, foram publicadas extensas tábuas logarítmicas com vinte casas decimais, as primeiras a superarem as publicadas por Briggs e Vlacq (EVES, 2004, p. 346).

Assim sendo, e para sermos coerentes com a afirmação de que a Escola é uma instituição social e socializadora, que deve valorizar e incentivar as construções sócioculturais, consideramos que o ensino dos logaritmos deve ser mantido na educação escolar brasileira, porém com uma abordagem diferente da que atualmente tem sido feita.

Mantendo os logaritmos no Ensino Médio, visto que eles são aplicados em outras Ciências, como a Física, a Biologia, e a Química, seu estudo pode, facilmente, ser feito de forma interdisciplinar. Assim, fundamentados nas afirmações sobre a importância de uma abordagem interdisciplinar na Educação, feitas na Seção 2 deste trabalho, podemos afirmar que, se o ensino dos logaritmos for bem ministrado, ele pode contribuir para a formação de cidadãos com uma visão mais abrangente das Ciências e da realidade, os quais serão capazes de tomar decisões de forma mais consciente e de atuar de modo crítico na sociedade. Lembremo-nos de que, como já citamos no Referencial Teórico, um dos objetivos do Ensino é que o aluno atinja um estado de autonomia para compreender conceitos e "atuar de modo crítico na sociedade". Assim, o ensino dos logaritmos ajuda a Escola a cumprir suas metas e proporciona aos alunos significativo crescimento intelectual e cultural.

Eves (2004, p. 347) também considera importante o ensino dos logaritmos e afirma:

> *a função logarítmica nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponenciais e logarítmicas são partes vitais da natureza e da análise. Conseqüentemente, um estudo das propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino de matemática.*

Thomas (2002, p. 469) afirma que *as propriedades dos logaritmos permanecem importantes como nunca*. Lima (1996, p. 111) reforça essa opinião ao afirmar que

> *... mesmo com o advento e uso universal das calculadoras, e a conseqüente perda de interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético, a importância científica dos mesmos não diminui nos dias de hoje e podemos afirmar, sem perigo de erro, que, enquanto houver ciência, haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais.*

Consideramos também, com base nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OC-EM) (BRASIL, 2006, p. 75) e em alguns argumentos apresentados por Miguel e Miorim (2004, p. 61 e 62), que os livros didáticos deveriam fazer uma abordagem mais histórica e interdisciplinar (através das aplicações) do estudo dos logaritmos, com o objetivo de dar um enfoque mais prático e menos compartimentado ao ensino. Essa abordagem poderia substituir a que os livros têm utilizado, que, pelo apresentado na Seção 6 — Abordagem de alguns livros para o ensino dos logaritmos —, valoriza muito a resolução de equações e inequações logarítmicas e o trabalho algébrico com as propriedades dos logaritmos, e não explora a sua história e aplicações.

Com uma abordagem histórica para o ensino dos logaritmos, ficará claro para os alunos que esse conteúdo surgiu pela atividade intelectual humana e que não é um conteúdo "preexistente", que o objetivo dessa criação era suprir uma necessidade social, que para isso foi necessário grande esforço de alguns estudiosos e que os logaritmos tiveram grande importância social.

Nossa pesquisa sobre a opinião dos alunos revelou que, para aproximadamente 50% dos estudantes, é significativo aprender logaritmos. Como a Escola deve ser diversificada para atender à diversidade de opiniões e preferências dos discentes, o ensino dos logaritmos pode ser considerado uma atividade escolar destinada a atender a um grupo que representa quase a metade dos estudantes.

Verificamos também que, dos alunos que não gostaram de ter estudado logaritmos, 55% não estudaram nem a história nem as aplicações desse conteúdo. Acreditamos então que, com uma abordagem que valorize a história e as aplicações dos logaritmos, o percentual de alunos que vão considerar significativo o aprendizado do conteúdo aumentará. Dessa forma, o ensino dos logaritmos terá maior importância ainda.

Em relação ao ensino desse conteúdo, julgamos que narrar a história de como Napier descobriu que um de seus empregados o estava roubando seria uma maneira interessante de o docente iniciar o estudo dos logaritmos. Acreditamos que, como tal história é bem simples e demonstra grande criatividade e inteligência do nobre, ela pode gerar o interesse e a curiosidade dos alunos, facilitando, assim, o processo de construção do conhecimento por parte deles.

Continuando o estudo, o professor pode comentar sobre a chegada dos portugueses ao Brasil, em 1500, para mostrar a relação entre as Grandes Navegações, a Astronomia, a Economia e a invenção dos logaritmos, explicando a necessidade de cálculos mais precisos e mais rápidos envolvendo números muito grandes ou pequenos demais. Dessa maneira, amplia-se ainda mais o caráter interdisciplinar do estudo do conteúdo.

Argumentamos, anteriormente, que a inserção da tecnologia na Educação traz grandes contribuições para o ensino. Para, então, ampliar o alcance pedagógico do ensino dos logaritmos, pode-se, por exemplo, propor aos alunos que comparem os resultados obtidos calculando logaritmos de alguns números na calculadora com os encontrados nas tabelas logarítmicas. Vale ressaltarmos a importância de um aluno saber consultar tabelas, pois são comuns na Matemática Financeira, na Estatística e estão sempre presentes no cotidiano de todo cidadão.

Outra atividade interessante, envolvendo o uso de calculadoras, seria pedir aos alunos para calcularem o produto, ou o quociente, de dois números, e depois compararem o resultado com valores calculados utilizando uma tabela logarítmica e as propriedades operatórias (para compreender melhor essa atividade proposta, veja Anexo B). Pode-se ainda calcular potências e raízes de qualquer índice. Com essa atividade, os alunos vão perceber que os avanços da Ciência e da tecnologia trazem grandes benefícios sociais, pois o surgimento dos logaritmos facilitou os cálculos na época de sua criação e, hoje, as calculadoras os facilitam ainda mais.

Caso na escola haja um laboratório de informática à disposição dos professores, pode-se trabalhar com os alunos a construção de uma tabela logarítmica usando o programa computacional Excel ou um similar. As OC-EM consideram as planilhas eletrônicas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática (BRASIL, 2006, p. 89). Ainda no laboratório, o docente pode utilizar softwares livres, como o Winplot (programa utilizado para fazer os gráficos apresentados nas páginas 15 e 36), para estudar com os alunos o comportamento gráfico das funções logarítmicas e exponenciais.

Podemos perceber que o ensino dos logaritmos, se bem ministrado, pode ter uma abrangência muito grande, proporcionando aos alunos um grande crescimento cultural (histórico), intelectual (conceitos científicos/abstratos) e técnico (tecnologia). Saber disso deve motivar e inspirar professores a ensinar logaritmos com bastante alegria e entusiasmo, o que trará ainda mais benefícios aos alunos, conforme já exposto na Seção 2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADLER, Irving. **Matemática e desenvolvimento mental**. São Paulo: Cultrix, 19--.

- ALVES, Rubem. **A alegria de ensinar**. 7.ed. Campinas: Papirus, 2003.

- ALVES, Rubem. **Conversas sobre educação**. 8.ed. Campinas: Verus, 2003.

- ATKINS, Peter; JONES, Loretta. **Princípios de Química: questionando a vida moderna e o meio ambiente**. Porto Alegre: Bookmam, 2001.

- BOYER, Carl B; **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. V.2. Brasília: MEC, 2006.

- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996.

- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica: 2002.

- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Um enfoque transdisciplinar à educação e à história da Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004. p. 13-29.

- EVES, Houward. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

- FACCHINI, Walter. Matemática para a escola de hoje. Ensino Médio. Vol. Único. São Paulo: FTD, 2006.

- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa**. 17.ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

- FUKE, Luiz Felipe; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi; YAMAMOTO, Kazuhito. **Os alicerces da Física**. Vol. 2; Termologia, Óptica e Ondulatória. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 1993.

- GASPAR, Alberto. **Física**. Vol. 2; Ondas, Óptica, Termodinâmica. 2.ed. São Paulo: Ática, 2001.

- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; JUNIOR, José Ruy Giovanni. **Matemática Fundamental: uma nova abordagem**. Ensino Médio. Vol. Único. São Paulo: FTD, 2002.

- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. Ensino Médio. V.1. São Paulo: FTD, 2000.

- GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lúcia Maria Costi. **"A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados"**. In: *Informática na educação: teoria e prática* – vol. 1, n. 1. UFRGS – Curso de Pós Graduação em informática na educação: Porto Alegre, 1998.

- GUERRA, Andréia; et al. **A interdisciplinaridade no ensino das ciências a partir de uma perspectiva histórico-filosófica.** Disponível em <www.fsc.ufsc.br/ccef/port/15-1/artpdf/15-1.pdf#page=32> Acesso em 14 de dez. 2007.

- HEIN, Nelson; BIENBENGUT, Maria Salett; AYRES, Paulo Chantala. **Modelo matemático no ensino aplicado a dosagem medicinal**. III Simpósio de Educação Matemática. Chivilcoy (Argentina): 2005.

- HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática**. 2.ed. Porto Alegre: Globo, 1958.

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 2. Logaritmos. 8ª. ed. São Paulo: Atual, 1993.

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro; PERIGO, Roberto. **Matemática**. Ensino Médio. Vol. Único. São Paulo: Atual, 1997.

- KAMPFF, Adriana J. Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. **“Novas tecnologias e educação matemática”**. Artigo apresentado no X workshop de Informática na Escola, junto ao XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação: Bahia, jul. 2004.

- LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

- LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

- LARROSA, Jorge; **Nietzsche e a Educação**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

- LINS, Rômulo Campos. Matemática, Monstros, significados e educação matemática.In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 92-120.

- MAOR; Eli. **e: a história de um número**. 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

- MARAGON, Cristiane; LIMA, Eduardo. Os novos pensadores da educação. **Revista Nova Escola**, São Paulo, n. 154, p. 18-25, ago. 2002.

- MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

- MONTEIRO, Alexandrina; J**UNIOR, Geraldo Pompeu. A matemática e os temas transversais.** São Paulo: Moderna, 2001.

- MORIN, Edgard. **A cabeça bem feita: repensar a reforma, reformar o pensamento.** 9. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2004.

- OLE SKOVSMOSE. Matemática em ação. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004, p. 30-57.

- ONRUBIA, Javier. Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir. In: COLL, César; et al. **O construtivismo na sala de aula.** 6. ed. São Paulo: Ática, 2003. Cap. 5, p. 123-151.

- SMOLE, Kátia Cristina Stocco; KIYUKAWA, Rokusaburo. Matemática. Ensino Médio. Vol. 1. 2ª ed. São Paulo: Saraiva, 1999.

- SOLÉ, Isabel; COLL, César. Os professores e a concepção construtivista. In: COLL, César; et al. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Ática, 2003. Cap. 1, p. 9-28.

- THOMAS, George B; et al. **Cálculo**. Vol. 1. 10ª edição. São Paulo, Addison Wesley, 2002.

- WEIL, Pierre; D'AMBRÓSIO, Ubiratan; CREMA, Roberto. **Rumo à nova transdisciplinaridade.** 3. ed. São Paulo: Summus, 1993.

- www.comciencia.br acesso em 30 de dezembro de 2007.

ANEXOS

Apresentamos a seguir dois exemplos de multiplicação: um utilizando a Prostaférese e outro utilizando os conceitos de logaritmo.

Anexo A: Um exemplo de multiplicação utilizando uma das fórmulas de Prostaférese

Vamos utilizar a fórmula $2\cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ para calcular o produto 21,316 · 4,1439.

Consideremos os números 0,21316 (21,316 ÷ 100) e 0,41439 (4,1439 ÷ 10) e sejam $2\cos A = 0{,}21316$ e $\cos B = 0{,}41439$.

Assim $\begin{cases} 2\cos A = 0{,}21316 \Rightarrow \cos A = 0{,}10658 \Rightarrow A \cong 83{,}881795° \\ \cos B = 0{,}41439 \Rightarrow B \cong 65{,}519092° \end{cases}$

Temos então que $\begin{cases} A + B = 149{,}400887° \Rightarrow \cos(A+B) = -0{,}860749 \\ A - B = 18{,}312703° \Rightarrow \cos(A-B) = 0{,}949081 \end{cases}$

Assim, substituindo na fórmula, temos:

0,21316 · 0,41439 = -0,860749 + 0,949081 $\Rightarrow$ 0,21316 · 0,41439 = 0,088332.

Multiplicando ambos os membros da igualdade por 1000, temos que $21{,}316 \cdot 4{,}1439 \cong 88{,}332$, com erro de 0,00071% (88,332 ÷ 88,331372).

Nesse exemplo utilizamos uma calculadora científica para encontrar o valor de A e de B, mas poderíamos ter utilizado uma tabela trigonométrica.

Anexo B: Um exemplo de multiplicação utilizando conceitos de logaritmos decimais

Suponhamos que queiramos calcular, novamente, 21,316 · 4,1439.

Já mostramos que $\log_b M \cdot N = \log_b M + \log_b N$. Assim, $\log 21{,}316 \cdot 4{,}1439 = \log 21{,}316 + \log 4{,}1439$. Utilizando uma calculadora, encontramos que $\log 21{,}316 = 1{,}32870571$ e $\log 4{,}1439 = 0{,}61740927$. Logo, $\log 21{,}316 \cdot 4{,}1439 = 1{,}94611498$.

Portanto, $21{,}316 \cdot 4{,}1439 = 10^{1{,}94611498}$ = 88,3313724.

Se, em lugar da calculadora, utilizássemos uma tabela logarítmica, possivelmente seria necessário fazermos três interpolações, visto que a maioria das tabelas contidas nos livros didáticos só apresentam as Mantissas dos números naturais de 1 a 1000. Essas tabelas só nos permite calcular os logaritmos de números inteiros entre 1 e 1000 ou de números decimais que ao excluirmos a vírgula de sua representação, não se tornem maiores que 1000.